第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/0994-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.5,May,2002

含时空关联噪声的非局域及各向异性 Kardar-Parisi-Zhang 方程的直接标度分析

唐 刚[1)2)] 马本堃[2)]

[1)] (中国矿业大学物理系,徐州 221008)

[2)] (北京师范大学物理系和理论物理研究所,北京 100875)

(2001 年 8 月 20 日收到;2001 年 10 月 11 日收到修改稿)

将直接标度分析方法推广应用到含时间空间关联噪声的非局域及各向异性 Kardar-Parisi-Zhang 方程的动力学标度分析中,分别得到了方程在强耦合区和弱耦合区的标度指数值.在弱耦合区得到的标度指数能与使用动力学重整化方法得到的结果相吻合.

关键词:表面生长,标度分析,KPZ 方程

PACC:0547,0250

1. 引 言

近年来,对表面界面动力学粗化过程的研究引起了人们的浓厚兴趣[1—3],这一方面是因为表面界面的粗化生长与许多实际的生长过程有着密切联系,如晶体生长、细菌边沿生长、分子束外延生长(MBE)等,另一方面表面的粗化生长过程也是非平衡现象中标度不变的一个典型例子,涉及到非平衡统计物理学中许多基本的问题,如标度、普适类等.

研究表明,表面界面动力学粗化过程具有非平庸的标度性质,其动力学标度性质可以由表面宽度(表面粗糙度)$W(L,t)$来表示,通常 $W(L,t)$满足如下标度形式[4]:

$$W(L,t) = L^{\chi} f(t/L^{z}), \tag{1}$$

式中,χ 和 z 分别是表面的粗糙度指数和动力学指数,它们能够完全表示出表面的标度行为(大空间尺度和长时间的渐进行为)和决定表面生长过程所属的普适类.标度函数 $f(u)$具有的渐进形式使得:当 $t \ll t_L = L^z$ 时,$W(L,t) \sim t^{\chi/z}$ 和当 $t \gg t_L$ 时,$W(L,t) \sim t^{\chi}$.确定生长过程的这两个标度指数成为表面生长动力学标度理论的重要任务.

在表面界面生长的动力学标度理论中,通过建立起描述生长过程的 Langevin 类型连续性动力学方程,然后使用解析或数值近似的方法对方程进行分析,以确定生长过程的标度性质和其所属的普适类是一种较为成功的方法[1—3].非线性的 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程[5]则是最重要和最著名的动力学方程之一.研究表明,KPZ 方程能正确地描述很多种局域生长模型的生长[1,2].但另一方面,KPZ 理论与实验观察结果的不尽相符又促使人们不断地提出新的理论模型,如在 KPZ 方程中考虑时空关联噪声[6]和满足守恒律的 Sun-Guo-Grant(SGG)方程等[7].需要指出的是,这些生长方程中的非线性项一般都是局域性质的.研究发现,在许多实际的生长过程中考虑非局域(或长程)相互作用是十分必要的[8,9],为此,Mukherji 和 Bhattacharjee[10]提出了含有非局域非线性项的 KPZ 方程,即非局域 KPZ 方程,并使用动力学重整化群(DRG)方法对方程进行了分析.结果证明,非局域非线性项的存在能产生新的重整化群固定点,并且与固定点相应的标度指数是随非线性参数连续变化的.随后,Jung 等人[11,12]提出了非局域的 SGG 方程并使用 DRG 方法研究了方程在具有守恒非关联噪声和守恒空间关联噪声情况下的标度性质,Chattopadhyay[13]则研究了空间关联噪声对非局域 KPZ 方程标度性质的影响.我们曾使用 DRG 方法研究了非局域的并含噪声的 Kuramoto-Sivashinsky(KS)方程和非局域 Lai-Das Sarma-Villain 方程的动力学标度性质[14,15].

为考虑生长基底各向异性对表面生长过程的影响,Wolf[16]提出了各向异性的 KPZ 方程,Jeong 等人[17]则使用 DRG 方法分析了空间关联噪声对各向

异性 KPZ 方程标度性质的影响.在文献[18]中,Jung 等人将非局域非线性项引入到各向异性的 KPZ 方程中,并使用 DRG 方法研究了含空间关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程标度性质.

此前,我们已将由 Hentschel 和 Family[19] 提出的直接标度分析方法推广应用到了非局域生长方程(如非局域 KPZ 方程和非局域 SGG 方程)的标度分析中,并得到了令人满意的结果[20,21].本文将把非局域及各向异性 KPZ 方程的噪声形式作进一步的推广,即考虑长时间空间关联噪声的情况,并使用直接标度分析方法对含时空关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程进行分析,分别得到了方程在强耦合区和弱耦合区的标度指数.结果发现,使用直接标度分析方法在弱耦合区得到的标度指数值能与相应的 DRG 分析结果很好地吻合;而在强耦合区得到标度指数则是使用 DRG 所无法得到的.

2. 含时空关联噪声的非局域及各向异性 Kardar-Parisi-Zhang 方程

标准的 KPZ 方程一般可以表示为[5]

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\nu\nabla^2 h(\boldsymbol{r},t)+\frac{\lambda}{2}(\nabla h(\boldsymbol{r},t))^2+\eta(\boldsymbol{r},t),\qquad(2)$$

式中,$h(\boldsymbol{r},t)$表示 t 时刻在基底r($r\in R^d$)处表面的生长高度,ν 为表面张力系数,λ 为非线性系数,非线性项表示表面沿侧向的生长,$\eta(\boldsymbol{r},t)$为噪声项,表示生长过程的随机性.表面的平均生长速度已从方程(2)中提出来,所以噪声的平均值为零,即$\langle\eta(\boldsymbol{r},t)\rangle=0$.在方程(2)中,噪声是取非相关的 Gaussian 白噪声,其满足

$$\langle\eta(\boldsymbol{r},t)\eta(\boldsymbol{r}',t')\rangle=2D\delta^d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\qquad(3)$$

其中,D 为噪声的幅度.

含时间空间关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程是标准 KPZ 方程的一种扩展形式,是在原来的 KPZ 方程中同时考虑了非局域相互作用和基底各向异性对表面界面生长过程的影响,并对噪声取长时空关联噪声而得来的.方程可以表示为

$$\frac{\partial h(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\nu_{/\!/}\nabla_{/\!/}^2 h(\boldsymbol{r},t)+\nu_{\perp}\nabla_{\perp}^2 h(\boldsymbol{r},t)+\eta(\boldsymbol{r},t)+\sum_{\Psi=/\!/,\perp}\int d\boldsymbol{r}'\frac{1}{2}\vartheta_{\Psi}(\boldsymbol{r}')\times\nabla_{\Psi}h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}',t)\cdot\nabla_{\Psi}h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t),\qquad(4)$$

式中,$\nabla_{\perp}$和$\nabla_{/\!/}$分别表示基底平面上沿垂直方向和沿平行方向的梯度,核函数 $\vartheta_{\Psi}(\boldsymbol{r})$具有局域(短程)部分 $\lambda_{0\Psi}\delta^d(\boldsymbol{r})$和非局域(长程)部分 $\lambda_{\rho\Psi}r^{\rho-d}$,在 Fourier 空间中核函数可以表示为 $\vartheta_{\Psi}(k)=\lambda_{0\Psi}+\lambda_{\rho\Psi}k^{-\rho}$,其中 $\Psi=\perp$和$/\!/$.长时空关联噪声满足

$$\langle\eta(\boldsymbol{r},t)\eta(\boldsymbol{r}',t')\rangle=D\cdot|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{(2\sigma-d)}\times|t-t'|^{(2\theta-1)}.\qquad(5)$$

式中,参数 σ 和θ 分别表示噪声时空相关函数的衰减[6].长时空关联噪声是一种较为普遍的噪声形式,当 $\sigma=\theta=0$ 时,就是非相关的 Gaussian 白噪声.这里的各向异性是指 $\gamma_{\nu}\equiv\nu_{/\!/}/\nu_{\perp}\neq1$,$\gamma_{0\lambda}\equiv\lambda_{0/\!/}/\lambda_{0\perp}\neq1$,和 $\gamma_{\rho\lambda}\equiv\lambda_{\rho/\!/}/\lambda_{\rho\perp}\neq1$[10,18].分析表明,当 $\nu_{/\!/}$ 和 $\nu_{\perp}$ 同时取正值时,方程是稳定的.此外,当两个方向上的 λ 系数正负号相同时,在临界维以下($d<d_c$),方程存在一个与各向异性相关的非局域 KPZ 固定点,而当两个方向上的 λ 正负号相异时,方程的标度性质与各向异性无关,而是具有与非局域各向同性 KPZ 方程相同的标度性质[18].对非局域生长方程的标度分析实际上只需分别对两种极限情况下来进行讨论,即局域极限情况和非局域极限情况[10—13,20,21].在局域极限情况下,$\lambda_{0\Psi}\neq0$,$|\lambda_{\rho\Psi}/\lambda_{0\Psi}|\ll1$,而在非局域极限情况下,$\lambda_{\rho\Psi}\neq0$,$|\lambda_{0\Psi}/\lambda_{\rho\Psi}|\ll1$.很显然,非局域的生长方程能很自然地回到其相应的局域生长方程.

3. 直接标度分析

基于微扰展开计算的 DRG 是目前分析 Langevin 类型生长方程标度行为最常用的解析近似方法,但这种方法存在着一定的局限性.生长过程中存在的强耦合奇异发散性是通常的 DRG 分析所不能有效处理的,众多基于 DRG 的工作都已说明了这一点[1—4].由 Hentschel 和 Family[19] 提出的直接标度分析的方法在本质上与 Kolmogorov 讨论完全发达湍流时所使用的标度分析方法很类似,它是基于 Langevin 类型方程与受驱 Navier-Stokes 方程相类似而提出来的,其基本的物理假设是:任何像 KPZ 这样的 Langevin 类型方程当呈现标度行为时,方程中的各项(包括噪声)在一定线度上作粗粒化平均以后,必须具有相同的幅度等级或者可以忽略,只有在这样的条件下,标度行为才能够出现,而相应的标度区域可以通过自洽的方法得到.使用这种方法能很方便

地求出生长方程在不同标度区域内的标度指数值[19—21]. 下面我们将使用直接标度分析的方法推导出含时空关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程在不同区域内的标度指数,并将得到的结果与使用 DRG 方法所得到的相应结果进行比较.

假定 l 是在平行方向上的某一特定长度标度,即 $l = l_{/\!/}$, $l_\perp = l^\xi$ 是在垂直方向上相应的长度标度,其中 ξ 为空间各向异性参数. 根据文献[19],假定在一个很长的时间 $t \gg t_l$ 和在长度标度 l 上作平均后,典型的表面生长高度的涨落幅值可以估计为 $\langle [h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l},t)-h(\boldsymbol{r},t)]^2\rangle_l \sim h_l^2$. 在足够长时间,这些涨落持续的时间数量级是 t_l. 于是,除噪声外,方程(4) 中的各项可分别估计为 $\langle | \partial h/\partial t |\rangle_l \sim h_l/t_l$, $\langle \nu\Psi | \nabla_\Psi^2 h |\rangle_l \sim \nu_\Psi h_l/l_\Psi^2$, (非线性项的局域部分) $(\lambda_{0\Psi}/2)\langle | (\nabla_\Psi h)^2 |\rangle_l \sim \lambda_{0\Psi} h_l^2/l_\Psi^2$ (非线性项的非局域部分), $(\lambda_{\rho\Psi}/2)\langle | \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}' r'^{(\rho-d)} \nabla_\Psi h(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}',t) \cdot \nabla_\Psi h(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r},t) |\rangle_l \sim \lambda_{\rho\Psi} h_l^2 l_\psi^{\rho-2}$. 计算表明,这里对非局域非线性项的估计是完全正确的,基于这种估计所进行的计算均得出了正确的结果[20,21],至于噪声项,在强耦合区和弱耦合区内,则可分别估计为 $\eta_l \sim (Dt_l^{2\theta-1}/h_l^{d-2\sigma})^{1/2}$ (对应于粗糙表面) 和 $\eta_l \sim (Dt_l^{2\theta-1}/ll_\perp^{d-2\sigma-1})^{1/2}$ (对应于平滑表面)[19—21].

在足够大的空间标度内,方程(4)中的非线性项将在生长过程中完全处于支配地位,因而,由表面张力所引起的扩散项可以略去[19].

这里首先考虑局域极限的情况,在弱耦合区域有

$$h_l/t_l \sim \lambda_{0/\!/} h_l^2/l^2 \sim \lambda_{0\perp} h_l^2/l_\perp^2 \sim (Dt_l^{2\theta-1}/ll_\perp^{d-2\sigma-1})^{1/2}. \tag{6}$$

因为 $h_l \sim l^\chi$, $t_l \sim l^z$ $l_\perp \sim l^\xi$,所以有

$$\begin{aligned}\chi - z &= 2\chi - 2 = 2\chi - 2\xi \\ &= [(2\theta-1)z - (d-2\sigma-1)\xi - 1]/2.\end{aligned} \tag{7}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\chi &= [2(2\theta+1) - (d-2\sigma)]/(2\theta+3), \\ z &= (4+d-2\sigma)/(2\theta+3), \xi = 1.\end{aligned} \tag{8}$$

式中的 χ 和 z 即是在局域极限情况下,在弱耦合区得到的方程的标度指数值.

由(6)式得出的 h_l, t_l 和 $l_\perp$ 分别为

$$\begin{aligned}h_l &\sim (D/\lambda_{0/\!/}^{2\theta+1})^{1/(2\theta+3)} l^{[2(2\theta+1)-(d-2\sigma)]/(2\theta+3)}, \\ t_l &\sim (D\lambda_{0/\!/}^2)^{-1/(2\theta+3)} l^{[4+(d-2\sigma)]/(2\theta+3)}, \\ l_\perp &\sim (\lambda_{0\perp}/\lambda_{0/\!/})^{1/2},\end{aligned} \tag{9}$$

而在局域极限情况下的强耦合区则有

$$h_l/t_l \sim \lambda_{0/\!/} h_l^2/l^2 \sim \lambda_{0\perp} h_l^2/l_\perp^2 \sim (Dt_l^{2\theta-1}/h_l^{d-2\sigma})^{1/2}. \tag{10}$$

由(10)式可以得到

$$\begin{aligned}\chi &= 2(2\theta+1)/(2\theta+3+d-2\sigma), \\ z &= 2(2+d-2\sigma)/(2\theta+3+d-2\sigma), \xi = 1\end{aligned} \tag{11}$$

和

$$\begin{aligned}h_l &\sim (D/\lambda_{0/\!/}^{2\theta+1})^{1/(2\theta+3+d-2\sigma)} l^{2(2\theta+1)/(2\theta+3+d-2\sigma)}, \\ t_l &\sim (D\lambda_{0/\!/}^{2+d-2\sigma})^{-1/(2\theta+3+d-2\sigma)} l^{2(2+d-2\sigma)/(2\theta+3+d-2\sigma)}, \\ l_\perp &\sim (\lambda_{0\perp}/\lambda_{0/\!/})^{1/2}.\end{aligned} \tag{12}$$

可以看出,在(8)式和(11)式中的标度指数所均满足标度指数恒等式

$$\chi + z = 2. \tag{13}$$

在非局域极限情况下的弱耦合区有

$$h_l/t_l \sim \lambda_{\rho/\!/} h_l^2 l^{\rho-2} \sim \lambda_{\rho\perp} h_l^2 l_\perp^{\rho-2} \sim [Dt_l^{2\theta-1}/ll_\perp^{d-2\sigma-1}]^{1/2}, \tag{14}$$

由此得出

$$\begin{aligned}\chi &= [(2\theta+1)(2-\rho) - (d-2\sigma)]/(2\theta+3), \\ z &= [2(2-\rho) + (d-2\sigma)]/(2\theta+3), \\ \xi &= 1\end{aligned} \tag{15}$$

和

$$\begin{aligned}h_l &\sim (D/\lambda_{\rho/\!/}^{2\theta+1})^{1/(2\theta+3)} l^{[(2-\rho)(2\theta+1)-(d-2\sigma)]/(2\theta+3)}, \\ t_l &\sim (D\lambda_{\rho/\!/}^2)^{-1/(2\theta+3)} l^{[2(2-\rho)+(d-2\sigma)]/(2\theta+3)}, \\ l_\perp &\sim (\lambda_{\rho\perp}/\lambda_{\rho/\!/})^{1/(2-\rho)}.\end{aligned} \tag{16}$$

在非局域极限情况下的强耦合区则有

$$h_l/t_l \sim \lambda_{\rho/\!/} h_l^2 l^{\rho-2} \sim \lambda_{\rho\perp} h_l^2 l_\perp^{\rho-2} \sim [Dt_l^{2\theta-1}/h_l^{d-2\sigma}]^{1/2}, \tag{17}$$

结果得到

$$\begin{aligned}\chi &= (2-\rho)(2\theta+1)/(2\theta+3+d-2\sigma), \\ z &= (2-\rho)(2+d-2\sigma)/(2\theta+3+d-2\sigma), \\ \xi &= 1\end{aligned} \tag{18}$$

和

$$\begin{aligned}h_l &\sim (D/\lambda_{\rho/\!/}^{2\theta+1})^{1/(2\theta+3+d-2\sigma)} l^{(2-\rho)(2\theta+1)/(2\theta+3+d-2\sigma)}, \\ t_l &\sim (D\lambda_{\rho/\!/}^{2+d-2\sigma})^{-1/(2\theta+3+d-2\sigma)} l^{(2-\rho)(2+d-2\sigma)/(2\theta+3+d-2\sigma)}, \\ l_\perp &\sim (\lambda_{\rho\perp}/\lambda_{\rho/\!/})^{1/(2-\rho)}.\end{aligned} \tag{19}$$

容易看出,(15)式和(18)式中的标度指数所均满足的标度指数恒等式为

$$\chi + z = 2 - \rho. \tag{20}$$

就我们所知,目前还没有使用 DRG 方法对含时空关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程进行分析的报道,使用 DRG 方法处理含时间关联噪声方程

是十分复杂的[16].文献[18]中给出的是使用 DRG 方法对含空间关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程进行分析的结果.但如果令 $\theta = 1$,即只考虑空间关联噪声的情况,则无论是在局域极限情况下还是在非局域极限情况下,我们上面在弱耦合区得到的结果都能与文献[18]中的结果吻合得很好,这里所得到的是在弱耦合区内更一般的结果.

4. 结　　论

本文使用直接标度分析的方法研究了含时空关联噪声的非局域及各向异性 KPZ 方程的标度性质,在局域和非局域两种极限情况下,分别得到了方程在强耦合和弱耦合区域内的标度指数.可以发现,用直接标度分析方法在弱耦合区域得到的标度指数值能与使用 DRG 方法所得到的结果很好地吻合,而在强耦合区域得到的结果是使用 DRG 分析方法所没有得到的.其原因是基于微扰展开计算的 DRG 理论仅适用于弱耦合的情况.我们这里的计算表明,直接标度分析方法不仅适用于局域各向同性生长方程的标度分析而且也适用于非局域及各向异性生长方程的分析.应该讲,在得到方程的动力学标度指数方面,直接标度分析方法不失为是一种简单有效的方法.但也应当指出的是,使用直接标度分析的方法并不能像 DRG 方法那样能对方程进行一些必要的讨论,如方程的稳定性,对应的相变等[6,11,12,18],此外,和使用 DRG 方法一样,本文所得到的标度指数也仅适合于空间各向异性参数 $\xi = 1$ 的情况[13,18].

[1] Halpin-Healy T and Zhang Y C 1995 *Phys*. *Rep*. **254** 215

[2] Krug J 1997 *Adv*. *Phys*. **46** 139

[3] Barabasi A L and Stanley H E 1995 *Fractal Concepts in Surface Growth*(Cambridge:Cambridge University)

[4] Family F and Vicsek T 1985 *J*. *Phys*. A **18** L75

[5] Kardar M, Parisi G and Zhang Y C 1986 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **56** 889

[6] Medina E, Hwa T and Kardar M 1989 *Phys*. *Rev*. A **39** 3053

[7] Sun T, Guo H and Grant M 1989 *Phys*. *Rev*. A **40** 6763

[8] Lei X Y, Wan P, Zhou C H and Ming N B 1996 *Phys*. *Rev*. E **54** 5298

[9] Wojtaszczyk P, Mann E K, Senger B, Voegel J C and Schaaf P 1995 *J*. *Chem*. *Phys*. **103** 8285

[10] Mukherji S and Bhattacharjee S M 1997 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **79** 2052

[11] Jung Y K, Kim I M and Kim J M 1998 *Phys*. *Rev*. E **58** 5467

[12] Jung Y K and Kim I M 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 2949

[13] Chattopadhyay A K 1999 *Phys*. *Rev*. E **60** 293

[14] Tang G and Ma B K 2001 *Phys*. *Rev*. E **63** 021106

[15] Tang G and Ma B K 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 851(in Chinese)[唐刚、马本堃 2001 物理学报 **50** 851]

[16] Wolf D E 1991 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **67** 1783

[17] Jeong H, Kahng B and Kim D 1995 *Phys*. *Rev*. E **52** R1292

[18] Jung Y, Park K, Kim H J and Kim I M 2000 *Phys*. *Rev*. E **62** 1893

[19] Hentschel H G E and Family F 1991 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **66** 1982

[20] Tang G and Ma B K 2001 *Physica* A **298** 257

[21] Tang G and Ma B K 2001 *Int*. *J*. *Mod*. *Phys*. B **15** (in Press)

Scaling analysis of the anisotropic nonlocal Kardar-Parisi-Zhang equation with spatially and temporally correlated noise

Tang Gang[1)2)] Ma Ben-Kun[2)]
[1)] (*Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221008, *China*)
[2)] (*Department of Physics and Institute of Theoretical Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)
(Received 20 August 2001; revised manuscript received 11 October 2001)

Abstract

The scaling properties of the anisotropic nonlocal Kardar-Parisi-Zhang equation are studied by using scaling analysis method. The scaling exponents in both the weak-and strong-coupling regions are obtained. The exponents obtained in the weak-coupling region can well match the results of the dynamic renormalization-group analysis.

Keywords: surface growth, scaling analysis, the KPZ equation
PACC: 0547, 0250