第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1167-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.6, June, 2002

Kerr-Newman 黑洞的统计熵*

赵 仁 张丽春

(雁北师范学院物理系,大同 037000)

(2001 年 10 月 11 日收到;2001 年 12 月 2 日收到修改稿)

避开求解黑洞背景下波动方程的困难,应用量子统计方法,直接求解轴对称 Kerr-Newman 黑洞背景下 Bose 场和 Fermi 场的配分函数.然后利用改进的 brick-wall 方法-膜模型,计算黑洞背景下 Bose 场和 Fermi 场的熵.得到黑洞熵与视界面积成正比的结论.在所得结论中不存在对数发散项与舍去项,也不存在黑洞视界外标量场或 Dirac 场为什么是黑洞熵疑难,并且给出粒子的自旋简并度对黑洞熵的影响.为研究各种复杂黑洞熵提供了简捷的途径.

关键词:量子统计,brick-wall 方法,膜模型,黑洞熵

PACC:0420,9760L

1. 引 言

黑洞熵是理论物理的重要课题之一,因为熵具有统计意义,因而对黑洞熵的理解涉及到黑洞微观本质的认识,对它的充分理解,需要一个好的量子引力理论,但目前这方面的工作并不令人满意.黑洞熵的统计起源问题并没有得到解决[1].另一方面,大量文献对所有黑洞熵的讨论都给出与视界面积成正比的结果[2—9].其中用的最多的方法是 G′t Hooft 提出的 brick-wall 方法[7].人们用此方法研究了各种黑洞背景下标量场或 Dirac 场的统计性质[10—14],发现黑洞熵的一般表达式是与黑洞视界面积成正比项,加上不与视界面积成正比且对数发散项.然而,使人疑惑不解的是:黑洞视界外的标量场或 Dirac 场的熵为什么就是黑洞的熵?为了得到黑洞熵与视界面积成正比,要舍去对数项和把 L^3 项解释成远离围绕系统的真空的贡献.以及用 WKB 近似求解各种黑洞背景下标量场或 Dirac 的波函数的复杂性.这些都是原 brick-wall 方法中不尽人意的地方,而又无法克服的问题.

众所周知,黑洞熵是与视界面积成正比的,而且视界的存在是黑洞最基本的性质.已经证明,视界的存在普遍导致 Hawking 效应[15].又黑洞熵的有无直接与视界的存在与否有关[16].那么,由此启示我们:与视界面积成正比是黑洞熵的内禀性质,它的取值大小与视界外的辐射场无关,而只是视界作为三维空间里的一个二维膜所具有的性质,此二维膜上的量子状态数是否对应黑洞的熵.如果真如此,那么计算这个膜的熵就成为首要的问题.

本文直接运用量子统计的方法[17],计算在轴对称 Kerr-Newman 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数,得到系统熵的积分表达式.对玻色场与文献[10]用近似求解标量场波动方程而得到的表达式一致.然后利用改进的 brick-wall 方法——膜模型[17—20]计算黑洞熵.所得结果,不存在舍去项问题,也不存在态密度在视界附近发散问题.并且在结果中考虑了粒子自旋简并度对熵的影响.由于我们直接采用了量子统计方法,回避了原 brick-wall 方法中求解波动方程的困难.整个计算过程,物理图像清楚,计算简单,结果合理,为复杂时空中熵的计算提供了一条简捷的途径.文中取温度的最简单函数形式($C=\hbar=G=K_B=1$).

2. 玻色场的熵

Kerr-Newman 时空线元

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right)\mathrm{d}t^2+\frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2\\&+\left[(r^2+a^2)\sin^2\theta+\frac{(2Mr-Q^2)a^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right]\mathrm{d}\varphi^2\\&-\frac{2(2Mr-Q^2)a\sin^2\theta}{\rho^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

---

* 山西省自然科学基金(批准号:20001009)资助的课题.

其中 $\rho^2 = r^2 + a^2\cos\theta$，$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$.

黑洞的辐射温度

$$T_+ = \frac{r_+ - r_-}{4\pi(r_+^2 + a^2)}, \tag{2}$$

式中 $r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ 分别为黑洞的外内视界位置.黑洞的视界面积为

$$A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2). \tag{3}$$

由文献[10,21]知无穷远静止观测者,测得的固有辐射温度

$$T = \frac{T_+}{\sqrt{-g'_{tt}}}. \tag{4}$$

式中 T_+ 是平衡温度,

$$g'_{tt} = \frac{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - g_{t\varphi}^2}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{(r-r_+)(r-r_-)(r^2 + a^2\cos^2\theta)}{(r^2+a^2)^2 - (r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta}. \tag{5}$$

我们求巨配分函数 Z,对玻色系统

$$\ln Z = -\sum_i g_i \ln(1 - e^{-\beta\varepsilon_i}), \tag{6}$$

在单位体积内,能量在 ε 到 $\varepsilon + d\varepsilon$ 或 v 到 $v + dv$ 间隔内,粒子的量子态数应为

$$g(v)dv = j4\pi v^2 dv, \tag{7}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度,对时空(1),在任意 r 点的二维曲面为

$$A(r) = \int dA = \int \sqrt{g}\, d\theta d\varphi, \tag{8}$$

式中 $g = \begin{vmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} = g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}$.那么在视界外,任意 r 点的壳层体积元为

$$dV = A(r)\sqrt{g_{rr}}\, dr. \tag{9}$$

所以,在黑洞视界外,任意 r 点任意厚度的壳层内系统的配分函数为

$$\begin{aligned}\ln Z &= \int A(r)\sqrt{g_{rr}}\, dr \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{1}{n} e^{-n\beta\varepsilon_i} \\ &= j4\pi \int A(r)\sqrt{g_{rr}}\, dr \sum_{n=1} \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{nhv}{T}} v^2 dv \\ &= j\frac{1}{90}\pi^2 \int \frac{A(r)\sqrt{g_{rr}}\, dr}{\beta^3} \\ &= j\frac{\pi^2}{90}\int \frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\, dr d\theta d\varphi}{\beta^3},\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\frac{1}{\beta} = T$,利用熵与配分函数的关系

$$S = \ln Z - \beta_0 \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_0}, \tag{11}$$

可得

$$\begin{aligned}S_b &= j\frac{2}{45}\pi^2 \frac{1}{\beta_0^3}\int \frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\, dr}{(-g'_{tt})^{3/2}} \\ &= j\frac{2\pi^2}{45\beta_0^3}\int d\theta d\varphi \int \{[(r^2+a^2)^2 - (r-r_+) \\ &\quad \times (r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2/[(r-r_+)^2 \\ &\quad \times (r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)]\}\sin\theta\, dr.\end{aligned} \tag{12}$$

式中 $\beta_0 = \frac{1}{T_+} = \frac{4\pi(r_+^2 + a^2)}{r_+ - r_-}$,$\beta = \beta_0\sqrt{-g'_{tt}}$.(12)式与文献[10]的(53)式一致,上式积分,对 r 取积分区间为 $[r_+ + \zeta, r_+ + N\zeta]$.其中 ζ 为一非负的小量,N 为一大于 1 的常数.则

$$\begin{aligned}S_b &= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^\pi d\theta \int_{r_++\zeta}^{r_++N\zeta} \{[(r^2+a^2)^2 \\ &\quad - (r-r_+)(r-r_-)a^2\sin^2\theta]^2/ \\ &\quad \times [(r-r_+)^2(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)]\}\sin\theta\, dr. \\ &= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^\pi \frac{[(r_+^2+a^2)^4}{(r_+-r_-)^2(r_+^2+a^2\cos^2\theta)} \\ &\quad \times \left[\frac{N-1}{N\zeta}\right]\sin\theta\, d\theta + G(r_+, N, \zeta) \\ &= j\frac{8\pi^3}{45\beta_0^3}\frac{(r_+^2+a^2)^3}{(r_+-r_-)^2}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \\ &\quad \times \left[\frac{N-1}{N\zeta}\right] + G(r_+, N, \zeta),\end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}G(r_+, N, \zeta) &= j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^\pi \Big[\frac{8r_+(r_+^2+a^2)^3}{(r_+-r_-)^2(r_+^2+a^2\cos^2\theta)} \\ &\quad - \frac{2r_+(r_+^2+a^2)^4}{(r_+-r_-)^2(r_+^2+a^2\cos^2\theta)^2} \\ &\quad - \frac{2(r_+^2+a^2)^4}{(r_+-r_-)^3(r_+^2+a^2\cos^2\theta)} \\ &\quad - \frac{2(r_+^2+a^2)^2a^2\sin^2\theta}{(r_+-r_-)(r_+^2+a^2\cos^2\theta)}\Big]\sin\theta\, d\theta \ln N \\ &\quad + j\frac{4\pi^3}{45\beta_0^3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_{r_++\zeta}^{r_++N\zeta} F(r)\, dr,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}F(r) &= \sum_{n=2}^\infty \frac{f_1^{(n)}(r_+)}{n!}(r-r_+)^{n-2} \\ &\quad - \sum_{n=1}^\infty \frac{f_2^{(n)}(r_+)}{n!}(r-r_+)^{n-1} + f_3(r),\end{aligned} \tag{15}$$

$$f_1(r) = \frac{(r^2+a^2)^4}{(r-r_-)^2(r^2+a^2\cos^2\theta)},$$

$$f_2(r) = \frac{2(r^2 + a^2)^2 a^2 \sin^2\theta}{(r - r_-)(r^2 + a^2\cos^2\theta)},$$

$$f_3(r) = \frac{a^4 \sin^4\vartheta}{r^2 + a^2\cos^2\theta}, f'_1(r) = \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}r},$$

$$f'_2(r) = \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}r}, \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{r_+}.$$

由文献[7]中的(3.17)知,当 $N\zeta = L >> r_+$ 时,如取

$$\zeta = \frac{T_+}{90}, \tag{16}$$

可得到黑洞熵与视界面积成正比的关系.为了保证辐射场与黑洞处于稳定平衡状态[22],"红外"截断因子不应取 $L >> r_+$.考虑到以上原因,对 Kerr-Newman 黑洞我们取紫外截断因子

$$\zeta = \frac{T_+}{90}\frac{\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\frac{N-1}{N}. \tag{17}$$

和"红外"截断因子 $N\zeta$,N 的取值应保证使黑洞与辐射场处于平衡稳定状态.则

$$S_\mathrm{b} = j\pi(r_+^2 + a^2) + G(r_+, N, \zeta)$$
$$= j\frac{1}{4}A^+ + G(r_+, N, \zeta). \tag{18}$$

当 $N\to\infty$,即取 $N\zeta = L >> r_+$,$j = 1$ 时,结论回到已知结果[10].当 $N\to1$ 时,$\zeta\to0$,$N\zeta\to0$ 即紫外截断因子与"红外"截断因子都趋于黑洞的外视界上,然而所求的黑洞熵为

$$S_\mathrm{b} = \frac{1}{4}A_+. \tag{19}$$

在计算中我们应用了 $\lim\limits_{N\to1}G(r_+, N, \zeta)\to0$,式中 $A_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ 为黑洞的视界面积.由于当紫外截断因子与"红外"截断因子都趋于黑洞的外视界上时,我们计算的熵与黑洞外辐射场无关,所以(19)式所给出的熵应为黑洞熵.

3. Fermi 场的熵

对于 Fermi 系统,巨配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{20}$$

由(7)式,可得

$$\ln Z = \int A(r)\sqrt{g_{rr}}\,\mathrm{d}r \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i}$$
$$= i4\pi\int A(r)\sqrt{g_{rr}}\,\mathrm{d}r \sum_{n=1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{T}}\nu^2\,\mathrm{d}\nu$$
$$= i\frac{\pi^2}{90}\frac{7}{8}\int\frac{A(r)\sqrt{g_{rr}}\,\mathrm{d}r}{\beta^3}$$
$$= i\frac{\pi^2}{90}\frac{7}{8}\int\frac{\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}g_{rr}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\beta^3}, \tag{21}$$

利用第二部分的结果,Fermi 场的熵

$$S_\mathrm{F} = i\frac{7}{8}\frac{1}{4}A_+. \tag{22}$$

式中,i 为费米子自旋简并度.

4. 讨　论

通过以上分析,在轴对称 Kerr-Newman 黑洞背景下,从统计物理学角度出发,直接运用统计方法求解各种场的配分函数,同样可得到 brick-wall 方法所给出的积分表达式,然而我们的计算避开了求解波动方程的困难,克服了近似处理的方式.由于我们运用了改进的 brick-wall 方法——膜模型,计算各种场的熵,不存在态密度在视界附近发散问题,用 N 的取值来保证黑洞与辐射场处于稳定平衡状态,故在计算中克服了辐射场与黑洞不处在稳定平衡状态的缺点.在我们的计算中当 $N\to1$ 时,$\zeta\to0$,$N\zeta\to0$ 即紫外截断因子与"红外"截断因子都趋于黑洞的外视界上,然而由(19)和(22)式知,计算的结果与辐射场无关,不存在原 brick-wall 方法中的对数发散项与舍去项.所得熵与黑洞的视界面积成正比,故可视为黑洞熵.

从以上分析我们看到,运用统计与膜模型方法计算黑洞的熵,不存在原 brick-wall 方法中黑洞视界外标量场或 Dirac 场的熵为什么是黑洞熵的疑惑.也不存在复杂的近似求解,整个过程物理图像清楚,计算简单,结论合理,并考虑到粒子的简并度对熵的影响.对各种不同的时空在计算熵时,只是红移因子不同,其他无需改变.尤其对非球对称时空,无需求解繁杂的波动方程,就可以直接求得各种场的配分函数,为研究各种黑洞的熵提供了一条简捷的新途径.

[1] Liberati S 1997 *Il Nuovo Cimento* B **112** 405
[2] Frolov V P and Furaev D V 1998 *Class Quantum Grav*. **15** 2041
[3] Hochberg D and Kephart T W and York J W 1993 *Phys. Rev*. D **48** 479
[4] Padmanaban T 1989 *Physics Letters* A **136** 203
[5] Jing J L and Yan M L 2001 *Phys. Rev*. D **63** 084028
[6] Cognola G and Lecca P 1998 *Phys. Rev*. D **57** 1108
[7] G′t Hooft 1985 *Nucl. Phys*. B **256** 727

[8] Cai R G，Ji J Y and Soh K S 1998 *Class Quantum Grav*. **15** 2783

[9] Solodukhin S N 1995 *Phys*. *Rev*. D **51** 609

[10] Lee M H and Kim J K 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 3904

[11] Zhao Z and Zhu J Y 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1558（in Chinese）[**赵峥、朱建阳** 1999 **物理学报 48** 1558]

[12] Jing J L and Yan M L 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 389

[13] Shen G Y and Chen D M 2000 *Gen*. *Rel*. *Grav*. **32** 2269

[14] Liu W B and Zhao Z 2000 *Phys*. *Rev*. D **61** 063003

[15] Zhao Z 1981 *Acta Phys*. *Sin*. **30** 1508（in Chinese）[**赵 峥** 1981 **物理学报 30** 1508]

[16] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys*. *Rev*. D **15** 2752

[17] Zhao R，Zhang J F and Zhang L C 2001 *Nucl*. *Phys*. B **609** 247

[18] Li X and Zhao Z 2000 *Phys*. *Rev*. D **62** 104001

[19] Zhao R，Zhang J F and Zhang L C 2001 *Modern Phys*. *Lett*. A **16** 719

[20] Zhao R，Zhang L C 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1015（in Chinese）[**赵仁、张丽春** 2001 **物理学报 50** 1015]

[21] Tolman R C 1934 *Relativity*，*Thermodynamics and Cosmology*（Oxford：Oxford University Press）

[22] York J W 1986 *Phys*. *Rev*. D **33** 2092

Statistical entropy of Kerr-Newman black hole*

Zhao Ren Zhang Li-Chun

（*Department of Physics*，*Yanbei Normal Institute*，*Datong* 037000，*China*）

（Received 11 October 2001；revised manuscript received 2 December 2001）

Abstract

By using the method of quantum statistics，we directly derive the partition functions of bosonic and fermionic field in Kerr-Newman black hole with axial symmetry. Then via the improved brick-wall method，membrane model，we obtain that the entropy of bosonic and fermionic field in black hole is proportional to the area of horizon. In our result，the stripped term and the divergent logarithmic term no longer exist. The problem that the state density is divergent around the horizon doesn't exist either. We also give the influence of the spining degeneracy of particles on the entropy of black hole. We offer a new simple and direct way of calculating the entropy of different complicated black holes.

Keywords：quantum statistics，brick-wall method，membrane model，entropy of black hole

PACC：0420，9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province，China（Grant No. 20001009）.