第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1159-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.6, June, 2002

关于双曲函数方法求孤波解的注记*

郭冠平[1)]　张解放[2)]

[1)] (浙江师范大学教育科学与技术学院,金华　321004)

[2)] (上海应用数学和力学研究所,上海大学,上海　200072)

(2001 年 12 月 23 日收到;2002 年 3 月 4 日收到修改稿)

针对文献[18]提出的求解非线性波动方程孤波解的双曲函数方法和文献[19]的分析和改进,给出一个注记.并进一步讨论了它的应用.表明这种方法确实是一种简单而实用的方法.

关键词:双曲函数方法,孤波解,非线性波动方程

PACC:0340K,0290

非线性现象的研究是各个自然科学领域,也包括社会科学领域所十分关心的问题.物理、化学、生物、工程技术,甚至社会的经济问题等都存在着大量的、重要的非线性问题,这些问题的研究最终可用非线性波动方程这个数学模型来描述.因此如何求解非线性波动方程及其相应的求解方法的研究,引起人们的极大兴趣.反散射法[1]是一种比较系统的方法,但由于该方法只适用于可积系统,而实际的物理问题往往是不可积的,故限制了其应用.Hirota 方法[2],虽然能解决一大类非线性演化方程,但仍有时求不出严格的孤波解.除此之外,人们还建立起 Bäcklund 变换法[2]、Hopf-Cole 变换法[2]、Darboux 变换法[2]、Miura 变换法[3]、齐次平衡法[4—7]、双曲正切函数展开法[8,9]、试探函数法[10,11]、非线性变换法[12]、sine-cosine 方法[13,14]、直接约化方法[15]、Jacobi 椭圆函数展开法[16]、截断展开方法[17]等被有效地运用于具体的非线性波动方程中.最近,Zhang 等[18]基于双曲正切函数方法,提出了一种求解非线性波动方程孤波解的双曲函数方法,它可以获得非线性波动方程一类新的孤波解.其基本步骤是:

1)假定非线性波动方程(以两个独立变量 x,t 为例)

$$K(x,t,u,u_x,u_{xx},\cdots)=0, \tag{1}$$

具有行波解

$$u(x,t)=\phi(\xi),\ \xi=kx-ct+l, \tag{2}$$

以致可将方程(1)转化为关于 ϕ 的非线性常微分方程.

2)通过引入两个基本孤波函数

$$f(\xi)=\frac{1}{\cosh\xi+r},\ g(\xi)=\frac{\sinh\xi}{\cosh\xi+r}, \tag{3}$$

其中 r 为任意待定常数(文献[18]限定为非负的待定常数,其实不需要这个限定),并且满足耦合的 Riccati 方程

$$f'(\xi)=-f(\xi)g(\xi),$$
$$g'(\xi)=1-g^2(\xi)-rf(\xi), \tag{4}$$

及

$$g^2(\xi)=1-2rf(\xi)+(r^2-1)f^2(\xi). \tag{5}$$

3)进一步假定非线性 ODE 的解 ϕ 是一个关于 f 和 g 的 m 阶多项式,即

$$\phi=\sum_{i=0}^{m}a_if^i+\sum_{j=1}^{m}b_jf^{j-1}g, \tag{6}$$

其中系数 $a_i(i=0,1,\cdots,m)$ 和 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为待定常数(文献[18]限定 $a_m^2+b_m^2\neq0$,其实也不需要这个限定),而孤立波解 ϕ 的阶数 m 是由平衡非线性常微分方程的最高阶微分项和非线性项的阶数确定.

4)把(2)和(6)式代入(1)式可构造出关于 f 和 g 的多项式,然后令同次幂项系数为零,可得到一组以上待定常数所满足的非线性代数方程组.

5)借助于 Mathematica 或 maple 计算机代数系统,最终可求得非线性波动方程的孤波解.

基于以上方法,文献[18]研究了 Burgers 方程,

* 浙江师范大学校级科研项目(批准号:2001020)资助的课题.

KdV 方程，Chaffe-Infante 方程，NLS^+ 方程的孤波解，并获得了一些新的结果.从文献[18]可知孤波解 ϕ 的阶数 m，除了 KdV 方程是 2 外，其他几个方程都是 1.正由于文献[18]没有给出 KdV 方程 $m=1$ 时的孤波解，导致文献[19]对双曲函数方法进行分析并提出了改进.他们认为 通过平衡非线性常微分方程的最高阶微分项和非线性项的阶数所确定的孤波解 ϕ 的阶数 m，是双曲函数法中孤波解的最高阶数，而在实际计算中，应该计及比它小的情形.为此，他们给出了 KdV 方程 $m=1$ 时的孤波解，并进一步讨论了 KdV-Burgers 方程的孤波解.

文献[19]对孤波解的扩充无疑是正确的，但他们对双曲函数方法的分析和改进是值得商榷的.实际上通过平衡非线性 ODE 方程的最高阶微分项和非线性项的阶数所确定的孤波解 ϕ 的阶数 m，已经穷尽了 m 以下的各种情况，并不需要分别不同的 m 进行讨论对应的代数方程组，仅仅是高一阶的系数为零的特殊情况.下面我们给出分析.如 KdV 方程，文献[18]已得到 $m=2$ 时相应的非线性代数方程组为

$$b_2c-b_1cr-ka_1b_1-ka_0b_2+ka_0b_1r+k^3pb_1r-k^3pb_2=0,\tag{7a}$$

$$b_1c(r^2-1)-3b_2cr-ka_0b_1(r^2-1)-2ka_2b_1-2ka_1b_2+3ka_1b_1r+3ka_0b_2r+4k^3pb_1+15k^3pb_2r-7k^3pb_1r^2=0,\tag{7b}$$

$$2b_2c(r^2-1)-2ka_1b_1(r^2-1)-2ka_0b_2(r^2-1)-3ka_2b_2+5ka_2b_1r+5ka_1b_2r+20k^3pb_2-50k^3pb_2r^2+12k^3pb_1r(r^2-1)=0,\tag{7c}$$

$$7ka_2b_2r-3ka_2b_1(r^2-1)-3ka_1b_2(r^2-1)+60k^3pb_2r(r^2-1)-6k^3pb_1(r^2-1)^2=0,\tag{7d}$$

$$4ka_2b_2(r^2-1)+24k^3pb_2(r^2-1)^2=0,\tag{7e}$$

$$a_1c-ka_0a_1-kb_1b_2+kb_1^2r-k^3pa_1=0,\tag{7f}$$

$$2a_2c-ka_1^2-2ka_0a_2-kb_2^2-kb_1^2(r^2-1)+4kb_1b_2r-8k^3pa_2+6k^3pa_1r=0,\tag{7g}$$

$$3ka_1a_2+3kb_1b_2(r^2-1)-3kb_2^2r+6k^3pa_1(r^2-1)-30k^3pa_2r=0,\tag{7h}$$

$$2ka_2^2+2kb_2^2(r^2-1)+24k^3pa_2(r^2-1)=0.\tag{7i}$$

通过 Mathematica 软件，我们可求得 KdV 方程的 4 组解分别为

$$u_1=\frac{c-4k^2p}{k}+12k^2p\,\mathrm{sech}^2(kx-ct+l),\tag{8}$$

$$u_2=\frac{c-k^3p}{k}+6k^2pr\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+r}-\frac{6k^2p(r^2-1)\pm6k^2p\sqrt{r^2-1}\sinh(kx-ct+l)}{[\cosh(kx-ct+l)+r]^2},\tag{9}$$

$$u_3=\frac{c-k^3p}{k}+6k^2p\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+1},\tag{10}$$

$$u_4=\frac{c-k^3p}{k}-6k^2p\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)-1}.\tag{11}$$

从中可见，本文的 u_1 解即为文献[18]的一个解；本文的 u_2 解也是文献[18]的另一个解中的 a_0 改为 $\frac{c-k^3p}{k}$ 后的结果(这可能是文献[18]的计算笔误).由于文献[18]受到 $a_m^2+b_m^2\neq0$ 的约束，所以丢掉了本文中的 u_3，u_4 解.而文献[19]正好考虑到这一问题，提出要计及 $m=1$，从而得出另一代数方程组，由此得到在 $r=1$ 时的一个解，即本文的 u_3 解(10)，但没有给出 u_4 这个解，即也可取 $r=-1$.

又如 KdV-Burgers 方程，文献[19]分别以 $m=1$ 和 $m=2$ 讨论它的孤波解，其实没有这个必要.因为由 $m=2$ 时的非线性代数方程为

$$-k^2a_1\theta-ka_1b_1-c(rb_1-b_2)+k^3(rb_1-b_2)\delta+ka_0(rb_1-b_2)=0,\tag{12a}$$

$$ca_1-k^3a_1\delta-ka_0a_1+k^2(rb_1-b_2)\theta+kb_1(rb_1-b_2)=0,\tag{12b}$$

$$-4k(r^2-1)(-6k^2\delta+6k^2r^2\delta+a_2)b_2=0,\tag{12c}$$

$$3k^2ra_1\theta-4k^2a_2\theta-cb_1+cr^2b_1+4k^3b_1\delta-7k^3r^2b_1\delta+ka_0b_1-kr^2a_0b_1+3kra_1b_1-2ka_2b_1-3crb_2+15k^3rb_2\delta+3kra_0b_2-2ka_1b_2=0,\tag{12d}$$

$$2k^2a_1\theta-2k^2r^2a_1\theta+10k^2ra_2\theta-12k^3rb_1\delta+12k^3r^3b_1\delta+2ka_1b_1-2kr^2a_1b_1+5kra_2b_1-2cb_2+2cr^2b_2+20k^3b_2\delta-50k^3r^2b_2\delta+2ka_0b_2-2kr^2a_0b_2+5kra_1b_2-3ka_2b_2=0,\tag{12e}$$

$$6k^2a_2\theta-6k^2r^2a_2\theta-6k^3b_1\delta+12k^3r^2b_1\delta-6k^3r^4b_1\delta+3ka_2b_1-3kr^2a_2b_1-60k^3rb_2\delta+60k^3r^3b_2\delta-3k(r^2-1)a_1b_2+7kra_2b_2=0,\tag{12f}$$

$$6k^3ra_1\delta-ka_1^2+2ca_2-8k^3a_2\delta-2ka_0a_2+2k^2b_1\theta-2k^2r^2b_1\theta+kb_1^2-kr^2b_1^2+6k^2rb_2\theta+4krb_1b_2-kb_2^2=0,\tag{12g}$$

$$6k^3a_1\delta-6k^3r^2a_1\delta+30k^3ra_2\delta-3ka_1a_2+6k^2b_2\theta-6k^2r^2b_2\theta+3kb_1b_2-3kr^2b_1b_2+3krb_2^2=0,\tag{12h}$$

$$24k^3a_2\delta-24k^3r^2a_2\delta-2ka_2^2+2kb_2^2-2kr^2b_2^2=0.\tag{12i}$$

这已包含了 $m=1$ 的相应结果．类似文献[19]，若令 $b_2=0$，利用 Mathematica 软件可同时求得下列 3 组解．

$$u_1=\frac{c}{k}+6k^2\delta\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+1}-\frac{6}{5}k\theta\frac{\sinh(kx-ct+l)}{\cosh(kx-ct+l)+1},\tag{13}$$

$$u_2=\frac{c}{k}-6k^2\delta\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)-1}-\frac{6}{5}k\theta\frac{\sinh(kx-ct+l)}{\cosh(kx-ct+l)-1},\tag{14}$$

其中 $k=\pm\frac{\theta}{5\delta}$，$c$，$l$ 为常数．

$$u_3=\frac{1}{25}\left(\frac{25c}{k}-100k^2\delta+\frac{\theta^2}{\delta}\right)+12k^2\delta\operatorname{sech}^2(kx-ct+l)-\frac{12}{5}k\theta\tanh(kx-ct+l),\tag{15}$$

其中 $k=\pm\frac{\theta}{10\delta}$，$c$，$l$ 为任意常数．(13)式就是文献[19]当 $m=1$ 求得的解，(14)式是我们新得到的一个解；而(15)式就是文献[19]当 $m=2$ 时给出的解．

为了更清楚地了解双曲函数方法，我们再以广义 KdV 方程[20]

$$u_t+\alpha uu_t+uu_x+u_{xxx}=0\tag{16}$$

为例进行讨论．根据平衡关系可知 $m=2$，从而可得到如下的方程组

$$4a_2b_2k(1-r^2)-24b_2k^3(1-r^2)^2-4a_2b_2c\alpha(1-r^2)=0,\tag{17a}$$

$$b_2c-a_1b_1k-a_0b_2k-b_2k^3-b_1cr+a_0b_1kr+b_1k^3r+a_1b_1c\alpha+a_0b_2c\alpha-a_0b_1cr\alpha=0,\tag{17b}$$

$$a_1c-a_0a_1k-b_1b_2k-a_1k^3+b_1^2kr+c\alpha(a_0a_1+b_1b_2-b_1^2r)=0,\tag{17c}$$

$$-b_1c+b_1k(a_0-2a_2)+2k(2b_1k^2-a_1b_2)+3r(a_1b_1k-b_2c+a_0b_2k)+15b_2k^3r+b_1r^2(c-a_0k-7k^3)+c\alpha(2a_2b_1-a_0b_1+2a_1b_2-3a_1b_1r-3a_0b_2r+a_0b_1r^2)=0,\tag{17d}$$

$$2a_2c-k(a_1^2+b_2^2-b_1^2)-2a_2k(a_0+4k^2)+kr(4b_1b_2+6a_1k^2-b_1^2r)+c\alpha(a_1^2+2a_0a_2-b_1^2+b_2^2-4b_1b_2r+b_1^2r^2)=0,\tag{7e}$$

$$2(a_1b_1k-b_2c)+b_2k(2a_0-3a_2+20k^2)+kr(5a_2b_1+5a_1b_2-12b_1k^2)+r^2(2b_2c-2a_1b_1k-2a_0b_2k-50b_2k^3+12b_1k^3r)+c\alpha(3a_2b_2-2a_1b_1-2a_0b_2-5a_2b_1r-5a_1b_2r+2a_1b_1r^2+2a_0b_2r^2)=0,\tag{17f}$$

$$3k(b_1b_2-a_1a_2)+3k(2a_1k^2+b_2^2r+10a_2k^2r-b_1b_2r^2-2a_1k^2r^2)+3c\alpha(a_1a_2-b_1b_2-b_2^2r+b_1b_2r^2)=0,\tag{17g}$$

$$3k(a_2b_1+a_1b_2-2b_1k^2)+kr(7a_2b_2-60b_2k^2-3a_2b_1r-3a_1b_2r+12b_1k^2r)+6k^3r^3(10b_2-b_1r)-c\alpha(3a_2b_1+3a_1b_2+7a_2b_2r)+3c\alpha r^2(a_2b_1+a_1b_2)=0,\tag{17h}$$

$$2k(b_2^2-a_2^2)+2k(12a_2k^2-b_2^2r^2-12a_2k^2r^2)+2c\alpha(a_2^2-b_2^2+b_2^2r^2)=0.\tag{17i}$$

利用 Mathematica 求得下列 3 组解，它们分别是

$$u_1=\frac{-c+k^3}{c\alpha-k}\pm\frac{6k^3}{k-c\alpha}\times\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)\pm1},\quad k\neq c\alpha,\tag{18}$$

$$u_2=\frac{-c+4k^3}{c\alpha-k}+\frac{12k^3}{k-c\alpha}\times\operatorname{sech}^2(kx-ct+l),\quad k\neq c\alpha,\tag{19}$$

$$u_3=\frac{k^3-c}{c\alpha-k}+\frac{6k^3r}{k-c\alpha}\frac{1}{\cosh(kx-ct+l)+r}-\frac{6k^3(r^2-1)}{k-c\alpha}\frac{1}{[\cosh(kx-ct+l)+r]^2}\pm\frac{6k^3\sqrt{r^2-1}}{k-c\alpha}\frac{\sinh(kx-ct+l)}{[\cosh(kx-ct+l)+r]^2},\quad k\neq c\alpha.\tag{20}$$

这也已包含 $m=1$ 时的结果，即解(18)．

综上所述，双曲函数方法已经包含文献[19]的结果，不需要分别不同阶数进行讨论．由此也说明，双曲函数法的确是一种简洁明快，切实可行的算法，可以获得许多新的孤波解．我们相信在非线性波动方程的研究中会发挥出更重要的作用．这方面正在研究中．

[1] Ablowitz M J P and Clarkson A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scatting* (New York: Cambridge University Press) p 200

[2] Gu C H *et al* 1990 *Soliton Theory and its Application* (Hangzhou: Zhejiang Publishing House of Science and Technology) p 160

[3] Miura M R 1978 *Backund Transformation* (Berlin: Springer Verlag) p 185

[4] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[5] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[6] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[7] Fang E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[8] Yang L, Liu J and Yang K 2001 *Phys. Lett.* A **278** 267

[9] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[10] Hirota R 1973 *J. Math. Phys.* **14** 810

[11] Kudryashov N A 1990 *Phys. Lett.* A **147** 287

[12] Otwinowski M, Paul R and Laidlaw W G 1988 *Phys. Lett.* A **128** 483

[13] Yan C 1996 *Phys. Lett.* A **224** 77

[14] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[15] Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1937 (in Chinese) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]

[16] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适等 2001 物理学报 **50** 2068]

[17] Zhang J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放 2001 物理学报 **50** 1648]

[18] Zhang G S, Li Z B *et al* 2000 *China Sience. Sin.* **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌、李志斌等 2000 中国科学(A辑) **30** 1103]

[19] Lu K P, Shi Y R *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞、石玉仁等 2001 物理学报 **50** 2074]

[20] Shang Y D 1998 *J. Ningxia Uni.* **19**(2) 110 (in Chinese) [尚亚东 1998 宁夏大学学报 **19**(2) 110]

Note on solving solitary wave solution by the hyperbolic function method*

Guo Guan-Ping[1)] Zhang Jie-Fang[2)]

[1)] (*College of Education Science and Technology, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)

[2)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

(Received 23 December 2001; revised manuscript received 4 March 2002)

Abstract

We give a note on solving the solitary wave solution of the nonlinear wave equation using the hyperbolic function method. It can be seen that the hyperbolic function method is a simple and effective method in studying the solitary wave solution of the nonlinear evolution equation.

Keywords: hyperbolic function method, solitary wave solution, nonlinear wave equation

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Research Foundation of Zhejiang Normal University, China (Grant No. 2001020).