第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/0951-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.5, May, 2002

AKNS 方程族的一类扩展可积模型*

郭福奎[1)]　张玉峰[2)]

[1)] (山东科技大学应用数学系, 泰安　271019)

[2)] (大连理工大学应用数学系, 大连　116024)

(2001 年 9 月 26 日收到; 2001 年 10 月 25 日收到修改稿)

首先构造了 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个新的子代数,设计了一个等谱问题.应用屠格式求出了著名的 AKNS 方程族的一类扩展可积模型,即可积耦合.然后将这种求可积耦合的方法一般化,可用于一大类方程族,如 KN 族、GJ 族、WKI 族等谱系的可积耦合.提出的方法具有普遍应用价值.最后作为 AKNS 方程族的特例,求得了 KdV 方程和 MKdV 方程的可积耦合.

关键词:可积耦合, loop 代数, AKNS 方程族

PACC:0340K, 0220, 0365G

1. 引　　言

在许多科学领域中,导出了耦合方程组,它们是实际问题的数学模型.例如 Prigogine 和 Lefever 在 1968 年提出了如下数学模型:

$$u_t = Ku_{xx} + u^2 v - Bu,$$
$$v_t = Kv_{xx} - u^2 v + Bu, \tag{1}$$

其中 B 为常数, K 为扩散系数,系统(1)系统地描述了一个生化模型[1] 还有著名的浅水波数学模型[2]

$$u_t + \eta_x + uu_x = 0,$$
$$\eta_t + (u\eta + u + u_{xx})_x = 0, \tag{2}$$

和耦合 KdV 模型[3]

$$v_t + 3uu_x + v_{xxx} = 0,$$
$$u_t + 6uu_x - 6vv_x + u_{xxx} = 0, \tag{3}$$

等等.可见,有许多的可积耦合数学模型具有一定的实际背景[4].我们自然提出这样的一个问题:能否利用数学工具构造可积耦合方程组?其实可积耦合问题人们早已有所思.文献[5]指出,可积耦合在研究可积系的无中心 Virasoro 对称代数和孤立子时,就产生了这一概念,它是孤立子理论的一个新的研究方向,其定义叙述如下:

设

$$u_t = K(u) \tag{4}$$

为已知的可积系,称系统

$$u_t = K(u),$$
$$v_t = S(u, v) \tag{5}$$

为(4)式的可积耦合,如果(5)式仍是可积的,且 $S(u,v)$ 显含 u 或 u 对 x 的导数.

人们已经找到求可积耦合的两种方法[6]:

1)原方程加对称方程;

2)摄动方法.

以上两种方法具有共同点:都是从原方程(4)入手,所得到的结果是一个方程的可积耦合.本文在于改进这种方法,得到的结果是一个方程族(而不是一个方程)的可积耦合,其出发点是从等谱问题入手,构造一个恰当的新的 loop 代数 $\tilde{G}$,然后再用屠格式[7]自然地导出.我们以建立 AKNS 方程族的可积耦合进行例述.

2. AKNS 方程族的可积耦合

选取 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一组基[7]

$$h(n) = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & -\lambda^n \end{pmatrix}, \quad e(n) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^n & 0 \end{pmatrix},$$

* 国家自然科学基金(批准号:10072013)资助的课题.

$$[h(m),e(n)]=2e(m+n),$$
$$[h(m),f(n)]=-2f(m+n),$$
$$[e(m),f(n)]=h(m+n),$$
$$\deg h(n)=\deg e(n)=\deg f(n)=n. \tag{6}$$

设有等谱问题

$$\psi_x=U\psi,\psi=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm T},\lambda_t=0,$$
$$U=-h(1)+qe(0)+rf(0), \tag{7}$$

则利用屠格式导出著名的 AKNS 方程族

$$u_t=\begin{pmatrix}q\\r\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial+r\partial^{-1}q & -r\partial^{-1}r\\ q\partial^{-1}q & \frac{1}{2}\partial-r\partial^{-1}q\end{pmatrix}^n$$
$$\times\begin{pmatrix}\beta r\\ \beta q\end{pmatrix}=JL^n\begin{pmatrix}\beta r\\ \beta q\end{pmatrix}. \tag{8}$$

我们构造 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数,其基为

$$e_1(n)=\begin{pmatrix}\lambda^n&0&0\\0&-\lambda^n&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$e_2(n)=\begin{pmatrix}0&\lambda^n&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},e_3(n)=\begin{pmatrix}0&0&0\\\lambda^n&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$[e_1(m),e_2(n)]=2e_2(m+n),$$
$$[e_1(m),e_3(n)]=-2e_3(m+n),$$
$$[e_2(m),e_3(n)]=e_1(m+n),\deg e_i(n)=n. \tag{9}$$

可见,(9)式中的换位关系与(6)式一致.

取等谱问题

$$\overline{\psi}_x=\bar{U}\overline{\psi},$$
$$\bar{U}=-e_1(1)+qe_2(0)+re_3(0), \tag{10}$$

则从(10)式出发,利用(9)式和屠格式也可导出 AKNS 方程族(8).

将 loop 代数 $\tilde{A}_2$(9)的基扩展为

$$e_1(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_2(0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$e_3(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ e_4(0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$e_5(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,$$
$$[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_1,e_5]=-e_5,$$
$$[e_2,e_4]=0,\ [e_2,e_5]=e_4,\ [e_3,e_4]=e_5,$$
$$[e_3,e_5]=0,\ [e_4,e_5]=0,\ e_i(n)=e_i(0)\lambda^n,$$
$$[e_i(m),e_j(n)]=[e_i(0),e_j(0)]\lambda^{m+n},$$
$$\deg e_i(0)=n,i=1,2,3,4,5. \tag{11}$$

这组基具有这样的特点:若记 $\tilde{G}_1=\mathrm{span}\{e_1(n),e_2(n),e_3(n)\}$,$\tilde{G}_2=\mathrm{span}\{e_4(n),e_5(n)\}$,这里 span 表示张成,则 $\tilde{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1$,且$[\tilde{G}_1,\tilde{G}_2]\subset\tilde{G}_2$.

取等谱问题

$$\varphi_x=[U,\varphi],$$
$$U=-e_1(1)+u_1e_2(0)+u_2e_3(0)$$
$$+u_3e_4(0)+u_4e_5(0), \tag{12}$$

设

$$V=\sum_{m=0}^{\infty}(a_me_1(-m)+b_me_2(-m)+c_me_3(-m)$$
$$+d_me_4(-m)+f_me_5(-m)), \tag{13}$$

解辅助方程

$$V_x=[U,V], \tag{14}$$

得递推关系

$$b_{m+1}=-\frac{1}{2}b_{mx}-u_1a_m,\ c_{m+1}=\frac{1}{2}c_{mx}-u_2a_m,$$
$$a_{mx}=u_1c_m-u_2b_m,$$
$$d_{m+1}=-d_{mx}+u_1f_m-u_3a_m-u_4b_m,$$
$$f_{m+1}=f_{mx}-u_2d_m+u_3c_m-u_4a_m,$$
$$a_0=-\beta=\text{constant}\neq0,$$
$$b_0=c_0=d_0=f_0=0. \tag{15}$$

记

$$V_+^{(n)}=\sum_{m=0}^{n}(a_me_1(n-m)+b_me_2(n-m)$$
$$+c_me_3(n-m)+d_me_4(n-m)+f_me_5(n-m)),$$
$$V_-^{(n)}=\lambda^nV-V_+^{(n)},$$

则

$$-V_{+x}^{(n)}+[U,V_+^{(n)}]=V_{-x}^{(n)}-[U,V_-^{(n)}]. \tag{16}$$

(16)式左端所含基元阶数(deg)$\geqslant0$,右端阶数$\leqslant0$. 记 $V^{(n)}=V_+^{(n)}$,则上式可写为

$$-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=2b_{n+1}e_2(0)-2c_{n+1}e_3(0)$$
$$+d_{n+1}e_4(0)-f_{n+1}e_5(0).$$

于是由零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0, \tag{17}$$

得到系统

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}-2b_{n+1}\\2c_{n+1}\\-d_{n+1}\\f_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}. \tag{18}$$

由(15)式易见

$$\begin{pmatrix}c_{n+1}\\b_{n+1}\\f_{n+1}\\d_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\partial+u_2\partial^{-1}u_1 & -u_2\partial^{-1}u_2 & 0 & 0\\ u_1\partial^{-1}u_1 & \frac{1}{2}\partial-u_1\partial^{-1}u_2 & 0 & 0\\ -u_3+u_4\partial^{-1}u_1 & -u_4\partial^{-1}u_2 & -\partial & u_2\\ u_3\partial^{-1}u_1 & u_4-u_3\partial^{-1}u_2 & -u_1 & \partial\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_n\\b_n\\f_n\\d_n\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}c_n\\b_n\\f_n\\d_n\end{pmatrix}. \tag{19}$$

所以(18)式的最后形式为

$$u_t=JL^n\begin{pmatrix}\beta u_2\\\beta u_1\\\beta u_4\\\beta u_3\end{pmatrix}. \tag{20}$$

因为可积耦合定义中,并未说(4),(5)式是 Lax 可积还是 Liouville 可积,所以只要是可积就行. 到此由 J 和 L 的构造与(8)式比较可知,(20)式为 AKNS 族的可积耦合. 事实上,利用文献[7]的方法和迹恒等式[8],可证(20)式也是 Liouville 可积的.

3. 求可积耦合的一般模式及方程族(20)的特例

由上述关于 AKNS 族可积耦合的推证过程,可将 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 抽象为更一般的 loop 代数 $\tilde{G}$. 设 G 是以 $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ 为基的线性空间,规定其换位关系与(11)式相同. 记 $a=\sum_{i=1}^{5}a_ie_i$, $b=\sum_{i=1}^{5}b_ie_i$, $c=\sum_{i=1}^{5}c_ie_i$,其中 a_i,b_i,c_i 为任意常数或函数,则有

$$[a,[b,c]]+[b,[c,a]]+[c,[a,b]]=0, \tag{21}$$

即 Jacobi 恒等式成立,所以 G 是一个 Lie 代数;以 $e_i(n)=e_i\lambda^n$, $[e_i(m),e_j(n)]=[e_i,e_j]\lambda^n$, $\deg e_i(n)=n$ 为基,构成 loop 代数 $\tilde{G}$. 设其两个子代数为 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2$,其分别为 $\{e_1(n),e_2(n),e_3(n)\}$, $\{e_4(n),e_5(n)\}$,则可见 $\tilde{G}_1\tilde{G}_2$ 满足关系

$$\tilde{G}_1 \text{ 同构于 } \tilde{A}_1,[\tilde{G}_1,\tilde{G}_2]\subset\tilde{G}_2. \tag{22}$$

取线性问题的形式为

$$\psi_x=[U,\psi],\lambda_t=0,\quad \psi_t=[V,\psi], \tag{23}$$

其中 $\psi=\sum_{i=1}^{5}\psi_i$, e_i,ψ_i 为任意函数,

$$U=U(u,\lambda)\in\tilde{G},\ V=V(u,\lambda)\in\tilde{G},\quad u=(u_1,u_2,\cdots,u_p)^{\mathrm{T}}$$

为函数向量,λ 为谱参数. (23)式的相容条件为

$$\psi_{xt}=[U_t,\psi]+[U,\psi_t]=[U_t,\psi]+[U,[V,\psi]]=\psi_{xt}=[V_x,\psi]+[V,\psi_x]=[V_x,\psi]+[V,[U,\psi]],$$
$$[U_t,\psi]+[U,[V,\psi]]-[V_x,\psi]-[V,[U,\psi]]=0. \tag{24}$$

由 Jacobi 恒等式(21)知,(24)式化为

$$[U,\psi]-[V_x,\psi]+[[U,V],\psi]=0, \tag{25}$$

由 ψ 的任意性,由(25)式得到零曲率方程

$$U_t-V_x+[U,V]=0, \tag{26}$$

给定 U 和 V 的具体形式,按照第 2 部分的推证思路,就能求得某些方程族的可积耦合,例如 KN 族、GJ 族、WKI 族等谱系的可积耦合,因此本文提出的方法具有普遍应用性.

作为可积耦合(20)式的特例,取 $n=3$ 得

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}-2b_4\\2c_4\\-d_4\\f_4\end{pmatrix},$$

$$-2b_4=\frac{\beta}{4}u_{1xxx}-\frac{3\beta}{2}u_1u_2u_{1x},$$

$$2c_4=\frac{\beta}{4}u_{2xxx}-\frac{\beta}{2}u_2^2u_{1x}-\beta u_1u_2u_{2x}-\frac{\beta}{2}(u_1u_2u_{2x}-u_2^2u_{1x}),$$

$$
\begin{aligned}
-d_4 &= \beta u_{3xxx} + \beta(u_1 u_{4x})_x - \frac{3\beta}{4} u_1 u_2 u_{2x} \\
&\quad - \frac{3\beta}{2} u_1 u_2 u_{3x} - \frac{3\beta}{4} u_3 u_2 u_{1x} \\
&\quad + \frac{3\beta}{4} u_{1xx} u_4 - \beta u_1 u_{4xx} + \frac{\beta}{2} u_{1x} u_{4x}, \\
f_4 &= \beta u_{4xxx} + \beta(u_2 u_{3x})_x + \frac{\beta}{2}(u_{2x} u_3)_x \\
&\quad - \frac{\beta}{2}(u_2 u_4 u_1)_x - \beta(u_2 u_{3xx} + u_1 u_2 u_{4x}) \\
&\quad + \frac{\beta}{4}(u_3 u_{2xx} - u_1 u_4 u_{2x} + u_2 u_4 u_{1x}).
\end{aligned} \tag{27}
$$

取 $u_1 = u$，$u_2 = 1$，$\beta = 4$，则(27)式化为 KdV 方程的可积耦合

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xxx} - 6uu_x, \\
u_{3t} &= 4u_{3xxx} - 6uu_{3x} - 3u_x u_3 \\
&\quad + 3u_4 u_{xx} + 6u_x u_{4x}, \\
u_{4t} &= 4u_{4xxx} - u_4 u_x - 2uu_{4x}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

取 $u_1 = u_2 = u$，$u_3 = u_4 = V$，$\beta = 4$，(27)式化为MKdV方程的可积耦合

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xxx} - 6u^2 u_x, \\
V_t &= 4V_{xxx} + 6(u_x + u^2) V_x \\
&\quad + (3u_{xx} - 6uu_x) V.
\end{aligned} \tag{29}
$$

[1] Picking A 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 4395

[2] Zhang J F 1999 *Chin. Phys. Lett.* **4** 4

[3] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Phys. Lett.* A **264** 403

[4] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1657 (in Chinese) [楼森岳 2000 物理学报, **49** 1657]

[5] Ma W X and Fuchssteiner 1996 *Integrable Theory of the Perturbation Equations, Chaos, Soliton & Fractals* 1996(7) 1227-1250

[6] Ma W X *Methods and Applications of Analysis* **7** 21

[7] Tu G Z 1989 *J. Math. Phys.* **30** 330

[8] Guo F K 1997 *Acta Math. Sin.* **40** 801 (in Chinese) [郭福奎 1997 数学学报 **40** 801]

A family of expanding integrable models of AKNS hierarchy of equations*

Guo Fu-Kui[1] Zhang Yu-Feng[2]

[1] (*Department of Applied Mathematics, Shandong University of Science and Technology, Taian* 271019, *China*)

[2] (*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

(Received 26 September 2001; revised manuscript received 25 October 2001)

Abstract

First of all, a new subalgebra of loop algebra $\tilde{A}_2$ is constructed. Designing an isospectral problem and using Tu-model we obtain a family of expanding integrable models of the well-known AKNS hierarchy of equations, i.e. integrable couplings. Then the generalized form of the method for obtaining integrable couplings is established. It follows that the integrable couplings for a large kinds of hierarchies of equations, such as KN hierarchy, GJ hierarchy, WKI hierarchy etc. admit this approach. Therefore, the method proposed in this paper has practical values. Finally, as special cases, the integrable couplings of KdV equation and MKdV equation are obtained.

Keywords: integrable coupling, loop algebra, AKNS hierarchy of equations

PACC: 0340K, 0220, 0365G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10072013).