第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1171-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51,No.6,June,2002

推广的 EZ 模型中的普适性行为

邓文基

(华南理工大学物理系,广州 510640)

(2001 年 7 月 6 日收到;2001 年 10 月 28 日收到修改稿)

探讨了推广 EZ 模型的可能性,并给出了相应的模型中人群大小分布函数的形式解.研究表明金融市场中不同大小的人群数目的交易人的数目在重新标度后将具有最广泛的普适性行为.

关键词:金融物理,人群效应,主方程

PACC:0500,0565,0250

1. 引 言

在过去的几年里,越来越多的人致力于尝试用物理学的模型和方法来研究社会学和经济学的问题[1].其中关于金融市场股票价格起伏变化的研究特别引人注意,因为全球各大交易所积累了大量可供分析研究的原始数据[2—4].例如人们在研究股市价格的对数变化的分布函数时就发现了备受关注的所谓 fat-tail 现象,即大的价格起伏事件发生的概率远大于传统的随机分析作出的预言[2,3,5].

如果不受传统观点的限制,要解释这一现象并非难事[4,6,7].比如说,考虑交易市场中交易人的成群行为(crowding behavior)就是一条可能的途径[7].成群效应是指参与市场的一组交易人由于分享信息而在交易过程中的某一阶段采取一致的行动.Cont 和 Bouchaud 已经在一个静态的渗流模型[8]中细致地研究过有关问题.相应的动态模型是由 Eguiluz 和 Zimmermann 给出的[9].为简单起见我们称其为 EZ 模型.在他们的数值模拟工作中所有交易人形成的关系网是按一定的规律随时间演化的,而决定人群聚散的是信息在网络中的传播方式.有趣的是 D'Hulst 和 Rodgers 采用统计物理中的主方程方法很快得到了这一包含信息传输和人群效应的金融市场模型的解析解[10].考虑到现有模型给出的数值模拟结果与经验数据尚有差距,Zheng,Hui 和 Johnson 等人[11]又将 EZ 模型作了简单的推广并且求出了有关主方程的形式解,同时还讨论了新模型一系列重要性质.

本文在文献[11]的基础上探讨进一步推广 EZ 模型的可能性,以求有益于探索更接近真实市场的物理模型.研究表明不是金融市场中属于不同大小的人群中的交易人的数目而是涉及到概率函数的另一个物理量才具有最广泛的普适性行为.本文描述了有关模型,建立和求解有关的主方程,并做了进一步讨论.

2. 模 型

设想一个具有固定人数的金融市场,其中的 N 位交易人可以用一个无穷维的网络上的格点来代表.互相分享信息、采取共同决策的一群人用网线连接;而一旦这种关系破裂,则取消相应的连线(网络被假设是无穷维的,因为在互联网时代信息的交流几乎是不受地域限制的).最初可以假定所有的交易人都是独立的,整个网络实际上只不过是 N 个孤立的格点(也不妨假定它已经分成了不同的共享信息的群体,第 l 个人群中交易人的数目记为 s_l).然后网络将按照如下规则一步一步地演化:1)等概率地随机选出一个交易人 i.2)该交易人 i 将按确定的概率 a($0<a<1$)完成一项交易(即等概率地买进或者卖出),并且与该交易人同属一个人群 l 的所有其他交易人完成同一项交易活动.然后这一人群面临着两种可能的不同命运:或者以概率 $f(s_l)$ 分离成 s_l 个独立的交易人,或者继续保持联系、分享信息、统一行动.3)该交易人 i 将有 $1-a$ 的概率不作任何交易,而是等概率地从市场中随机选出另一个交易人 j.根据交易人 j 所属人群 m 的大小 s_m,交易人 i 和 j 所属的人群 l 和 m 将以概率 $f(s_l)f(s_m)$ 合并成新的人群,也可能继续维持互不相关的现状,概率为 $1-f(s_l)f(s_m)$.不断地重复以上步骤将模拟出网络

和相应的市场的演化过程.

在原始的 EZ 模型[9] 中假定了不依赖于人群大小的概率函数 $f(s)=1$;也就是说如果交易人 i 不作任何交易,就一定会随机地、等概率地寻找另一个交易人 j,并使得交易人 i 和 j 所属的人群 l 和 m 合并成新的更大的人群.这一简单模型不仅可以说明实际金融市场中观察到的有关价格变化的所谓的 fat-tail 现象,而且还可以给出在大 s 极限下人群大小 s 的分布函数普适的标度行为 $n_s \propto s^{-5/2}$ 和相应的幂指数截断因子[10].注意到在实际金融市场中一个共享信息的人群,例如一家公司,并非总是在完成一项交易后一定自行解散,Zheng,Hui 和 Johnson 等人认为有必要引入一个依赖于人群大小的概率函数 $f(s)=s^{-\delta}(0\leqslant\delta<1)$.他们的数值和解析工作表明在新的模型中,关于人群大小 s 的分布函数 n_s 的幂指数 $-5/2$ 不再是普适的,它将随参数 δ 的取值而变化[11].

在进一步的讨论中我们注意到并没有充分的理由假定依赖于人群大小的概率函数一定要取简单的幂指数形式 $f(s)=s^{-\delta}(0\leqslant\delta<1)$,即使考虑到方便地求解有关主方程的要求,这一限制也是可以取消的.

3. 主方程及其稳态解

在金融市场的随机网络模型中,大小为 s 的人群的数目 n_s 会随时间变化.假定交易人的总数 N 充分大,可以采用统计物理中的主方程方法来描述这一分布函数的演化过程[12].注意到未成群的交易者的特殊性,我们首先写出网络中孤立格点的数目 n_1 的演化方程

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}=\sum_{r=2}^{+\infty} ar\frac{rn_r}{N}f(r)-2(1-a)\frac{n_1}{N}\times\left[\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{rn_r}{N}f(r)f(1)-\frac{1}{N}f(1)f(1)\right],\quad(1)$$

其中等式右边第一项描述 $s>1$ 的人群在完成交易后解散成独立交易人的过程,第二项则描述独立的交易人与任何其他人群结合的过程,中括号中的第二项表示一个小概率事件,即被选中的交易人在等概率地随机抽签寻找合作者的时候碰巧抽中了自己.类似地,我们可以写出网络中 $s\geqslant 2$ 的人群数目 n_s 的主方程

$$\frac{\partial n_s}{\partial t}=-a\frac{sn_s}{N}f(s)+\sum_{r+r'=s}(1-a)\frac{rn_r}{N}\frac{r'n_{r'}}{N}f(r)f(r')-2(1-a)\frac{sn_s}{N}\left[\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{rn_r}{N}f(s)f(r)-\frac{s}{N}f(s)f(s)\right],\quad(2)$$

这样一个演化系统可以达到一个不随时间变化的稳态结构.略去大 N 情形下的小概率项,相应的稳态方程可写作

$$2(1-a)C\rho_1=a\sum_{r=2}^{+\infty}r\rho_r\quad(3)$$

和

$$[a+2(1-a)C]\rho_s=(1-a)\sum_{r=1}^{s-1}\rho_r\rho_{s-r},\quad s=2,3,4,\cdots,\quad(4)$$

其中我们引入了两个重要的记号 $\rho_r\equiv rn_rf(r)/N$ 和 $C\equiv\sum_{r=1}^{+\infty}\rho_r$,而后者通常是依赖于函数 $f(s)$ 的具体形式的泛函.

为了求解关于 ρ_r 的高度非线性的方程组(3)和(4),我们引进生成函数

$$G(z)\equiv\sum_{s=2}^{+\infty}\rho_sz^s,\quad(5)$$

显然,$G(0)=0$,并且 $G(1)=C-\rho_1$.结合(4)和(5)式可以简单地证明

$$G(z)=A[\rho_1z+G(z)]^2,\quad(6)$$

此处记号 $A\equiv(1-a)/[a+2(1-a)C]$ 是一个独立于 z 的量.为证明方程(6)我们已经应用了一个明显的恒等式

$$\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{r=1}^{s-1}a_{r,s-r}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}a_{m,n}.\quad(7)$$

由生成函数的定义(5)式可以看出

$$\rho_s=\frac{1}{s!}\frac{\partial^sG}{\partial z^s}\bigg|_{z=0},\qquad 对于\ s=2,3,4,\cdots.\quad(8)$$

而根据等式(6),有

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}z}=-\rho_1+\rho_1[1-2A(\rho_1z+G)]^{-1}\quad(9)$$

和关于 $s\geqslant 2$ 的一般导数关系

$$\frac{\mathrm{d}^sG}{\mathrm{d}z^s}=(2s-3)!!(2A)^{s-1}\rho_1^s[1-2A(\rho_1z+G)]^{-2s+1},\quad(10)$$

因此,结合(8)和(10)式可以一般地得到

$$\rho_s=s\frac{(2s-2)!}{(s!)^2}A^{s-1}\rho_1^s,\quad(11)$$

显然它包含了 $s=1$ 的情形.另外,由(6)式不难看出

$$G(1)=AC^2,\quad(12)$$

从而

$$\rho_1=C\frac{1+B}{2+B},\quad(13)$$

其中 $B\equiv a/(1-a)C$.所以,最终我们可以一般地写出针对所有 $s=1,2,3,\cdots$都成立的通式

$$\rho_s = sC\frac{(2s-2)!}{(s!)^2}\frac{(1+B)^s}{(2+B)^{2s-1}}. \tag{14}$$

如果我们重新标度金融市场中不同大小的人群数目 $Y_s\equiv\rho_s/C=sn_sf(s)/CN$,上式还可以更加普适地表述为

$$Y_s = \frac{(2s-2)!}{s!(s-1)!}\frac{(1-a')^{s-1}}{(2-a')^{2s-1}}. \tag{15}$$

其中 $a'\equiv a/[a+(1-a)C]$,在原始的 EZ 模型中还原为 $a'=a$.

另外由 ρ_s 的定义式(4)可知 Y_s 是满足归一化条件的.从而可以根据(14)式直接证明一个不太明显的恒等式

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{(2r-2)!}{r!(r-1)!}\frac{(1+B)^r}{(2+B)^{2r-1}} = 1, \tag{16}$$

其中 B 可以是任何正实数.

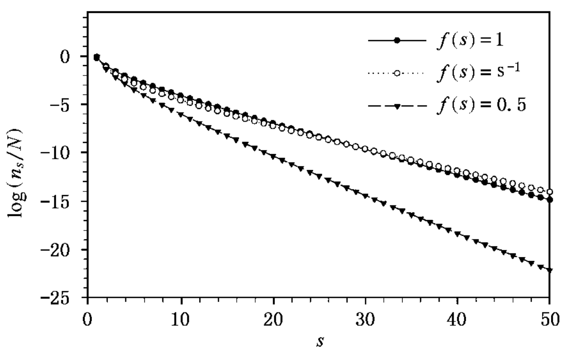

图 1 属于各种不同大小人群的交易人在总人数中所占份额随 s 增大急速单调变小的典型曲线(三个模型都取 $a=0.75$,但是其他数值各有不同:1)实心圆点的数据属于原始的 EZ 模型,即 $f(s)=1$;2)圆圈对应推广的 EZ 模型 $f(s)=s^{-1}$,而 $C\approx0.79$,$a'\approx0.79$;3)三角形的数据来自另一个推广的 EZ 模型 $f(s)=0.5$,并且 $C=0.5$,$a'\approx0.86$)

必须强调指出,(14)和(15)式并非 ρ_s 和 Y_s 的明显表达式,它只不过是方程组(3)和(4)的变形,因为其中 C 是关于所有 ρ_s 的求和.原始的 EZ 模型是一个有趣的例外.因为 $f(s)=1$,所以 $C=1$,$B=a/(1-a)$,$a'=a$ 都是常量,从而不难得到

$$\rho_s = \frac{(2s-2)!}{s!(s-1)!}\frac{(1-a)^{s-1}}{(2-a)^{2s-1}}. \tag{17}$$

在我们所讨论的各种推广的 EZ 模型中,容易证明 $\min(f(r))\leqslant C\leqslant\max(f(r))$.如果概率函数 $f(r)$是不依赖于人群大小 r 的常数 C_0,则由(15)式立即给出

$$\frac{\rho_s}{C_0} = \frac{(2s-2)!}{s!(s-1)!}\frac{(1-a')^{s-1}}{(2-a')^{2s-1}}, \tag{18}$$

对应于原始的 EZ 模型中 $a'=a/[a+(1-a)C_0]$的情形.在更一般的情形下,依赖于概率函数 $f(s)$的泛函 C 或参量 $B=a/(1-a)C$ 和 $a'\equiv a/[a+(1-a)C]$的取值由归一化条件 $\sum_{r=1}^{\infty}\rho(r)/f(r)=1$,即由关于 B 的非线性方程

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{f(r)}\frac{(2r-s)!}{(r!)^2}\frac{(1+B)^r}{B(2+B)^{2r-1}} = \frac{1-a}{a} \tag{19}$$

确定.

如果我们特别关注人群大小的分布函数,可将(15)式改写为

$$\frac{n_s}{N} = \frac{(2s-2)!}{(s!)^2}\frac{(1-a')^{s-1}}{(2-a')^{2s-1}}\frac{C}{f(s)}. \tag{20}$$

按斯特令(Stirling)公式

$$s! = \sqrt{2\pi}s^{s+\frac{1}{2}}\exp\left(-s+\frac{\theta}{12s}\right),\quad 其中\ 0<\theta<1, \tag{21}$$

可得相应的大数极限为

$$\frac{n_s}{N}\propto\left[\frac{4(1-a')}{(2-a')^2}\right]^s\frac{s^{-5/2}}{f(s)}. \tag{22}$$

为了更直观地看出模型中各种大小的人群在交易人总数中所占份额,我们将反映 n_s/B 随 s 变化的典型曲线画在图 1 中.同时,为了明确在推广的 EZ 模型中,不同形式的 $f(r)$对成群效应的影响,三个模型都选择了相同的参数 $a=0.75$.对原始的 EZ 模型,容易确定 $B=3$.在第一个推广的 EZ 模型中,我们选择了 $f(s)=0.50$,从而 $C=0.50$,$B=6$,$a'\approx0.86$.在另一个推广的 EZ 模型中,我们选择了 $f(s)=s^{-1}$;在求出参量 $B=3.79$ 之后可以简单地确定 $a'=B/(1+B)\approx0.79$ 和 $C=a/(1-a)B\approx0.79$.从图 1 的三条曲线可以看到,不同形式的概率函数 $f(r)$对人群效应有显著的影响.文献[11]人为地限定了依赖于人群大小的概率函数取简单的幂指数形式 $f(s)=s^{-\delta}(0\leqslant\delta<1)$,我们的工作提供了新的可能性,不仅 $0<\delta<1$ 的限制可以放宽,而且甚至可以不取这样一种简单的幂指数形式;与市场给出的数据对比,可以在各种推广的 EZ 模型中方便地选择与实验结果更一致的模型.

4. 结　　论

本文推广了一个关于金融市场中信息共享和人群效应的动力学模型[9].我们不仅指出了 EZ 模型可

在文献[11]的基础上再作进一步的推广，而且还细致地求解了相应的主方程.我们发现不是金融市场中属于不同大小的人群中的交易人的数目 sn_s/N 而是涉及到概率函数 $f(s)$ 的物理量 $Y_s \equiv sn_s f(s)/NC$ 才具有最广泛的普适性行为.特别需要强调的是在我们的工作中还没有对概率函数 $f(s)$ 的具体形式作任何讨论，但这并不表示它可以是任意的数学函数.比如说，作为概率函数它必须满足 $0 < f(s) < 1$ 的限制条件.另外，下一步的工作应该给出有关的数值模拟结果，特别是模拟出价格涨落的有关结果，从而判断哪一种形式的推广才最好地反映真实市场的特征和规律.

本工作开始于作者 2001 年 5 月对香港中文大学的一次学术访问.该次访问得到大学学术交流计划的资助.在访问期间作者曾就有关问题同许伯铭教授和郑大 教授等人进行了有益的讨论.作者特别感谢审稿人所提出的修改意见.

[1] de Oliveira S M, de Oliveira P M C and Stauffer D 1999 *Evolution, Money and Computers* (Teubner, Stuttgart-Leipzig)

[2] Mantegna R N and Stanley E 1999 *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance* (Combridge University Press, Combridge, England)

[3] Bouchaud J P and Potters M 2000 *Theory of financial risk* (Combridge University Press, Combridge, England)

[4] Lux T and Marchesi M 1999 *Nature* (London) **397** 498

[5] Mantegna R N and Stanley E 1995 *Nature* (London) **376** 46
Lux T 1996 *Appl. Financial Economics* **6** 463

[6] Bak P, Paczuski M and Shubik M 1997 *Physica* (Amsterdam) **246**A 430

[7] Topol R 1991 *Econ. J.* **101** 768
Bannerjee A 1993 *Rev. Econ. Studies* **60** 768

[8] Cont R and Bouchaud J P 2000 *Macroeconomic Dyn.* **4** 170

[9] Eguiluz V M and Zimmermann M G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5659

[10] D'Hulst R and Rodgers G J 2000 *Int. J. Theor. Appl. Finance* **3** 609

[11] Zheng Dafang, Hui P M and Johnson N F 2001 cond-mat/0105474 *Eur. Phys. J* B

[12] Reichl L E 1980 *A modern course in statistical physics* (University of Texas Press) chapt 6

Universal behaviors of generalized EZ model for crowding and information transmission in financial markets

Deng Wen-Ji

(*Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou* 510641, *China*)

(Received 6 July 2001; revised manuscript received 28 October 2001)

Abstract

The dynamical model for crowding and information transmission in financial markets (Eguiluz and Zimmermann, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5659 (2000)) is generalized, and the corresponding master equations of the distribution function of crowd size are solved carefully. It's proven that the quantity of re-scaled crowd size shows the expected universal behaviors.

Keywords: financial physics, crowding effects, master equations

PACC: 0500, 0565, 0250