第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/0946-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.5, May, 2002

构造非线性发展方程孤波解的混合指数方法*

徐桂琼[1)2)] 李志斌[1)]

[1)] (华东师范大学计算机科学技术系, 上海 200062)

[2)] (上海大学信息工程与管理系, 上海 200436)

(2001 年 8 月 13 日收到; 2001 年 10 月 24 日收到修改稿)

介绍了 Hereman 等提出的构造非线性发展方程孤波解的混合指数方法. 依据数学机械化思想对该方法进行了改进和完善, 使之能够求得非线性发展方程更多的孤波解, 并可应用于非线性发展方程组及高维方程.

关键词: 非线性发展方程, 混合指数法, 孤波

PACC: 0340K, 0220

1. 引 言

非线性发展方程孤波解的求解问题一直是物理学家和数学家研究的重点课题. 多年来, 涌现出了一系列著名的求解方法, 如反散射方法, Hirota 方法, Painlevé 展开以及 Bäcklund 变换等等. 近年来国内许多学者在此领域也做出了许多重要工作[1—7].

早在 1978 年, Rosales 和 Korpel 分别从数学和物理角度就非线性发展方程孤波解的构造问题进行了深入研究, 发现非线性发展方程的孤波解可由其线性方程的实指数行波解来构造. Hereman 等[8] 在此基础上分析了孤波解的物理性质, 于 20 世纪 80 年代中期提出了构造非线性发展方程孤波解的混合指数方法, 随后又对该方法不断加以改进, 使之逐步成为有效计算非线性发展方程孤波解的重要方法之一[9,10]. 混合指数法的实质是将非线性发展方程孤波解的求解问题转化为一复杂的递推方程的求解问题. 方法的基本原理是将非线性发展方程的孤波解表示为该方程中线性部分的实指数解的级数形式, 从而将非线性发展方程孤波解的求解问题转化为组合计算问题. 尽管手工求解复杂的递推方程并不容易, 然而由于计算机代数的发展, 人们可以借助计算机代数系统有效地处理繁琐的代数计算, 从而归纳出递推方程的解并加以验证. 由此可获得非线性发展方程的准确孤波解. 本文分析了 Hereman 的混合指数方法, 对其进行了改进和完善, 通过几个简单例子说明了这种改进可以获得非线性发展方程和非线性耦合方程组更多的孤波解.

2. 混合指数方法

考虑非线性发展方程

$$F(u, u_x, u_t, u_{2t}, u_{2x}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

其中 $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}, u_{2t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \cdots, F$ 是其变元 $u, u_t, u_x, u_{2x}, \cdots$ 的多项式. 构造方程(1)精确孤波解的混合指数方法步骤如下.

1. 对方程(1)作行波变换

$$u(x, t) = \phi(\xi), \quad \xi = x - ct. \tag{2}$$

通过变换(2)可将方程(1)化作关于变量 ξ 的常微分方程

$$F_1(\phi, \phi', \phi'', \cdots) = 0. \tag{3}$$

对方程(3)关于 ξ 尽可能积分, 将积分结果记作

$$F_2(\phi, \phi', \phi'', \cdots) = 0. \tag{4}$$

2. 为获得方程方程(4)一般形式的孤波解, 引入变换

$$\phi = M + \varphi, \tag{5}$$

其中 M 为待定常数, 将上述变换代入方程(4), 得

$$F_3(\varphi, \varphi', \varphi'', \cdots) = 0. \tag{6}$$

3. 对方程(6)进行奇点分析, 判别是否需要对其作非线性变换, 即将 $\varphi = \xi^{-p}$ 代入方程(6), 平衡方程中最高阶导数项与最高阶非线性项, 计算出 p 的值. 通常 p 为正整数; 若 p 为有理数 $\dfrac{m_1}{m_2}$, 可令 $\varphi =$

* 国家重点基础研究发展规划(批准号: G1998030600)和上海市曙光计划资助的课题.

$\psi^{\frac{1}{m_2}}$来变换方程(6)；此外若 p 为负数可假设 $\varphi = \psi^{-1}$.

4. 假定方程(6)具有如下形式的解

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n(\xi),\ g(\xi) = \exp(-K\xi),\ K > 0, \tag{7}$$

式中 a_n 为待定常系数，$g(\xi)$是方程(6)中相应线性方程的实指数解(若(6)式无线性项，则 $g(\xi)$为(6)式最低次非线性项构成的方程的解).

5. 将(7)式代入方程(6)，利用级数乘积的 Cauchy 准则，可得到关于系数 a_n 的递推关系式

$$\begin{aligned} &P(n)a_n + C_H \sum_{r=H-1}^{n-1} \cdots \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{l=1}^{m-1} (l)^{u_1} \\ &\times (m-l)^{u_2} \cdots (n-r)^{u_H} a_l a_{m-1} \cdots a_{n-r} + \cdots \\ &+ C_L \sum_{r=L-1}^{n-1} \cdots \sum_{m=2}^{k-1} \sum_{l=1}^{m-1} (l)^{v_1} (m-1)^{v_2} \cdots \\ &\times (n-r)^{v_H} a_l a_{m-1} \cdots a_{n-r} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $P(n)$为 n 的多项式，H，L 分别为方程(6)中所有非线性项关于 φ 的最高次幂和最低次幂，C_H，C_L 分别为方程(6)中最高阶非线性项和最低阶非线性项的系数，u_i，v_i 分别为方程(6)中最高阶非线性项和最低阶非线性项中各阶导数的阶数.

目前，没有一般方法求解递推方程(8)，实践中可令

$$a_n = \sum_{j=0}^{\delta} A_j C_j^n n^j, \tag{9}$$

其中 A_j，C_j 均为常数. 如果方程(6)有形如(7)式的解，则可通过平衡出现在方程(6)中的线性最高阶导数项和非线性项来确定(9)式中的参数 δ，即

$$\delta = (\lambda - H + 1 - \Lambda)/(H - 1), \tag{10}$$

式中 $\Lambda = \sum_{i=1}^{H} u_i$，$\lambda$ 为 $P(n)$的幂次.

6. 将(9)式代入(8)式，整理后可得到关于 n 的 $\lambda + \delta$ 次多项式方程. 其系数必须为零，由此得到一组关于 A_j，K，c 的代数方程组，求解代数方程组可确定出 $A_j (j = 0, 1, \cdots, \delta)$，$K$ 和 c.

7. 记

$$F_j(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^j g^n,\ j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{11}$$

则方程(6)的形式幂级数解为

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{\delta} A_j F_j(C_j g). \tag{12}$$

利用递推关系式

$$F_{j+1}(g) = gF_j'(g),\ F_0(g) = \frac{g}{1-g},\ j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{13}$$

可给出方程(6)的闭合形式解，返回原来的变量最终可获得方程(1)的精确孤波解.

下面以 mKdV 方程，KP 方程以及耦合的 KdV 方程组为例，详细说明混合指数法的求解过程.

3. 计算实例

3.1. mKdV 方程

mKdV 方程[8]的一般形式为

$$u_t + \alpha u^2 u_x + u_{xxx} = 0, \tag{14}$$

其中 α 为自由参数.

为求 mKdV 方程的孤波解，首先作行波变换

$$u(x, t) = \phi(\xi),\ \xi = x - ct, \tag{15}$$

其中 c 为待定常数，表示波速. 将(15)式代入方程(14)，关于 ξ 积分，得到方程(14)相应的常微分方程

$$-c\phi + \frac{1}{3}\alpha\phi^3 + \phi_{\xi\xi} = 0. \tag{16}$$

又引入变换

$$\phi = M + \varphi. \tag{17}$$

代入方程(16)，得

$$\begin{aligned} &-(c - \alpha M^2)\varphi + \varphi_{\xi\xi} + \alpha M\varphi^2 + \frac{1}{3}\alpha\varphi^3 \\ &+ \frac{1}{3}\alpha M^3 - cM = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

要求方程(18)为齐次的，故应有

$$M\left(\frac{1}{3}\alpha M^2 - c\right) = 0. \tag{19}$$

分两种情况讨论：

1) 当 $M = 0$ 时，方程(18)线性部分的解为 $g(\xi) = \exp(-K\xi)$，其中 $K = \sqrt{c}$. 方程(18)的解可假设为

$$\varphi = \left(\frac{3c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (g(\xi))^n. \tag{20}$$

为计算方便，引入常数因子$\left(\frac{3c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$.

将(20)式代入方程(18)，利用级数乘积的 Cauchy 准则，可得到关于系数 a_n 的递推关系式

$$(n^2 - 1)a_n + \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{l=1}^{m-1} a_l a_{m-1} a_{n-m} = 0,\ n \geqslant 3. \tag{21}$$

从上式易知 a_1 为任意常数，$a_2 = 0$，进而 $a_{2n} =$

0.计算 a_{2n+1} 的前几项,可得 $a_3=-a_1^3/2^3$, $a_5=+a_1^5/2^6$, $a_7=-a_1^7/2^9$,….由(10)式可确定出 a_n 的最高次幂为零,因而可归纳出其非平凡解为

$$a_{2n}=0,\ a_{2n+1}=(-1)^n a_1^{2n+1}/2^{3n}. \tag{22}$$

由(15),(17),(20)和(22)式,可得 mKdV 方程的钟状孤波解

$$u(x,t)=\left(\frac{6c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}(\sqrt{c}(x-ct)+\Delta), \tag{23}$$

其中 $c>0$,Δ 为任意常数.

2)当 $M=\pm\left(\frac{3c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$,取 $K=\sqrt{-2c}$.同 1),得到系数 a_n 的递推关系式

$$(1-n^2)a_n\pm\frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n-1}a_l a_{n-1}+\frac{1}{2}\sum_{m=l}^{n-1}\sum_{l=1}^{m-1}a_l a_{m-1}a_{n-m}=0,\ n\geqslant 3. \tag{24}$$

由上式可知,a_1 为任意常数,$a_2=\pm\frac{1}{2}a_1^2$,$a_3=\pm\frac{1}{4}a_1^3$, $a_4=\pm\frac{1}{8}a_1^4$,….归纳得

$$a_n=\pm 2\left(\frac{1}{2}a_1\right)^n. \tag{25}$$

由此获得 mKdV 方程的一个扭状孤波解

$$u(x,t)=\pm\left(\frac{3c}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\tanh(\sqrt{-2c}(x-ct)/2+\Delta), \tag{26}$$

其中 $c<0$,Δ 为任意常数.在文献[8]中 Hereman 未给出解(26).

3.2. Kadomtsev-Petviashvili 方程

混合指数方法也可应用于高维方程.考虑一般形式的 KP 方程

$$u_{tx}+\alpha(u_x^2+uu_{xx})+\gamma u_{xxxx}+\varepsilon u_{yy}=0, \tag{27}$$

其中 $\alpha,\gamma,\varepsilon$ 均为自由参数.

方程(27)中有两个空间变量,设它的行波解为

$$u(x,y,t)=\phi(\xi),\ \xi=x-ct+wy, \tag{28}$$

其中 c 为波速,w 为 y 方向上的波数.

将(28)式代入方程(27),关于 ξ 积分后得到方程(27)相应的常微分方程

$$\gamma\phi_{\xi\xi}+(\varepsilon w^2-c)\phi+\frac{\alpha}{2}\phi^2=0. \tag{29}$$

对方程(29)作变换

$$\phi=M+\psi, \tag{30}$$

得

$$\gamma\psi_{\xi\xi}+(\varepsilon w^2+M\alpha-c)\psi+\frac{\alpha}{2}\psi^2+M\left(\varepsilon w^2-c+\frac{\alpha}{2}M\right)=0. \tag{31}$$

同样要求(31)是齐次的,故应有

$$M\left(\varepsilon w^2-c+\frac{\alpha}{2}M\right)=0. \tag{32}$$

分两种情况讨论:

1)$M=0$,假设方程(31)具有如下形式的孤波解

$$\psi=\frac{2(\varepsilon w^2-c)}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(g(\xi))^n, \tag{33}$$

其中 $g(\xi)=\exp(-K\xi)$,$K=\sqrt{\frac{c-\varepsilon w^2}{\gamma}}$,$a_n$ 为待定系数.

将(33)式代入方程(31),利用级数乘积的 Cauchy 准则,得到关于 a_n 的递推关系式

$$(1-n^2)a_n+\sum_{l=1}^{n-1}a_l a_{n-1}=0,\ n\geqslant 2. \tag{34}$$

由(10)式可确定出 a_n 为 n 一次多项式,不失一般性可设

$$a_n=A_1 n+A_0, \tag{35}$$

将上式代入(34)式可确定出 $A_0=0$,$A_1=6\left(\frac{a_1}{6}\right)^n$.

将(35)式代入(33)式,利用(13),(28)及(30)式得到 KP 方程的一个钟状孤波解

$$u(x,y,t)=\frac{3(c-\varepsilon w^2)}{\alpha}\times\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-\varepsilon w^2}{\gamma}}(x-ct+wy)+\Delta\right), \tag{36}$$

其中常数 c,w 满足$(c-\varepsilon^2 w)\gamma>0$,$\Delta$ 为任意常数.

2)$M=\frac{2(c-\varepsilon w^2)}{\alpha}$,假设方程(31)具有(33)式的孤波解,其中 $g(\xi)=\exp(-K\xi)$,但 $K=\sqrt{\frac{(\varepsilon w^2-c)}{\gamma}}$,$a_n$ 为待定系数.同 1),可得到 KP 方程的另一精确孤波解

$$u(x,y,t)=\frac{2(c-\varepsilon w^2)}{\alpha}+\frac{3(\varepsilon w^2-c)}{\alpha}\times\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\varepsilon w^2-c)}{\gamma}}(x-ct+wy)+\Delta\right), \tag{37}$$

其中 c,w 满足$(\varepsilon w^2-c)\gamma>0$,$\Delta$ 为任意常数.

3.3. 耦合 KdV 方程组

考虑非线性耦合 KdV 方程组[11,12]

$$
\begin{aligned}
&u_t + 6\alpha u u_x - 6 v v_x + \alpha u_{xxx} = 0,\\
&v_t + 3\alpha u v_x + \alpha v_{xxx} = 0,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

其中 α 为自由参数.

在行波变换

$$
u(x,t) = \phi(\xi),\ v(x,t) = \psi(\xi),\ \xi = x - ct \tag{39}
$$

下，方程组(38)化作

$$
\begin{aligned}
&- c\phi + \alpha\phi_{\xi\xi} + 3\alpha\phi^2 - 3\psi^2 = 0,\\
&- c\psi_\xi + 3\alpha\phi\psi_\xi + \alpha\psi_{\xi\xi\xi} = 0.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

对方程组(40)，尝试寻求如下形式的精确解：

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{c}{3\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n,\\
\psi &= \pm\frac{c}{3\sqrt{|\alpha|}}\sum_{n=1}^{\infty} b_n g^n,
\end{aligned}
\tag{41}
$$

式中 $g = \exp(-K\xi)$，$K = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}$. 将(41)式代入方程组(40)，得到耦合的递推关系式

$$
\begin{aligned}
&(n^2 - 1)a_n = -\sum_{l=1}^{n-1} a_l a_{n-l} \pm \sum_{l=1}^{n-1} b_l b_{n-1},\ n \geqslant 2,\\
&n(n^2 - 1)b_n + \sum_{l=1}^{n-1} l b_l a_{n-1} = 0,\ n \geqslant 2.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

由递推关系式(42)，可知 a_1，b_1 均为任意常数，为确定出 a_n，b_n 关于变元 n 的最高次幂 δ_1，δ_2，将方程组(40)中的 $\psi_{\xi\xi\xi}$ 与 $\phi\psi_\xi$ 平衡，$\psi_{\xi\xi}$ 分别与 ϕ^2，ψ^2 平衡，可得 $\delta_1 = 1$，$\delta_2 = 1$ 或 $\delta_1 = 1$，$\delta_2 = 0$.

1)当 $\delta_1 = 1$，$\delta_2 = 1$ 时，设 $b_1^2 = a_1^2/2$，求解递推关系式可得

$$
a_n = (-1)^{n+1} 12 n a_0^n,\ b_n = \pm 6\sqrt{2} n a_0^n, \tag{43}
$$

其中 $a_0 = a_1/12$.

将(43)式代入(41)式，并利用递推关系式(13)，结合行波变换(39)得到耦合 KdV 方程组(38)的一组钟状孤波解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{c}{\alpha}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct) + \Delta\right),\\
w(x,t) &= \pm\frac{\sqrt{2}c}{2\sqrt{|\alpha|}}\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct) + \Delta\right),
\end{aligned}
\tag{44}
$$

其中 c 为任意常数，$\Delta = \frac{1}{2}\ln|(12/a_1)|$. Fan 在文献[12]中利用齐次平衡法也得到了解(44).

2)当 $\delta_1 = 1$，$\delta_2 = 0$ 时，设 $a_1 = 0$，求解递推关系式(42)可得

$$
\begin{aligned}
&a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = (-1)^{n+1} 24 n a_0^n,\ n \geqslant 1\\
&b_{2n-1} = (-1)^{n-1} b_1 a_0^{n-1},\ b_{2n} = 0,\ n \geqslant 1,
\end{aligned}
\tag{45}
$$

其中 b_1 为任意常数，$a_0 = \operatorname{sign}(\alpha)\, b_1^2/72$.

将(45)式代入(41)式，利用(13)式及行波变换(39)得到耦合 KdV 方程组的另一组孤波解

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{2c}{\alpha}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct) + \Delta\right),\\
v(x,t) &= \pm c\sqrt{\frac{2}{|\alpha|}}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{c}{\alpha}}(x - ct) + \Delta\right),
\end{aligned}
\tag{46}
$$

其中 c 为任意常数，$\Delta = \frac{1}{2}\ln(72/b_1^2)$. Hereman 在文献[8]中仅获得了解(46).

混合指数法的基本思想是将非线性发展方程(组)的孤波解假设为其线性方程的实指数解的级数形式，而双曲正切方法或扩展的双曲函数方法[2—7]则是将方程的孤波解直接假设为 tanh 和 sech 等的多项式形式. 因此，凡是能由双曲函数方法获得的解，理论上均可通过混合指数法得到. 当然，混合指数方法在非线性发展方程孤波解的求解中也有其不足之处. 例如，上面的计算实例就表明使用混合指数方法时计算过程较为繁琐. 究其原因，主要是由于目前缺少求解复杂递推关系式的有效算法，因而在求解某些方程(组)时，仅能获得其部分孤波解. 如何进一步改进这个方法，使之能获得方程更多的孤波解甚至多孤波解，并使之适应于更广泛的方程类，还有待于进一步研究.

[1] Wang M L, Zhou Y B and Li Z B 1996 *Phys*. *Lett*. A **216** 67
[2] Li Z B and Zhang S Q 1997 *Acta Math*. *Sin*. **17** 81(in Chinese)[李志斌等 1997 数学物理学报 **17** 81]
[3] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵等 1998 物理学报 **47** 353]
[4] Yan Z Y *et al* 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962(in Chinese)[阎振亚等 1999 物理学报 **48** 1962]
[5] Zhang G X *et al* 2000 *Chin*. *Sci*.(Ser. A) **30** 1103(in Chinese)[张桂戌等 2000 中国科学(A辑) **30** 1103]
[6] Fan E G 2000 *Phys*. *Lett*. A **277** 212
[7] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2062(in Chinese)[李志斌等 2001 物理学报 **50** 2062]
[8] Hereman W, Banerjee P P, Korpel A *et al* 1986 *J*. *Phys*. *A*: *Math*. *Gen*. **19** 607
[9] Hereman W and Takaoka M 1990 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **23** 4805
[10] Panigrahi M and Dash P C 1999 *Phys*. *Lett*. A **261** 284
[11] Hirota R and Satsuma J 1981 *Phys*. *Lett*. A **85** 407
[12] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Phys*. *Lett*. A **245** 389

Solitary wave solutions of a nonlinear evolution equation using mixed exponential method*

Xu Gui-Qiong[1)2)] Li Zhi-Bin[1)]

[1)] (*Department of Computer Science*, *East China Normal Universtiy*, *Shanghai* 200062, *China*)

[2)] (*Departmen of Information Engineering and Administration*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200436, *China*)

(Received 13 August 2001; revised manuscript received 24 October 2001)

Abstract

Mixed exponential method proposed by Hereman for finding solitary wave solutions of a nonlinear evolution equation is presented. The method is developed and perfected according to the theory of mathematical mechanization, and with this method many solitary wave solutions not only of a nonlinear evolution equation(s) but also a multi-dimention equation can be obtained.

Keywords: nonlinear differential equations, mixed exponential method, solitary wave

PACC: 0340K, 0220

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China(Grant No. G1998030600), and the "Shu-Guang" Project of Shanghai, China.