第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/1022-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.5,May,2002

等离子体密度对多光子电离的影响*

顾震宇 季沛勇

(上海大学物理系,上海 200436)

(2001 年 3 月 31 日收到;2001 年 9 月 28 日收到修改稿)

利用"光学度规"的方法研究了等离子体中的多光子电离,获得了"弯曲时空"中的量子 Volkov 态.应用量子电动力学的形式散射理论得出了多光子电离的散射截面.阐述了等离子体密度对发生在其中的多光子电离的"抑制"作用.

关键词:多光子电离,激光等离子体

PACC:3280K

1. 引 言

近年来,随着超短、超高功率的强激光和低压气体靶在实验中的应用,人们对强场与物质相互作用研究再一次的升温.特别是,强电磁场中原子的多光子电离现象的研究受到广泛关注.但在研究中,往往只注意了场强对它的影响,而忽视了介质背景密度对它的影响.本文将对这一问题进行初步的探讨.

多光子电离,即原子通过吸收多个光子产生电离的现象,又称为阈上电离.在经典力学中,该问题获得了初步的讨论.随后 Keldysh[1],Faisal[2] 和 Reiss[3] 发展了一套半经典的理论方法(KFR 近似),将多光子电离中电子的末态视为 Volkov 波函数(自由电子在平面波电磁场中的含时薛定谔方程的解).虽然它可以解释一些实验现象,但由于 KFR 近似中光子和电子并没有被视为一个真正闭合系统中的粒子,散射理论的应用比较勉强.1988 年 Guo 等人[4,5] 通过求解一个在量子化的、椭圆极化的、单色电磁场中的电子的狄拉克方程,获得了一套完备的、量子化的 Volkov 波函数.保证了可以将多光子电离视为散射过程,能量守恒被很好的包括了进去,量子电动力学的形式散射理论也可以应用了.

但我们发现上述的几个方法都存在一个共同的不足,他们所采用的都是单电子模型,而在实验中所采用的却是可以视为等离子体背景的气体靶.为了解决这个问题,我们引入"光学度规[6—9]"的方法.我们知道,当光线在经过等离子体的时候会发生弯曲,犹如"时空"是弯曲的,发生在其中的光学现象就可以用"光学度规"来描述.

本文将借助"光学度规"的方法来描述电子所处的背离激光等离子体,应用量子电动力学的形式散射理论来处理多光子电离,从而可以将多光子电离的理论进一步完善和发展.

2. 光学度规

"弯曲时空"是指电子所处的背景激光等离子体;"弯曲时空"中的狄拉克方程的形式为

$$[\underset{\sim}{\gamma}^{\mu}(\partial_{\mu}+\mathrm{i}eA_{\mu}-\Gamma_{\mu})+\mathrm{i}m]\psi(x)=0, \quad (1)$$

其中,$\Gamma_{\mu}=-\frac{1}{4}\underset{\sim}{\gamma}^{\lambda}[\underset{\sim}{\gamma}_{\lambda,\mu}-\underset{\sim}{\gamma}_{\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}]$,$\Gamma_{\mu}$ 为旋量仿射联络,$\underset{\sim}{\gamma}^{\mu}$ 为"弯曲时空"的狄拉克矩阵.A_{μ} 为激光场的 4 维矢势,

$$A_{\mu}=g[\varepsilon_{\mu}a\exp(-\mathrm{i}kx)+\varepsilon^{*}_{\mu}a^{+}\exp(\mathrm{i}kx)],$$

其中 $g=(2\omega V_{\gamma})^{-1/2}$,$V_{\gamma}$ 为光子模的归一化体积,a 和 a^{+} 分别是它的消灭和产生算符,极化矢 $\varepsilon_{\mu}=(0,\varepsilon)$,$\varepsilon=\varepsilon_x\cos(\xi/2)+\mathrm{i}\varepsilon_y\sin(\xi/2)$,$\varepsilon_z$ 是在波矢 k 传播的方向上.$\xi=\pi/2$ 表示圆极化,$\xi=0$ 为线性极化.考虑静态等离子体的情形,其光学度规为

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1/\varepsilon_{\mathrm{p}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}, \quad (2)$$

* 上海市自然科学基金(批准号:00ZA14015)和上海市教委重点学科建设基金资助的课题.

其中等离子体介质系数 $\varepsilon_p = 1 - n/n_c$，$n$ 为等离子体数密度，$n_c = m\omega^2/4\pi e^2$ 为等离子体临界密度，e 和 m 为电子的电荷和质量，ω 为激光频率. 在这里，考虑均匀等离子体，即 ε_p 与空间坐标无关.

利用对易关系

$$\underset{\sim}{\gamma}^{\mu}\underset{\sim}{\gamma}^{\nu} + \underset{\sim}{\gamma}^{\nu}\underset{\sim}{\gamma}^{\mu} = 2g^{\mu\gamma}, \qquad (3a)$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\gamma}, \qquad (3b)$$

我们得到

$$\underset{\sim}{\gamma}^{0} = \varepsilon_p^{\frac{1}{2}}\gamma^0, \underset{\sim}{\gamma}^{1} = \gamma^1, \underset{\sim}{\gamma}^{2} = \gamma^2, \underset{\sim}{\gamma}^{3} = \gamma, \qquad (4)$$

其中

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

γ^{μ} 为平坦时空的狄拉克矩阵. 由仿射联络公式

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\rho\nu}[g_{\rho\lambda,\mu} + g_{\rho\mu,\lambda} - g_{\lambda\mu,\rho}],$$

其中 $g_{\rho\lambda,\mu}$ 是普通微分. 由于 ε_p 与空间坐标无关，经过计算，旋量仿射联络 Γ_μ 无非零量. 因此，方程(1)可以改写为

$$[\underset{\sim}{\gamma}^{\mu}(\partial_\mu + ieA_\mu) + im]\psi(x) = 0. \qquad (5)$$

根据 Guo[4,5] 求解平坦时空下 Volkov 态的技巧，解方程(5)，也可以求得‘弯曲时空’下的 Volkov 态. 在这里，两个 4 矢的标积定义为 $ab = g_{\mu\nu}a^{\mu}b^{\nu}$，$\gamma a$ 表示为 $\not a$. 要注意的是 $g_{\mu\nu}$ 就是‘弯曲时空’下的光学度规方程(2). 方程(5)的解是

$$\Psi_{pn_cs} = \exp[-iPx - iC_{n_cs}kx + ikxN_a][1 + e(\not k\not A/2kP)]D_P^{+}\hat{P}(\not S + s)\nu|n_c\rangle, \qquad (6)$$

其中 k 代表(ω, k)，$\hat{P} = (\not P + m_e)\not k/2kP$ 是投影算符，$\not S = \frac{1}{2}[\not\varepsilon^*, \not\varepsilon]$ 是含极化的自旋算符，本征值为 $s = \pm\sin\xi$. $\hat{P}(\not S + s)\nu$ 描述双旋量，

$$C_{n_cs} = (kP)^{-1}\left[C\left(n_c + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}e^2g^2s - e^2g^2C^{-1}(p\varepsilon_c)(p\varepsilon_c^*)\right], \qquad (7)$$

其中 $C = [(kP + e^2g^2)^2 - e^4g^4\cos^2\xi]^{1/2}$.

3. 散射理论

根据量子电动力学的形式散射理论，多光子电离的散射矩阵可写为

$$S_{fi} = \langle\Psi_f^{(-)}|\Phi_i\rangle, \qquad (8)$$

其中 i 和 f 分别表示初、末态，Φ_i 为束缚电子的定态波函数，散射态波函数 $\Psi_f^{(-)}$ 表示为

$$\Psi_f^{(-)} = \Psi_f - \frac{1}{E_f - H - i\varepsilon}V\Psi_f. \qquad (9)$$

根据 KFR 近似，在方程(7)中用‘弯曲时空’的 Volkov 波函数 Ψ_{pn_cs} 来替代 Ψ_f，得到

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i\langle\Psi_{pn_cs}|V|\Phi_i, l\rangle, \qquad (10)$$

其中$|\Phi_i, l\rangle = \Phi_i\otimes|l\rangle$，$|l\rangle$是光子态.

从左手边用 $\underset{\sim}{\gamma}^{0}$ 乘方程(5)，得到‘弯曲时空’下的光子电子相互作用算符：

$$V = -(1/\varepsilon_p)^{1/2}e\gamma^0\gamma^iA_i, \qquad (11a)$$

其中，$A_\mu = g(\varepsilon_\mu a + \varepsilon_\mu^* a^+)$，$(i = 1, 2, 3)$. 注意到 $\varepsilon_\mu = (0, \varepsilon)$ 方程(11a)可改写为

$$V = -(1/\varepsilon_p)^{\frac{1}{2}}eg\gamma^0[\not\varepsilon_\mu a + \not\varepsilon_\mu^* a^+]. \qquad (11b)$$

把方程(11b)代入方程(10)，得到

$$(S - 1)^*_{fi} = i\int d^4x\Phi_i\langle l|(1/\varepsilon_p)^{\frac{1}{2}}eg\gamma^0[\not\varepsilon_\mu a + \not\varepsilon_\mu^* a^+]|\Psi_{pn_cs}\rangle. \qquad (12)$$

先计算 $X = \langle l|(1/\varepsilon_p)^{\frac{1}{2}}eg\gamma^0[\not\varepsilon_\mu a + \not\varepsilon_\mu^* a^+]|\Psi_{pn_cs}\rangle$，结果是

$$\begin{aligned} X = & -\exp[-iPx + i(l + 1/2 - C_{n_cs})kx]\varepsilon_p^{-\frac{1}{2}} \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty}\{[eg[(l+1)^{\frac{1}{2}}(\gamma_0\not\varepsilon)D^{+}_{l+1,m} \\ & + l^{\frac{1}{2}}(\gamma_0\not\varepsilon^*)D^{+}_{l-1,m}] + (e^2g^2/2kp)(\gamma_0\not k) \\ & \times \{[\not\varepsilon\not\varepsilon^* l + \not\varepsilon^*\not\varepsilon(l+1)]D^{+}_{l,m} - \cos\xi \\ & \times \{[(l+1)(l+2)]^{\frac{1}{2}}D^{+}_{l+2.m} + [l(l \\ & - 1)]^{\frac{1}{2}}D^{+}_{l-2.m}\}\}]\langle m|n_c\rangle\hat{P}(\not S + s)\nu, \end{aligned} \qquad (13)$$

其中 $|m\rangle$ 是 N'_a 表象下的光子态，

$$D^{+}_{l',m} = \langle l'|\exp(\delta_a a^+ - \delta_a^* a)|m\rangle$$

是矩阵元，有

$$\delta_a = -egP[\varepsilon^*\cosh(2\chi) + \varepsilon\sinh(2\chi)]/C.$$

考虑到 $g_{00} = 1/\varepsilon_p$，以及关系式

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x),$$

方程(12)对时间积分可得到 δ 函数：

$$\varepsilon_p 2\pi\delta\left[E_i - E + \left(l + \frac{1}{2}\right)\omega - C_{n_cs}\omega\right]. \qquad (14)$$

在强场条件下，$g\sqrt{l}\omega$ 是经典场的场强. 如果设 $l\to\infty$，就可以完成从量子机制到经典的转换. 利用傅里叶变换 $\Phi_i(p)=\int \mathrm{d}r^3\Phi_i(r)\exp(-\mathrm{i}p\cdot r)$ 和下列(15)，(16)式：

$$\lim_{\substack{l\to\infty\\ m\to\infty}} D_{l,m}^{+}=\sum_{q=-\infty}^{+\infty}(-1)^q\delta_{q,l-m}J_p(\zeta)\exp(-\mathrm{i}q\phi_\xi),\tag{15}$$

$J_q(\xi)$ 第一类整数贝塞尔函数，

$$J_q(\xi)=(\xi/2)^q\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\xi/2)^{2k}}{(k+q)!k!}(-1)^k,$$

$\zeta=\dfrac{2|e|\Lambda}{kP}|P\cdot\varepsilon|$，$\phi_\xi=\tan^{-1}[(P_y/P_x)\tan(\xi/2)]$，$P_x$ 和 P_y 分别是 $P=(E,P)$ 在 ε_x 和 ε_y 方向上的分量.

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\langle m|n_c\rangle=\sum_{t=-\infty}^{+\infty}J_t(\eta)\delta_{2t,n-m},\tag{16}$$

其中 $\eta=(Z/2)\cos\xi$，$Z=e^2\Lambda^2/kP$，$Z\omega$ 为光子的有质(ponderomotive)动力. 计算得到

$$\begin{aligned}(S-1)_{fi}&=\varepsilon_p^{1/2}2\pi\mathrm{i}\chi_s^{+}e\Lambda(\tilde J_{j-1}\exp[\mathrm{i}(j-1)\phi_\xi]\gamma_0\not\varepsilon\\&\quad+\tilde J_{j+1}\exp[\mathrm{i}(j+1)\phi_\xi\gamma_0\not\varepsilon^{*}-(Z/e\Lambda)\\&\quad\times[\tilde J_j\exp(\mathrm{i}j\phi_\xi)+(\cos\xi/2)\{\tilde J_{j+2}\\&\quad\times\exp[\mathrm{i}(j+2)\phi_\xi]+\tilde J_{j-2}\exp[\mathrm{i}(j-2)\\&\quad\times\phi_\xi]\}]\gamma^0\not k)\Phi_i(P-jk+Zk)\\&\quad\times\delta(E_i-E+j\omega-Z\omega),\end{aligned}\tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde J_j&=\tilde J_j(\zeta,\eta,\phi_\xi)\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{-j-2m}(\zeta)J_m(\eta)\exp(2\mathrm{i}m\phi_\xi),\end{aligned}$$

$j=l-n$ 是初末态光子数的差. 在非相对论限制和长波近似条件下，结果是

$$\begin{aligned}(S-1)_{fi}^{nr}&=\varepsilon_p^{1/2}2\pi\mathrm{i}\omega(j-Z)J_j(\zeta,\eta,\phi_\xi)\exp(\mathrm{i}j\phi_\xi)\\&\quad\times\phi_i(P)\delta(E-E_i-j\omega+Z\omega),\end{aligned}\tag{18}$$

其跃迁概率(电离率)为

$$W=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|(S-1)_{fi}^{nr}|^2P^2\mathrm{d}|P|\mathrm{d}\Omega,$$

它的微分形式是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}&=\int_0^{\infty}|(S-1)_{fi}^{nr}|^2\frac{P^2\mathrm{d}|P|}{(2\pi)^3}\\&=\varepsilon_p\frac{(2m^3\omega^5)^{1/2}}{(2\pi)^2}(j-Z)^2(j-Z\\&\quad-E_{\mathrm{B}}/\omega)^{1/2}|\phi_i(P)|^2\\&\quad\times|J_j(\zeta,\eta,\phi_\xi)|^2.\end{aligned}\tag{19}$$

4. 结果分析讨论

1. 当 $\varepsilon_p=1-n/n_c=1$，即 $n=0$ 时，表示不考虑等离子体背景. 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}&=\frac{(2m^3\omega^5)^{1/2}}{(2\pi)^2}(j-Z)^2(j-Z-E_{\mathrm{B}}/\omega)^{1/2}\\&\quad\times|\phi_i(P)|^2|J_j(\zeta,\eta,\phi_\xi)|^2,\end{aligned}\tag{20}$$

显然，该结果同 Reiss[3]，Guo[4] 的结果相符合，表述了单电子模型.

2. 当 $\varepsilon_p=1-n/n_c=0$，即 $n=n_c$ 时，由方程(19)得到

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega}=0.\tag{21}$$

该结果表明多光子电离现象无法被观测到，同事实相符. $n=n_c$ 表明等离子体数密度达到了临界密度，由物理上可知，光线在临界密度处被截止，从而多光子电离现象也被完全抑制了.

3. 当 $0<n<n_c$ 即 $0<\varepsilon_p<1$ 时，结果就是方程(19). 很明显，介质密度对电离率有很大的影响. 密度越大，电离率越小；反之亦然. 这就表示等离子体对发生在其中的多光子电离存在‘抑制’作用，这也是为什么在多光子电离实验中通常都要使用低压气体靶的一个原因.

本文利用强激光等离子体的‘光学度规’和量子电动力学的散射理论，考虑了介质密度对发生在介质中的物理过程的影响，也就是等离子体密度对发生在其中的多光子电离的影响，获得了等离子体介质对电离有‘抑制作用’的结果. 我们还可以将这一方法推广到其他的多光子过程——谐波产生、激光辅助复合(LAR)等现象中去.

[1] Keldysh L V 1965 *Sov. Phys. JETP* **20** 1307

[2] Faisal F H M 1973 *J. Phys.* B **6** L89

[3] Reiss H R 1980 *Phys. Rev.* A **22** 1786

[4] Guo D S and Aberg T 1988 *J. Phys.* A **21** 4577

[5] Guo D S, Aberg T and Crasemann B 1989 *Phys. Rev.* A **40** 4997

[6] Zhu S T and Shen W D 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1438 (in Chinese)

[朱莳通、沈文达 1993 **物理学报 42** 1438]
[7] Ji P Y and Bao J S 2001 *Chin Phys*. **10** 314
[8] Leonhardt U and Piwnicki P 1999 *Phys*. *Rev*. A **60** 4301
[8] Lai G J and Ji P Y 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 2399(in Chinese)[**赖国俊、季沛勇** 2000 **物理学报 49** 2399]

Effects of background plasma density on multi-photon ionization *

Gu Zhen-Yu Ji Pei-Yong
(*Department of Physics*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200436, *China*)
(Received 31 March 2001; revised manuscript received 28 September 2001)

Abstract

Multi-photon ionization (MPI) in plasma which is examined in terms of optical metric and the quantum Volkov state in curved space-time is derived. The cross section of MPI is derived by virtur of the corrected Volkov state within the framework of quantum electrodynamics formal scattering theory. It shows that the plasma medium acts as a" suppression "on MPI.

Keywords: MPI, plasma
PACC: 3280K

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanghai, China(Grant No. 00ZA14015) and the Research Foundation for Key Project, Shanghai Commission of Education, China.