第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/1054-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.5, May, 2002

用 Riccati 变换求解同调谐振子*

余守宪

(北方交通大学物理系, 北京 100044)

(2001 年 7 月 31 日收到; 2001 年 9 月 18 日收到修改稿)

利用 Riccati 变换求解同谐谐振子的定态薛定谔方程, 求得了能谱及态函数.

关键词: 同调谐振子, 本征值谱, Riccati 变换法
PACC: 4250, 0365

1. 引 言

文献[1]利用赝角动量方法研究了同调谐振子方程

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x^2+\frac{g}{x^2}\right)\psi(x)=E\psi(x). \quad (1)$$

束缚态的严格解, 给出能谱对同调参量 g 的依赖关系. 能级结构如图 1 所示.

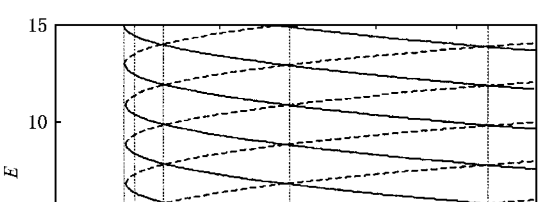

图 1 g 与 E 的关系

文献[2]采用因式分解方法由移动算符得到了广义产生算符和广义湮没算符, 求得了方程(1)的能谱和态函数, 并讨论了能谱保持不变情况下寻找新的势函数的问题; 给出同调谐振子的严格解. 文献[3]很早就研究过这个问题, 文献[4]进一步研究了这个问题, 得到的结果与文献[2]不同. 而文献[5—9]则采用文献[2]的结果讨论广义相干态、广义压缩态、反聚束效应和有关的量子统计等非经典光场的一些特性. 上述文献对本征值的确切性有不同的意见. 文献[1]澄清了上述的不同意见, 指出 $g \geqslant -1/4$, 从而支持了文献[3].

鉴于本问题的重要性, 本文采用另一种方法——Riccati 变换的方法求解同调谐振子, 得到与文献[1]完全相同的结果, 从而支持了文献[1]的意见.

2. Riccati 变换

设方程(1)的解为

$$\psi(x)=\varphi(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}. \quad (2)$$

把 $\psi'=(\varphi'-x\varphi)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 和 $\psi''=(\varphi''-2x\varphi'-\varphi+x^2\varphi)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ 代入方程(1)可得

$$\varphi''-2x\varphi'+(2E-1-g/x^2)\varphi=0. \quad (3)$$

按照文献[10]所建议的简化解法, 进行 Riccati 变换, 即设

$$u=-\varphi'/\varphi, \quad (4)$$

于是方程(3)化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u^2-2xu-2E+1+\frac{g}{x^2}=0. \quad (5)$$

这样, 就把求解方程(1)的问题归于求解方程(5). 由此, 利用以上各式即得本征值谱和本征函数集.

3. 头两个本征值和本征函数

我们用选择适当的试探态函数的办法求解方程(5). 首先, 选择试探函数

$$u_0=ax-bx^{-1}, \quad (6)$$

其中 a 和 b 为待定常数, 将(6)式代入方程(5)得

* 北方交通大学基金资助的课题.

$$(a+2ab+2b-2E+1)$$
$$-(a^2+2a)x^2+(b-b^2+g)x^2=0.$$

作为对于任意 x 都成立的恒等式必有 x 各次方的系数均为零,即得方程组

$$a^2+2a=0,$$
$$b-b^2+g=0,$$
$$a+2ab+2b-2E+1=0.$$

解这个方程组得到

$$a=\begin{cases}0\\-2\end{cases},b=\frac{1}{2}\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}},$$
$$E_0=\begin{cases}1\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}\\-\left(1\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}\right).\end{cases}\tag{7}$$

由于我们要求 $E\geqslant0$,因此(7)式的第二个结果必须舍去 就是说,不考虑 $a=-2$ 情况.最后得

$$E_0=\begin{cases}1+\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g,\\1-\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g\leqslant\frac{3}{4}.\end{cases}\tag{8}$$

注意本式后面给出的 g 的有效范围.

通过方程组(7)还可以得到

$$a=0,b=E_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}.\tag{9}$$

考虑到(2),(4),(6)各式可得基态本征函数为

$$\psi_0(x)=N_0x^b\mathrm{e}^{-x^2/2},\tag{10}$$

其中 N_0 为归一化常数,b 由(9)式给出.

事实上,(8)式给出的两个值中,最低的那个

$$E_{01}=1-\sqrt{g+\frac{1}{4}}\tag{11}$$

才是基态能级;由于 b 有两个值,当 $b=\frac{1}{2}-\sqrt{g+\frac{1}{4}}$时,(10)式才是基态本征函数的表达式.

4. 其他本征值

为求其他本征值和相应的本征函数,可设

$$u=u_0-\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},\tag{12}$$

其中 u_0 由(6)式给出,而函数 p 待求.把(12)式代入方程(5),得

$$(a+2ab+2b+1-2E)$$
$$-(a^2+2a)x^2+(b-b^2+g)x^{-2}-\Omega=0,$$

其中

$$\Omega=\frac{1}{p}\left[\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}-2(u_0+x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right],\tag{13}$$

取 $\Omega=c$,c 为待定常数,即

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}-2(u_0+x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-cp=0,\tag{14}$$

则得

$$a=\begin{cases}0\\-2\end{cases},b=\frac{1}{2}\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}},$$
$$E_1=\begin{cases}1\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}-\frac{c}{2},\\-\left(1\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}\right)-\frac{c}{2}.\end{cases}\tag{15}$$

将(6)式代入方程(14)即得

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}-2\left(ax-\frac{b}{x}+x\right)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}-cp=0.\tag{16}$$

不难看出此方程的一个解为

$$p_1=c_0+x^2,\tag{17}$$

其中 c_0 待定.把(17)式代入(16)式可得恒等式

$$(2+4b-cc_0)-[4(a+1)+c]x^2=0,\tag{18}$$

立即可得

$$c=-4(a+1),\tag{19}$$

可以求出 $c_0=2(1+2b)/c$.根据(17)式可以给出相应的本征函数 $\psi_1(x)$,从略.为求能级,可把(19)式代入(15)式即得

$$E_1=\begin{cases}3\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}} & a=0\\-\left(3\pm\sqrt{g+\frac{1}{4}}\right) & a=-2.\end{cases}\tag{20}$$

由于我们要求 $E\geqslant0$,因此(15)式的第二个结果必须舍去 就是说,舍去方程(1)的 $a=-2$ 情况.最后得

$$E_1=\begin{cases}3+\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g,\\3-\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g\leqslant3^2+\frac{1}{4}.\end{cases}\tag{21}$$

仿此,不难看出,方程(14)的另一个解为

$$p_2=c_1+c_0x^2+x^4,\tag{22}$$

c_1 和 c_0 为待定系数.把(22)式代入方程(16)可确定

$$c=-8(a+1)=-8,\tag{23}$$

c_1 和 c_0 也可以求出,从略.我们已经取 $a=0$ 而舍去了 $a=-2$.把(23)式代入(15)式的 $a=0$ 部分即得

$$E_2 = \begin{cases} 5+\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g, \\ 5-\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g\leqslant 5^2-\frac{1}{4}. \end{cases} \tag{24}$$

由以上可知，类推到一般情况可设 p 为 x 的偶次方构成的 $2n$ 次多项式

$$p_n = c_n + c_{n-1}x^2 + \cdots + c_0 x^{2n-2} + x^{2n}, \tag{25}$$

其中 $c_0, c_2, \cdots, c_n$ 为待定系数. 把(25)式代入方程(14)可确定 c 值及相应的诸系数，

$$c = -4n(a+1) = -4n. \tag{26}$$

我们已经取 $a=0$ 而舍去了 $a=-2$. 把(25)式代入(15)式的 $a=0$ 部分，即得

$$E_n = \begin{cases} (2n+1)+\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g, \\ (2n+1)-\sqrt{g+\frac{1}{4}}, & -\frac{1}{4}\leqslant g\leqslant (2n+1)^2-\frac{1}{4}, \end{cases} \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{27}$$

相应的本征函数 $\psi_n(x)$ 可由所求出的多项式 p 及 $u_0(x)$ 给出，从略.

(27)式如图 1 所示，与文献[1]完全相同，不再重复讨论.

[1] Li W B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50**(12) 2356 (in Chinese) [李文博 2001 物理学报 **50** 2356]

[2] Zhu D P 1987 *J. Phys.* A **20** 4331

[3] Landau L D and Lifshitz E M 1958 *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon) § 35

[4] Zhang J L, Guo Q Z 2000 *Acta Quantum Optica Sinica* **6** 18 (in Chinese) [章介伦、郭奇志 2000 量子光学学报 **6** 18]

[5] Ni Z X 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1687 (in Chinese) [倪志祥 1997 物理学报 **46** 1687]

[6] Yu Z X, Wang J S, Liu Y H 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1693 (in Chinese) [于肇贤、王继锁、刘业厚 1997 物理学报 **46** 1693]

[7] Liu Y W, Chen C Y 1999 *Acta Quantum Optica Sinica* **5** 73 (in Chinese) [刘友文、陈昌远 1999 量子光学学报 **5** 73]

[8] Chen C Y, Liu Y W 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 536 (in Chinese) [陈昌远、刘友文 1998 物理学报 **47** 536]

[9] Xu Z W 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1807 (in Chinese) [徐子 1996 物理学报 **45** 1807]

[10] Haley S B 1997 *Am. J. Phys.* **65**(3) 237

Solution of the isotonic oscillator problem by Riccati transformation

She Shou-Xian

(*Department of Physics*, *Northern Jiaotong University*, *Beijing* 100044, *China*)

(Received 31 July 2001; revised manuscript received 18 September 2001)

Abstract

Stationary Schrödinger equation of an isotonic oscillator is solved by Riccati transformation. Energy spectra and state functions are obtained.

Keywords: isotonic oscillator, eigenvalue spectra, method of Riccati transformation

PACC: 4250, 0365