

非线性系统中的关联色噪声^{*}

罗晓琴 朱士群

(苏州大学理学院物理系 苏州 215006)

(2001 年 7 月 1 日收到 2001 年 9 月 29 日收到修改稿)

研究了加性噪声和乘性噪声之间的耦合为色噪声时非线性系统的动力学行为. 对于不同的噪声关联时间 τ , 求出了系统的有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_c . 结果表明, 当噪声之间的耦合 λ 大于零时, 关联时间 τ 的增大可抑制系统在阈值附近的涨落, 而当噪声之间的耦合 λ 小于零时, 关联时间 τ 的增大则加强系统在阈值附近的涨落.

关键词: 耦合强度, 噪声关联时间, 有效本征值, 强度相关时间

PACC: 0540

1. 引 言

近年来, 在随机过程的研究中, 人们发现, 由于两种噪声之间的耦合对热传导、两维流体力学、液晶结构的形成、多维立方晶格、以及有缺陷的液氦超流湍流中的叉形分叉等物理过程都有很大的影响, 所以非线性系统的动力学行为中噪声之间的耦合作用引起了人们的广泛关注^[1-16]. 人们对不同系统中噪声之间的耦合进行了分析, 比如, 激光系统中的定态分析^[2-7], 双稳系统的平均首通时间^[8,9], 非平衡系统的相变类比^[10-12], 以及随机共振^[13-16]等等. 在这些工作中, 人们研究的重点是系统的定态行为, 而对系统的动态行为, 即系统随时间的演化考虑甚少. 一般说来, 只有分析系统随时间的演化, 才能更全面地反映噪声之间的耦合对系统动力学行为的影响.

本文对加性噪声和乘性噪声之间存在耦合的非线性系统的瞬态行为进行了研究, 重点分析了系统概率分布的瞬态含时解, 深入讨论了耦合噪声的关联时间不为零时, 噪声的有色性对系统的影响. 由一维朗之万方程出发导出定态概率分布函数的解析表达式, 通过含时的瞬态福克-普朗克方程, 导出等效薛定谔方程, 计算了系统的有效本征值和强度相关时间随不同的噪声关联时间的变化. 结果表明, 噪声之间耦合强度的正负和噪声关联时间对系统的涨落有很大的影响.

2. 运动方程

加性噪声和乘性噪声之间存在耦合的一维非线性系统可用朗之万方程表示为^[1-3]

$$\frac{dx}{dt} = a_0 x - x^3 + \frac{P}{x} + p(t)x + q(t), \quad (1)$$

式中, 所有参量均为实数, a_0 为系统的分叉参量, 加性噪声 $q(t)$ 和乘性噪声 $p(t)$ 之间存在耦合. 噪声的统计性质可由它们的一阶矩和二阶矩分别表示为

$$\begin{aligned} \langle q(t) \rangle &= \langle p(t) \rangle = 0, \\ \langle q(t)q(t') \rangle &= 2P\delta(t-t'), \\ \langle p(t)p(t') \rangle &= 2P'\delta(t-t'), \\ \langle q(t)p(t') \rangle &= \langle p(t)q(t') \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

$$= \frac{\lambda \sqrt{PP'}}{\tau} \exp\left[-\frac{|t-t'|}{\tau}\right] \quad (3)$$

$$\rightarrow 2\lambda \sqrt{PP'}\delta(t-t') \quad \tau \rightarrow 0.$$

式中, P 和 P' 分别是加性噪声和乘性噪声强度, τ 为噪声之间的关联时间, 参量 λ 表示加性和乘性噪声之间的耦合程度. $\lambda = 0$ 时, 噪声之间不存在耦合, 即两种噪声之间是相互独立的.

应用统一色噪声近似, 可导出同方程(1)-(3)所对应的概率分布函数 $Q(x, t)$ 所满足的福克-普朗克方程^[6-8, 16, 17]

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x)Q(x, t)]$$

* 国家自然科学基金(批准号: 19874046)资助的课题.

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x)Q(x,t)], \quad (4)$$

其中

$$H(x) = a_0x - x^3 + \frac{P}{x} + \frac{\lambda \sqrt{PP'}}{1 + 2a_0\tau} + P'x, \quad (5)$$

$$D(x) = P + \frac{2\lambda \sqrt{PP'}}{1 + 2a_0\tau}x + P'x^2.$$

当 $t \rightarrow \infty$, $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = 0$. 因而, 从方程(4)可得
到定态概率分布函数 $Q_s(x)$ ^[18]:

$$Q_s(x) = N \left(P + \frac{2\lambda \sqrt{PP'}x}{1 + 2a_0\tau} + P'x^2 \right)^\alpha \exp \left[-\frac{x^2}{2P'} \right. \\ \left. + \frac{2\lambda \sqrt{PP'}}{(P')(1 + 2a_0\tau)}x \right. \\ \left. + \beta \arctan \frac{\lambda(1 + 2a_0\tau) + \sqrt{P'/Px}}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + 2a_0\tau)^2}} \right] \\ (-1 \leq \lambda \leq 1), \quad (6)$$

式中

$$\alpha = \frac{a_0}{2P'} + \frac{P}{2(P')^2} - \frac{2\lambda^2 P}{(P')(1 + 2a_0\tau)^2} - \frac{1}{2},$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2(1 + 2a_0\tau)^2}} \left(-\frac{a_0\lambda}{P'(1 + 2a_0\tau)} \right. \\ \left. - \frac{3\lambda P}{(P')(1 + 2a_0\tau)} + \frac{4\lambda^3 P}{(P')(1 + 2a_0\tau)^3} \right) \quad (7)$$

这里, N 为定态概率分布函数 $Q_s(x)$ 的归一化常数.

定态概率分布函数 $Q_s(x)$ 随不同的噪声耦合强度 λ 和噪声关联时间 τ 变化的情形如图 1 所示. 当噪声关联时间 $\tau = 0.5$ 时, $Q_s(x)$ 随不同的噪声耦合强度 λ 变化的情形画在图 1(a) 中. 从图 1(a) 可见, 当噪声之间不存在耦合, 即 $\lambda = 0$ 时, 定态概率分布 $Q_s(x)$ 呈对称的双峰分布, 两个峰的位置出现在 $x \approx \pm 3$ 处, 峰的高度相等. 这表明, 系统出现在 $x \approx \pm 3$ 处的概率相等, 都远高于系统出现在其他位置处的概率. 当噪声之间的耦合 $\lambda = 0.5$ 时, 两个峰的位置出现在 $x \approx \pm 2$ 处, 第一个峰的高度约是第二个峰的 1.5 倍. 虽然系统出现在 $x \approx +2$ 处的概率远高于其他位置处的概率, 但系统出现在 $x \approx -2$ 处的概率要高于出现在 $x \approx +2$ 处的概率. 当噪声之间的耦合 $\lambda = -0.5$ 时, $Q_s(x)$ 中两个峰的位置基本不变, 但是第一个峰高度较低, 第二个峰较高, 恰好同 $\lambda = 0.5$ 时相反. 从图 1(a) 还可以看出, 当 $|\lambda| > 0$ 时, $Q_s(x)$ 的两个峰的位置向 x 轴的原点附近靠近, 两个峰之间低谷的高度随 $|\lambda|$ 的增加而增加. 显然,

噪声之间的耦合能改变系统定态概率分布 $Q_s(x)$ 的对称性, 使系统的定态分布 $Q_s(x)$ 中双峰的高度产生差异.

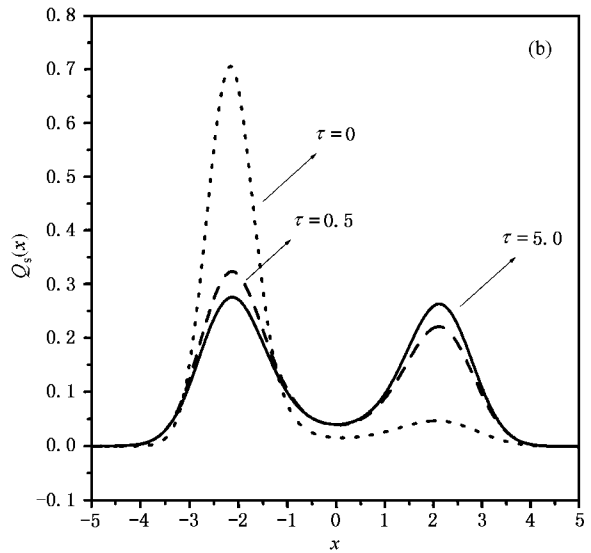
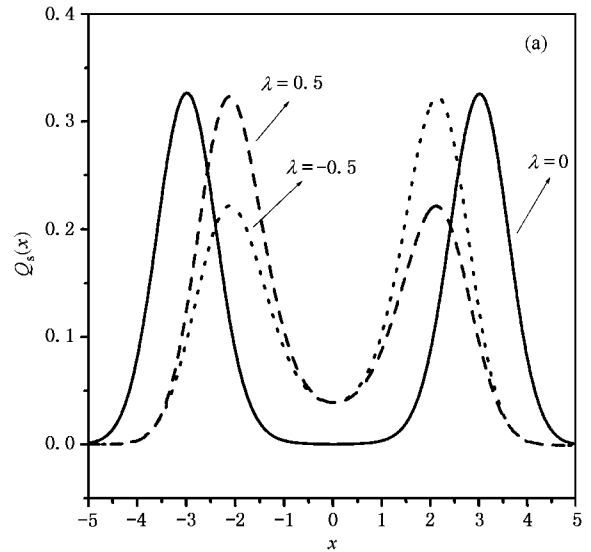


图 1 定态概率密度分布函数 $Q_s(x)$ 随参量 x 变化的曲线 ($P = 2, P' = 0.5, a_0 = 5$) (a) $\tau = 0.5$ (b) $\lambda = 0.5$

当噪声耦合强度 $\lambda = 0.5$ 时, 定态分布 $Q_s(x)$ 随不同噪声关联时间 τ 变化的情形画在图 1(b) 中. 从图 1(b) 可见, $Q_s(x)$ 仍然是双峰分布, 而且双峰的位置都出现在 $x \approx \pm 2$ 处. 在 $\tau = 0$ 的白噪声情形中, 双峰的不对称性十分显著, 第一个峰的高度约是第二个的 15 倍. 这表明, 系统出现在 $x \approx -2$ 处的概率要远高于出现在 $x \approx +2$ 处的概率. 随着噪声关联时间 τ 的增加, 两个峰的高度比大约从 15 倍 ($\tau = 0$) 减小到 1.5 倍 ($\tau = 0.5$), 直到几乎相等 ($\tau = 5.0$). 由

此可见,耦合噪声的有色性能增强系统定态分布 $Q_s(x)$ 的对称性,但对定态分布中出现峰值的位置影响不大.

3. 有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C

如果要全面地了解噪声之间的耦合和噪声的有色性对系统的影响,就要对福克-普朗克方程的瞬态含时解进行研究.方程(4)的一般含时解可写成如下形式^[41]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sqrt{Q_s(x)} \psi_n(x) \exp[-\lambda_n t] \quad (8)$$

式中 c_n 为系数, $\psi_n(x)$ 为本征函数, λ_n 为本征值.本征函数和本征值满足如下形式的薛定谔方程:

$$\left(P + \frac{2\lambda \sqrt{PP'}}{(1+2a_0\tau)^2} x^2 + P'x^2 \right) \frac{d^2 \psi_n(x)}{dx^2} + [\lambda_n - V(x)] \psi_n(x) = 0, \quad (9)$$

其中

$$V(x) = \frac{1}{2} \frac{dF(x)}{dx} + \frac{1}{4} \frac{[F(x)]^2}{Dx} - \frac{1}{2} \frac{F(x)}{D(x)} \frac{dD(x)}{dx}. \quad (10)$$

这里 $F(x)$ 和 $D(x)$ 的表达式如方程(5)所示.

这样,系统的有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 就可以通过下式计算:

$$\lambda_{\text{eff}} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} v_n \lambda_n}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n}, \quad T_C = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (v_n / \lambda_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} v_n}, \quad (11)$$

其中 $v_n = \left| \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{\psi_0(x) \psi_n(x)}{(P + P'x^2)} \right|^2$. 在实际的激光系统中,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 可用来描述时间延迟为 τ 的激光强度的相关函数和激光系统的涨落,而且 λ_{eff} 和 T_C 是在实验上可测量的两个物理量,所以,对 λ_{eff} 和 T_C 研究就有一定的应用背景.

要得到有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C ,首先要算出薛定谔方程中的本征值 λ_n 和本征函数 ψ_n ,然后再用方程(9)和(11)计算.当噪声关联时间 τ 取不同数值时,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 作为分叉参量 a_0 的函数画在图2中.

当噪声耦合强度 $\lambda = 0.5$ 时,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 如图2(a)和(b)所示.图2(a)表

明,当 $a_0 < -35$ 时,有效本征值 λ_{eff} 的数值随噪声关联时间 τ 的增加而增加;当 $a_0 > -35$ 时, λ_{eff} 的数值随 τ 的增加而减小,在 $a_0 \approx -10$ 处,也就是在略低于系统的阈值处达到极小值.而且,有效本征值 λ_{eff} 低谷的数值随 τ 的增加而降低.从图2(b)可知,当 $a_0 < -35$ 时,强度相关时间 T_C 的数值随噪声关联时间 τ 的增加而减小;在 $a_0 > -35$ 时, T_C 随 τ 的增加而增加,在 $a_0 \approx 0$ 附近,也就是在系统的阈值附近达到极大值, T_C 的峰值随噪声关联时间 τ 的增加而增加.在 $a_0 > 20$ 的情况下, T_C 的数值几乎不随 τ 的改变而改变,也就是说,当 a_0 的数值很大时, T_C 接近饱和状态.从图2(a)和(b)可见,当分叉参量 $a_0 < -35$ 时, λ_{eff} 的数值随 τ 的增加而增大, T_C 的数值随 τ 的增加而减小,这表明,系统的涨落随噪声关联时间 τ 的增大而增强.当 $a_0 > -35$ 时, λ_{eff} 随 τ 的增加而减小, T_C 随 τ 的增加而增加,这表明,系统的涨落随 τ 的增大而受到抑制,在 $-10 < a_0 < 0$ 范围内,系统的涨落受到的抑制最强.

当 $\lambda = -0.5$ 时,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 随噪声关联时间 τ 的变化曲线如图2(c)和(d)所示.由图可见, λ_{eff} 和 T_C 的变化情况基本上与图2(a)和(b)相反,但曲线变化的幅度大大增加.从图2(c)和(d)可见,当分叉参量 $a_0 < -25$ 时, λ_{eff} 的数值随 τ 的增加而减小, T_C 的数值随 τ 的增加而增大,这表明,系统的涨落随噪声关联时间 τ 的增大而受到抑制.当 $a_0 > -25$ 时, λ_{eff} 随 τ 的增加而增大, T_C 随 τ 的增加而减小,这表明,系统的涨落随 τ 的增大而增强.在 $-10 < a_0 < 0$ 范围内,系统的涨落增强最大.

由图2可见,随着噪声关联时间 τ 的增加,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_C 的曲线随分叉参量 a_0 的变化变得更陡,而且噪声耦合强度 $\lambda < 0$ 时曲线变化的幅度要大于 $\lambda > 0$ 时的曲线.显然,耦合噪声的有色性对系统的涨落有着很大的影响.

4. 结 论

本文从理论上分析了加性噪声和乘性噪声之间的耦合是色噪声时的一维非线性系统的动力学行为,导出了定态概率分布函数 $Q_s(x)$,分析了噪声之间的关联时间 τ 从0增加到5.0时,有效本征值 λ_{eff}

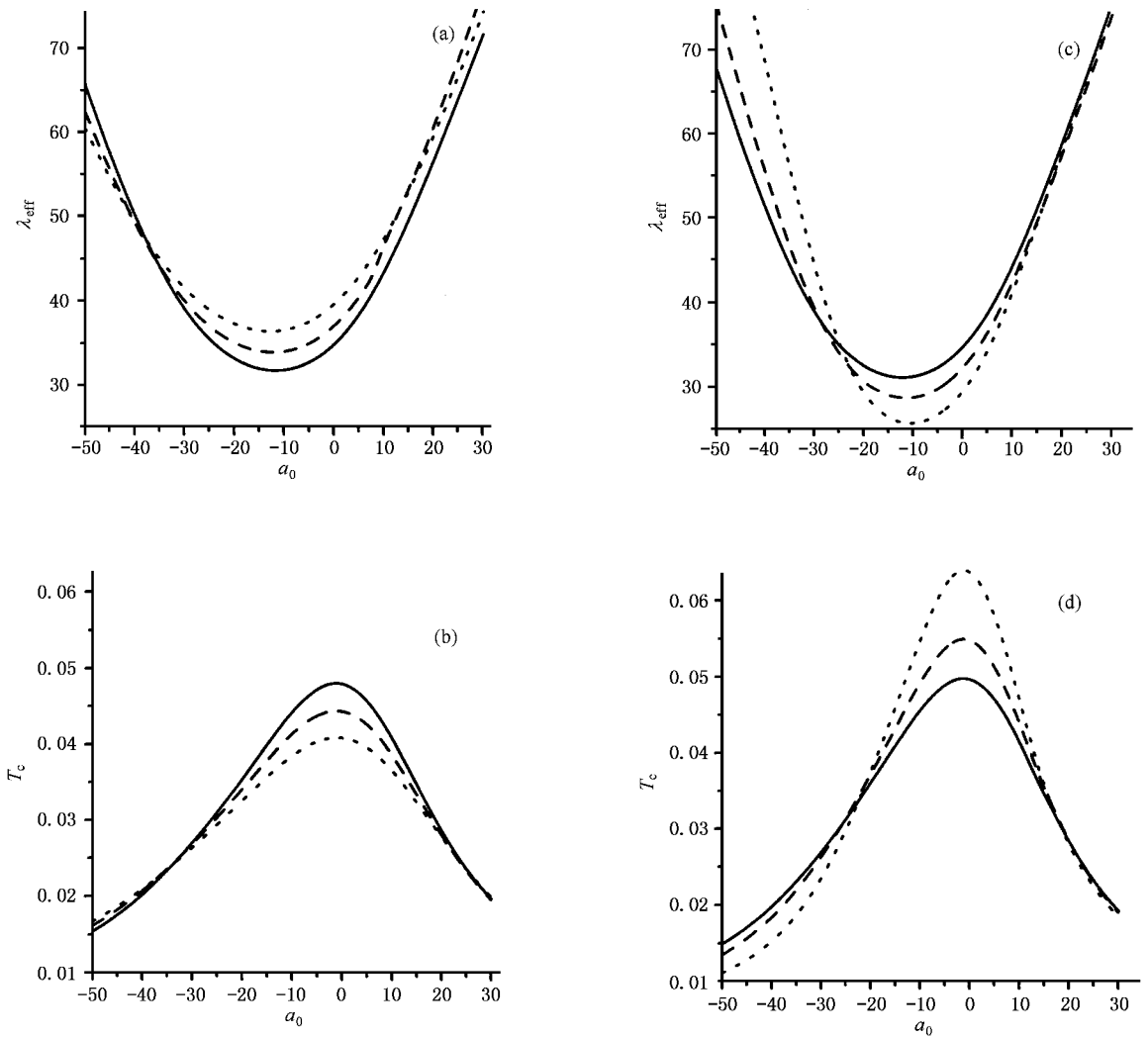


图 2 当噪声关联时间 τ 取不同值时,有效本征值 λ_{eff} 和强度相关时间 T_c 随参量 a_0 的变化

(所有参量是无量纲量, $P=2, P'=10, \dots$ 为 $\tau=0$; - - - 为 $\tau=0.5$; — 为 $\tau=5.0$ 。(a) (b) $\lambda=0.5$ (c) (d) $\lambda=-0.5$)

和强度相关时间 T_c 的变化情形,讨论了耦合噪声的有色性对 λ_{eff} 和 T_c 的影响.结果表明,噪声耦合强度 $|\lambda|$ 的增加能增强定态概率分布 $Q_s(x)$ 的非对称性,使得出现在 $Q_s(x)$ 中的双峰的高度产生明显的差异.噪声关联时间 τ 的增加则增强定态概率分布 $Q_s(x)$ 的对称性.当噪声之间是正耦合时, $\lambda > 0$, τ 的增加抑制了系统的涨落.当噪声之间是负耦合时, $\lambda < 0$, τ 的增加增强了系统的涨落.噪声耦合的有色

性对系统涨落的影响不仅同噪声之间耦合强度的正负有关,而且同分叉参量的大小有关.如果要抑制或者利用系统中的噪声,就要综合考虑这些因素的影响.在应用非线性系统中的混沌和利用混沌同步进行通讯时^[19-23]就应该考虑噪声和噪声的有色性对系统的影响.本文的这些结果可以为消除或者利用非线性系统中的色噪声提供理论依据.

[1] Fulinski A and Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
 [2] Zhu S 1993 *Phys. Rev. A* **47** 2405
 [3] Wang J and Zhu S 1995 *Phys. Lett. A* **207** 47
 [4] Gao W and Zhu S 1998 *Phys. Lett. A* **241** 67

[5] Liu Y W *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 198 (in Chinese) [刘要稳等 1999 物理学报 **48** 198]
 [6] Mei D, Xie G, Cao L and Wu D 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 174

- [7] Chen L , Fu H , Cao L and Wu D 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 180
- [8] Jia Y and Li J 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
- [9] Jia Y and Li J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 994
- [10] Mei D , Cheng L , Xie G , Cao L and Wu D 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 808
- [11] Li J and Huang Z 1997 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **6** 334
- [12] Li J and Huang Z 1997 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **6** 341
- [13] Jia Y , Yu S and Li J 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
- [14] Li J H *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese) [李静辉等 1998 物理学报 **47** 382]
- [15] Li J H and Huang Z 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 348
- [16] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House)
- [17] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation* (Berlin : Springer-Verlag)
- [18] Gradshteyn I S and Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals , Series and Products* (New York : Academic Press)
- [19] Zhang X *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 391 (in Chinese) [张旭等 1998 物理学报 **47** 391]
- [20] Gu C M and Shen K 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 732 (in Chinese) [顾春明等 1998 物理学报 **47** 732]
- [21] Huang X G *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) [黄显高等 1999 物理学报 **48** 1810]
- [22] Zhu S and Lü X 2000 *Chin. Phys.* **9** 337
- [23] Wang R *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1024 (in Chinese) [王荣等 2001 物理学报 **50** 1024]

Correlated colored noises in a nonlinear system *

Luo Xiao-Qin Zhu Shi-Qun

(Department of Physics , College of Sciences , Suzhou University , Suzhou 215006 , China)

(Received 1 July 2001 ; revised manuscript received 29 September 2001)

Abstract

The dynamical property of a nonlinear system is investigated when the coupling between additive and multiplicative noises is colored with a finite correlation time τ . The effective eigenvalue λ_{eff} and the intensity correlation time T_C of the system are derived for different noise correlation time τ . It is shown that the increase of noise correlation time τ can reduce the fluctuation in the system near the threshold when the noise coupling strength λ is positive. When λ is negative , the increase of τ can enhance the fluctuation in the system.

Keywords : coupling strength , noise correlation time , effective eigenvalue , intensity correlation time

PACC : 0540

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19874046).