第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/0955-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.5,May,2002

浅水体系中的多孤立波*

陈黎丽[1)2)] 陈伟中[2)]

[1)]（宁波大学物理系，宁波 315211）

[2)]（南京大学近代声学国家重点实验室，南京 210093）

（2001 年 8 月 13 日收到；2001 年 9 月 3 日收到修改稿）

形式分离变量法被推广应用于寻求不可积模型的多孤立波解．特别地，应用形式分离变量法于三个描述浅水体系的非线性方程：推广 Whitham-Broer-Kaup（WBK）方程、2＋1 维耦合 Korteweg de Vries（KdV）方程和 1＋1 维耦合 KdV 方程，给出了这些体系的明显的解析的多孤立波解．

关键词：浅水体系，多孤立波，形式分离变量法，不可积模型

PACC：0340K，0290

1．引 言

自从 Scott Russell 在运河中发现水表面孤立波以来，尤其是非传播水表面孤立波的发现，已经有力地推动了非线性科学的发展，在理论上，Korteweg de Vries（KdV）方程和非线性 Schrödinger（NLS）方程已经很好地解释了实验观察．然而，这些非线性模型都是严格可积的．而在实际问题中，由于阻尼、驱动等因素，真正能够描述系统的模型就不再是可积的了．在非线性理论中，对于可积系统的精确解，如孤立子解和周期解等，已经建立了许多行之有效的方法并取得了惊人的发展，对于不可积系统，在某些情况下不可积部分可以看成是小量（近可积模型）而在更一般的情况下不可积部分往往不能看成是小量．对前者，人们可以采用各种各样的微扰论方法来处理．然而对于一般的情况，人们不得不采用数值方法．因此，如何寻找不可积模型的精确孤立波解已经引起人们的普遍关注，但由于不可积模型的复杂性，目前尚未取得实质性的进展．

在线性理论中，傅里叶分析法和分离变量法是两种最有用的方法，在非线性理论中对于可积模型和近可积模型，反散射方法可以看成是傅里叶分析法的推广．要将分离变量法推广到非线性问题是一件更为困难的工作．近来对于可积模型，人们利用谱函数相关的对称约束，建立了所谓的‘形式分离变量法’[1,2]，在已有的文献中这种方法通常称为 Lax 对的非线性化方法[1]或对称约束法[2,3]．在形式分离变量法中，虽然约化场（谱函数）是多个变量的函数，但它却满足若干具有不同变量的低维方程．最近，我们还将这种方法推广应用到了不可积模型[4,5]，并用来求一些不可积模型的单孤立波解及用椭圆函数表示的双周期波解．本文中将进一步推广并利用这种方法，来获得描述浅水波的推广 Whitham-Broer-Kaup（WBK）方程、2＋1 维耦合 KdV 方程和 1＋1 维耦合 KdV 方程等一些不可积模型的多孤立波解．

在文献[4,5]中，我们已对形式分离变量法作了一般的讨论．为了完整起见及下面进一步讨论的需要，我们作一简要的回顾．设一般的$(n+1)$维 N 阶非线性物理方程为

$$F(x_0=t,x_1,x_2,\cdots,x_n,u,u_{x_i},u_{x_ix_j},\cdots,u_{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_N}})\equiv F(u)=0,\tag{1}$$

其中 $u\equiv(u_1,u_2,\cdots,u_M)^{\mathrm T}$，$F\equiv(F_1,F_2,\cdots,F_M)^{\mathrm T}$ 是列矩阵函数，$F_i(u)$为 u_i 及其关于 x_i 的各阶导数的多项式，则我们可以引入一组形式变量分离方程

$$\psi_{x_i}=K_i,\ i=0,1,2,\cdots,n,\tag{2}$$

其中 $\psi\equiv(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_P)^{\mathrm T}$ 和 $K_i\equiv(K_{i1},K_{i2},\cdots,K_{iP})^{\mathrm T}$ 是列矩阵函数，且 $K_i=K_i(\psi)$是 ψ 的函数，$\psi=\psi(x_i)$是 x_i 的函数．(2)式的相容性条件 $\psi_{x_ix_j}=$

* 浙江省自然科学基金（批准号：100033）和教育部高等学校中青年骨干教师专项基金（批准号：C0001）资助的课题．

$\psi_{x_j x_i}$ 要求矩阵函数 K_i 是互相可交换的：

$$[K_i, K_j] \equiv K_i'K_j - K_j'K_i \equiv \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\Big[K_i(\psi + \varepsilon K_j) - K_j(\psi + \varepsilon K_i)\Big]\Big|_{\varepsilon=0} = 0, \quad (3)$$

虽然 ψ 仍然可以是 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数，但(2)式中的每一个方程都只明显依赖于一个独立变量. 当 K_i 被取定后，剩下的问题就是确定 u 和 ψ 之间的关系

$$u = U(\psi). \quad (4)$$

将(2)，(4)式代入(1)式，令 ψ_i 的各幂次系数为零，确定 U 的具体形式.

对于一般不可积模型，为了给出一些特殊的精确解，寻找一些合适的 K_i 和 U 是比较困难的，对不同的模型需要作不同的处理. 下面利用形式分离变量法来寻求浅水体系中一些不可积模型的多孤波解.

2. 推广 WBK 浅水波方程的多孤立波解

本节将形式分离变量法应用于不可积的推广 WBK 浅水波方程

$$u_t + a_1 uu_x + a_2 h_x + a_3 u_{xx} = 0, \quad (5)$$

$$h_t + b_1 (uh)_x + b_2 u_{xxx} + b_3 h_{xx} = 0, \quad (6)$$

式中 $u = u(x, t)$ 为水平速度场，$h = h(x, t)$ 为偏离液面平衡位置的高度，a_3, b_2, b_3 为表征不同色散或扩散程度的常数. 虽然(5)，(6)式中的常数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 在实际的物理问题中是任意的，然而仅当 $a_1 = a_2 = b_1 = 1, b_3 = -a_3$ 时方程才是完全可积的，此时方程即为 WBK 浅水波方程[6—9].

首先求推广 WBK 浅水波方程的二孤波解. 在(2)式中取 $P = 2$，则形式变量分离方程为

$$\psi_x = \begin{pmatrix}\psi_{1x}\\ \psi_{2x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K_{11}\\ K_{12}\end{pmatrix},$$

$$\psi_t = \begin{pmatrix}\psi_{1t}\\ \psi_{2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}K_{21}\\ K_{22}\end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中 $\psi_1 = \psi_1(x, t), \psi_2 = \psi_2(x, t)$ 是 x, t 的函数，$K_{1P} = K_{1P}(\psi), K_{2P} = K_{2P}(\psi), P = 1, 2$ 是 ψ 的函数. 相容性条件 $[K_{1P}, K_{2P}] = 0$ 的一种简单形式的解为

$$K_{21} = \omega_1 K_{11}, \quad K_{22} = \omega_2 K_{12}, \quad (8)$$

其中 ω_1, ω_2 是常数. 函数 K_{11}, K_{12}, U 和 H 由(4)，(7)，(8)式及 $h = H(\psi)$ 代入(5)，(6)式确定.

在实际应用中，可先选定合适的 K_{11}, K_{12}，例如，可以选取 K_{11}, K_{12} 分别为 ψ_1, ψ_2 的多项式函数

$$K_{11} = \sum_{j=0}^{J} A_j \psi_1^j, \quad K_{12} = \sum_{n=0}^{N} B_n \psi_2^n, \quad (9)$$

亦可取 K_{11}, K_{12} 分别为 ψ_1, ψ_2 的多项式函数的开方

$$K_{11} = \sqrt{\sum_{j=0}^{J} A_j \psi_1^j}, \quad K_{12} = \sqrt{\sum_{n=0}^{N} B_n \psi_2^j}. \quad (10)$$

这里选择最简单的形式

$$K_{11} = A_1 \psi_1, \quad K_{12} = B_1 \psi_2, \quad (11)$$

并取

$$U = E[\ln(1 + \psi_1 + \psi_2 + C\psi_1\psi_2)]_x + F, \quad (12)$$

$$H = B[\ln(1 + \psi_1 + \psi_2 + C\psi_1\psi_2)]_{xx} + G[\ln(1 + \psi_1 + \psi_2 + C\psi_1\psi_2)]_x + Q. \quad (13)$$

由(7)，(8)，(11)式得 ψ 的一般解为

$$\psi_1 = \exp[A_1(x + \omega_1 t + x_{01})], \quad (14)$$

$$\psi_2 = \exp[B_1(x + \omega_2 t + x_{02})], \quad (15)$$

其中 x_{01}, x_{02} 为任意常数. 将(12)—(15)式代入(5)，(6)式，并令 ψ_1, ψ_2 的各幂次系数为零，从而确定(12)—(15)式中各项的系数，即可得到推广 WBK 浅水波方程的二孤波解.

情况 1　当 $a_1 = b_1$ 时，有

$$u = E\left[\frac{A_1\exp(A_1\xi_1) + B_1\exp(B_1\xi_2)}{1 + \exp(A_1\xi_1) + \exp(B_1\xi_2)}\right] + F, \quad (16)$$

$$h = B\Big\{\Big[A_1^2\exp(A_1\xi_1) + B_1^2\exp(B_1\xi_2) + (A_1 - B_1)^2\exp(A_1\xi_1 + B_1\xi_2)\Big] \Big/ \Big[1 + \exp(A_1\xi_1) + \exp(B_1\xi_2)\Big]^2\Big\}, \quad (17)$$

其中

$$\xi_1 = x + \omega_1 t + x_{01}, \quad \xi_2 = x + \omega_2 t + x_{02},$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{2}b_1(EA_1 + 2F), \quad \omega_2 = -\frac{1}{2}b_1(EB_1 + 2F),$$

$$E = \frac{a_3 + b_3 \pm \sqrt{(a_3 - b_3)^2 + 4a_2 b_2}}{b_1},$$

$$B = \Big(2a_2 b_2 - a_3 b_3 + b_3^2 \pm b_3\sqrt{(a_3 - b_3)^2 + 4a_2 b_2}\Big)\Big/(b_1 a_2),$$

A_1, B_1, F 为任意常数.

情况 2　当 $b_2 = 0$ 时，方程(5)，(6)成为推广的

非线性浅水长波近似方程

$$u_t + a_1 u u_x + a_2 h_x + a_3 u_{xx} = 0, \tag{18}$$

$$h_t + b_1 (uh)_x + b_3 u_{xx} = 0. \tag{19}$$

仅当 $a_3 = - b_3 = \frac{1}{2}$，$a_1 = a_2 = b_1 = - 1$ 时方程是可积的[6,7,10,11]，对于一般的 a_2，a_3，b_1，b_3 及 $a_1 = b_1$，方程仍然是不可积的．令情况 1 的解中 $b_2 = 0$，则(16)，(17)式即为方程(18)，(19)的解．而当 $a_1 = 2b_1$，$a_3 = b_3$ 时，尽管方程(18)，(19)还是不可积的，但我们可得到另一形式的二孤波解：

$$u = \frac{b_3}{b_1}\left[\frac{A_1 \exp(A_1 \xi_1) + B_1 \exp(B_1 \xi_2)}{1 + \exp(A_1 \xi_1) + \exp(B_1 \xi_2)}\right] + F, \tag{20}$$

$$h = G\left[\frac{A_1 \exp(A_1 \xi_1) + B_1 \exp(B_1 \xi_2)}{1 + \exp(A_1 \xi_1) + \exp(B_1 \xi_2)}\right] + \frac{b_1}{b_3^2}(a_2 G^2 + b_3 FG), \tag{21}$$

其中

$$\xi_1 = x + \omega_1 t + x_{01}, \quad \xi_2 = x + \omega_2 t + x_{02},$$

$$\omega_1 = -\left(b_3 A_1 + 2b_1 F + \frac{a_2 b_1 G}{b_3}\right),$$

$$\omega_2 = -\left(b_3 B_1 + 2b_1 F + \frac{a_2 b_1 G}{b_3}\right),$$

A_1，B_1，F，G 为任意常数．

进一步用上述方法，我们得到推广 WBK 方程的多孤立波解．

情况 1　当 $a_1 = b_1$ 时，有

$$u = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \exp(A_i \xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i \xi_i)}\right] + F, \tag{22}$$

$$h = B\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i^2 \exp(A_i \xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i \xi_i)} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} A_i \exp(A_i \xi_i)\right]^2}{\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i \xi_i)\right]^2}\right\}, \tag{23}$$

其中

$$\xi_i = x + \omega_i t + x_{0i}, \quad \omega_i = -\frac{1}{2} b_1 (EA_i + 2F),$$

$$E = \frac{a_3 + b_3 \pm \sqrt{(a_3 - b_3)^2 + 4a_2 b_2}}{b_1},$$

$$B = \frac{2a_2 b_2 - a_3 b_3 + b_3^2 \pm b_3 \sqrt{(a_3 - b_3)^2 + 4a_2 b_2}}{b_1 a_2},$$

A_i，F 为任意常数．

情况 2　当 $b_2 = 0$，$a_1 = 2b_1$，$a_3 = b_3$ 时，有另一形式的多孤立波解

$$u = \frac{b_3}{b_1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \exp(A_i \xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i \xi_i)}\right] + F, \tag{24}$$

$$h = G \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \exp(A_i \xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n} \exp(A_i \xi_i)} + \frac{b_1}{b_3^2}(a_2 G^2 + b_3 FG), \tag{25}$$

其中

$$\xi_i = x + \omega_i t + x_{0i}, \quad \omega_i = -\left(b_3 A_i + 2b_1 F + \frac{a_2 b_1 G}{b_3}\right),$$

A_i，F，G 为任意常数．

3．(2 + 1)维 KdV 方程的多孤立波解

一般的 2 + 1 维不可积的 KdV 型模型

$$u_t + u_{xxx} - a v_x u - b v u_x = 0, \tag{26}$$

$$u_x = v_y \tag{27}$$

是 1 + 1 维浅水波方程[12,13]

$$v_{xxxt} + a v_x v_{xt} + b v_t v_{xx} - v_{xt} - v_{xx} = 0 \tag{28}$$

的一个 2 + 1 维推广．虽然(28)式中的常数 a 和 b 在实际的物理问题中是任意的，然而仅当 $a = 2b$ 或 $a = b$ 时模型才是完全可积的[13—15]．对于 2 + 1 维的推广(26)和(27)式仅当 $a = b$ 时才是完全可积的[13,16]．

首先求方程(26)，(27)的二孤波解，设形式变量分离方程为

$$\psi_x = \begin{pmatrix} \psi_{1x} \\ \psi_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} \\ K_{12} \end{pmatrix}, \quad \psi_y = \begin{pmatrix} \psi_{1y} \\ \psi_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{21} \\ K_{22} \end{pmatrix},$$

$$\psi_t = \begin{pmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{31} \\ K_{32} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 $\psi_1 = \psi_1(x, y, t)$，$\psi_2 = \psi_2(x, y, t)$是 x，y，t 的函数，$K_{iP} = K_{iP}(\psi)$，$i = 1,2,3$，$P = 1,2$ 是 ψ 的函数．相容性条件$[K_{iP}, K_{jP}] = 0$ 的一种简单形式的解为

$$K_{21} = R_1 K_{11}, \quad K_{22} = R_2 K_{12},$$

$$K_{31} = \omega_1 K_{11}, \quad K_{32} = \omega_2 K_{12}, \tag{30}$$

其中 R_1，R_2，ω_1，ω_2 为常数．我们先选定合适的

K_{11},K_{12}.我们仍选择最简单的情况

$$K_{11} = A_1\psi_1,\ K_{12} = B_1\psi_2, \tag{31}$$

并取

$$U = A[\ln(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_{xx} + E[\ln(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_x + F, \tag{32}$$

$$V = B[\ln(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_{xx} + G[\ln(1+\psi_1+\psi_2+C\psi_1\psi_2)]_x + Q, \tag{33}$$

由(29),(30),(31)式可得 ψ 的一般解为

$$\psi_1 = \exp[A_1(x+R_1y+\omega_1t+x_{01})], \tag{34}$$

$$\psi_2 = \exp[B_1(x+R_2y+\omega_2t+x_{02})], \tag{35}$$

将(32)—(35)式代入(26),(27)式,并令 ψ_1,ψ_2 的各幂次系数为零,从而确定(32)—(35)式中各项的系数,可得到 2 + 1 维不可积的 KdV 型方程的二孤波解

$$u = \frac{-12R_1}{a+b}\Bigg\{-\Bigg[\Big(A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2) + C(A_1+B_1)\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Big/\Big(1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2) + C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Bigg]^2 + \Big(A_1^2\exp(A_1\xi_1)+B_1^2\exp(B_1\xi_2) + C(A_1+B_1)^2\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Big/\Big(1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2) + C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Bigg\} + F, \tag{36}$$

$$v = \frac{-12}{a+b}\Bigg\{-\Bigg[\Big(A_1\exp(A_1\xi_1)+B_1\exp(B_1\xi_2) + C(A_1+B_1)\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Big/\Big(1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2) + C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Bigg]^2 + \Big(A_1^2\exp(A_1\xi_1)+B_1^2\exp(B_1\xi_2) + C(A_1+B_1)^2\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Big/\Big(1+\exp(A_1\xi_1)+\exp(B_1\xi_2) + C\exp(A_1\xi_1+B_1\xi_2)\Big)\Bigg\} + Q, \tag{37}$$

其中

$$\xi_1 = x+R_1y+\omega_1t+x_{01},$$

$$\xi_2 = x+R_1y+\omega_2t+x_{02},$$

$$\omega_1 = -A_1^2+bQ+\frac{aF}{R_1},\omega_2 = -B_1^2+bQ+\frac{aF}{R_1},$$

$$C = \frac{(A_1-B_1)^2}{(A_1+B_1)^2},$$

A_1,B_1,R_1,F,Q 为任意常数.

进一步用上述方法,得到(2 + 1)维 KdV 方程的多孤立波解.

$$u = \frac{-12R_1}{a+b}[\ln\phi]_{xx} + F, \tag{38}$$

$$v = \frac{-12}{a+b}[\ln\phi]_{xx} + Q, \tag{39}$$

$$\varphi = 1+\sum_{i=1}^{N}\exp(A_i\xi_i)+\sum_{i<j}^{N}C_{ij}\exp(A_i\xi_i+A_j\xi_j) + \sum_{i<j<k}^{N}C_{ij}C_{jk}C_{ik}\exp(A_i\xi_i+A_j\xi_j+A_k\xi_k) + \cdots + \prod_{i<j}C_{ij}\prod_{i=1}^{N}\exp(A_i\xi_i), \tag{40}$$

其中

$$\xi_i = x+R_1y+\omega_it+x_{0i},\ \omega_i = -A_i^2+bQ+\frac{aF}{R_1},$$

$$C_{ij} = \frac{(A_i-A_j)^2}{(A_i+A_j)^2},$$

A_i,R_1,F,Q 为任意常数.

4. 耦合 KdV 方程的多孤立波解

当描述两个非线性波的相互作用时,在长波近似下,耦合 KdV 方程

$$u_t + a_1uu_x + a_2vv_x + a_3u_{xxx} = 0, \tag{41}$$

$$v_t + b_1uv_x + b_2vu_x + a_3v_{xxx} = 0, \tag{42}$$

其中 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2 为常数,是最简单的模型之一,并被广泛地应用于许多物理领域中,它在某些特殊情况下的单孤波解已被许多作者讨论[17],类似于上面的讨论,可求出该不可积模型的两种不同的多孤波解.

情况 1 当方程(41),(42)中参数满足 $b_1 = a_1$ 时(此时方程仍是不可积的),有多孤立波解

$$u = \frac{12a_3}{a_1 + b_2}[\ln\phi]_{xx} + F, \tag{43}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\frac{12a_3}{a_1 + b_2}[\ln\phi]_{xx} + Q, \tag{44}$$

其中 φ 的表达式与(40)式相同，

$$\xi_i = x + \omega_i t + x_{0i}, \ \omega_i = -a_3 A_i^2 - a_1 F \mp \sqrt{a_2 b_2}Q,$$

$$C_{ij} = \frac{(A_i - A_j)^2}{(A_i + A_j)^2},$$

A_i，F，Q 为任意常数.

情况 2　对于任意的 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2 有多孤立波解

$$u = \frac{12a_3}{b_1 + b_2}[\ln\phi]_{xx} + F, \tag{45}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{b_1 + b_2 - a_1}{a_2}}\left\{\frac{12a_3}{b_1 + b_2}[\ln\phi]_{xx} + F\right\}, \tag{46}$$

其中 φ 的表达式仍为(40)式所示，且

$$\xi_i = x + \omega_i t + x_{0i},$$

$$\omega_i = -a_3 A_i^2 - (b_1 + b_2)F,$$

$$C_{ij} = \frac{(A_i - A_j)^2}{(A_i + A_j)^2},$$

A_i，F 为任意常数.

5. 结语和讨论

在通常的实际问题中，比如在本文研究的浅水波问题中，不可避免地存在各种不可积因素. 在许多精确描述的水波模型中，出现了比较任意的非线性相互作用项系数，扩散系数和色散系数. 对这些物理模型的精确解析求解是非常困难的. 因此，传统上人们首先对模型的参数加以一些限制，甚至完全取定而使得模型退化为完全可积模型. 我们在文献[4]和[5]的基础上，将适用于不可积模型的形式分离变量法求单孤波解方法进一步推广到求不可积系统的多孤立波解. 我们具体研究了三种典型的浅水波模型，即 推广的 WBK 方程、2 + 1 维耦合 KdV 方程和 1 + 1 维的耦合 KdV 方程等不可积模型，得到许多有意义的多弧波解. 我们知道，只要系统能量足够高，系统都能出现多孤立波. 从理论上看，单孤立波现象也只是多孤立波的一个特殊情形. 所以，我们发展的求解不可积系统多孤波解的方法，是有重要的应用背景的. 从原则上讲，我们可以用形式分离变量方法寻求实际水波运动中的更多的、可能的非线性激发模式，该方面的工作目前正在进行，结果将另文报道.

感谢楼森岳教授的帮助和讨论.

[1] Cao C W 1990 *Sci*. *Chin*. A **33** 528

[2] Cheng Y and Li Y S 1991 *Phys*. *Lett*. A **157** 22
Zeng Y B 1991 *Phys*. *Lett*. A **169** 541

[3] Lou S Y and Hu X B 1997 *J*. *Math*. *Phys*. **38** 6401

[4] Chen L L 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 2149 (in Chinese) [陈黎丽 1999 物理学报 **48** 2149]

[5] Lou S Y and Chen L L 1999 *J*. *Math*. *Phys*. **40** 6491

[6] Witham G B 1967 *Proc*. *Roy*. *Soc*. (London. Ser.) A **299** 6

[7] Broer L T F 1975 *Appl*. *Sci*. *Res*. **31** 377

[8] Kaup D J 1975 *Prog*. *Theo*. *Phys*. **54** 396

[9] Ruan H Y and Lou S Y 1992 *Acta Phys*. *Sin*. **41** 1213 (in Chinese) [阮航宇、楼森岳 1992 物理学报 **41** 1213]

[10] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[11] Zhang J F 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[12] Espinosa A and Fujioka J 1994 *J*. *Phys*. *Soc*. *Jpn*. **63** 1289

[13] Clarkson P A and Mansfield E L 1995 *Acta Appl*. *Math*. **39** 245

[14] Ablowitz M J, Kaup D J, Newell A C and Segur H 1974 *Stud*. *Appl*. *Math*. **53** 249

[15] Hirota R and Satsma J 1976 *J*. *Phys*. *Soc*. *Jpn*. **40** 611

[16] Boiti M, Leon J J P, Manna M and Pempinelli E 1986 *Inversc Problems* **2** 271

[17] Zhang D G and Li B Z 1992 *Phys*. *Lett*. A **171** 43

Multiple solitary wave in shallow water*

Chen Li-Li[1)2)] Chen Wei-Zhong[2)]

[1)] (*Department of Physics. Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*)

[2)] (*State Key Laboratory of Modern Acoustics*, *Nanjing University*, *Nanjing* 210093, *China*)

(Received 13 August 2001; revised manuscript received 3 September 2001)

Abstract

The formal variable separation approach is developed to find multiple solitary wave solutions for nonintegrable models. Especially, using the formal variable separation approach to three nonlinear equation systems, generalized Whitham-Broer-Kaup equation, 2+1 dimensional Korteweg de Vries (KdV) equation and the 1+1 dimensional coupled KdV equation, which describe the shallow water waves, we have found out some explicit analytical multiple solitary wave solutions for these systems.

Keywords: shallow water systems, multiple solitary wave solutions, formal variable separation approach, nonintegrable models

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 100033), and by the Foundation for University Key Teachers by the Ministry of Education, China (Grant No. C0001).