第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1181-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.6, June, 2002

海-气振荡子中的极限环解*

封国林[1)2)] 董文杰[2)] 贾晓静[3)] 曹鸿兴[3)]

[1)](扬州大学理学院物理系,扬州 225009)

[2)](中国科学院大气物理研究所,北京 100029)

[3)](中国气象科学研究院,北京 100081)

(2001 年 6 月 1 日收到;2001 年 10 月 4 日收到修改稿)

运用 Wang 推导建立了描述 ENSO 事件的海-气振荡子的随机动力学模式,进一步证明必含有惟一的一个极限环解,这一极限环是一个稳定的吸引子,它代表了一个内在的耦合系统的年际振荡子.

关键词:ENSO, 极限环, 海-气振荡子, 随机动力学

PACC:0545

1. 引 言

南方涛动和 El Niño/La Niño(厄尔尼诺/拉尼娜)分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件,半个多世纪以来,人们相继对其物理机理进行研究,1966 年 Bjerknes 指出大气 Walker 环流与热带太平洋海表温度的观测资料(SST)在赤道太平洋两者之间的紧密联系,是热带大气和海洋运动相互作用的表现[1],因此,将南方涛动与 El Niño 循环描述成一个统一的气候现象,简称为 ENSO. 另一方面,El Niño 和 La Niño 也是互补的,由暖的位相 El Niño 和冷的 La Niño 位相构成一个过程循环.

自 Bjerknes 提出 ENSO 的概念以来,人们对发生在热带太平洋的海气系统中这一强讯号进行广泛研究.一方面 ENSO 不但影响区域和全球气候,而且以其对全球广大地区带来的严重旱涝等灾害而受到全世界人们的广泛重视[2,3].同样 ENSO 对中国气候,如东亚季风,东北地区夏季低温冷害,长江中下游地区梅雨期的旱涝等有着重要的影响[4—7].因此揭示 ENSO 的可能的循环和激发机理,对了解和预报 ENSO 有重要意义.

由于海-气相互作用的复杂性和非线性,因此用简单的模式从理论上来解释其机理,造成了很大的困难,所以,数值模式与模拟成为揭示 ENSO 时空结构的主要方法和手段.一方面,使用 SST,它本质上是混沌时间序列,运用高阶奇异谱分析[8,9]、混沌时间序列的时滞判定[10]和自忆性原理[11]等方法,可能模拟 ENSO 的生命史和冷暖位相不对称性问题以及年际平均气候冷暖态的变化,东亚季风等 ENSO 的影响.另一方面,70 年代,国际上提出了 ENSO 发生的信风张弛理论,80 年代又提出了 El Niño 的海气耦合波不稳定理论[12],90 年代,Graham 和 White 提出了 ENSO 循环是由热带太平洋三个变量:海表温度、海平面风和上层海洋厚度之间同时的、时滞的、局地的和远程的相互作用而形成的自然振荡子现象[13,14].巢纪平则从大气和海洋的热力和动力过程,以及海洋和大气的耦合波等角度去研究 ENSO 事件[15].McCreary 和 Anderson, Nellin 等还用简单概念模式、中等简化模式耦合全球气候模式(GCM)的混合模式去研究 ENSO,其中以诊断分析和数值模拟去了解 ENSO 机理的居多,数值模式能包容众多的物理过程,以描述全球性的热带海气相互作用[16,17].但这类数值模拟方法一般难以得到反映清晰的物理过程.因此,把两个介质中的物理过程尽可能地简化,得到易反映运动本质的模式方程,并求得它的解,仍然是十分重要的,它能成功模拟出 ENSO 的许多重要现象,了解这些现象的物理机理,且能运用非线性科学的最新成果[8,9]来了解 ENSO 的演变过程,而这些用复杂的全球海气耦合模式未必能做到.

ENSO 循环具有周期性、尺度选择特性和异常

* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号:G1999043408)和国家自然科学基金(批准号:40175024,40175027)资助的课题.

的物理结构,因此只有从非线性动力气候学来研究才有可能获得进一步了解.ENSO 生命史是如何完成的,一个暖的厄尔尼诺状态如何转换到一个冷的拉尼娜状态 非周期的 ENSO 循环是如何产生的.这些问题的解决有待于运用非线性科学的新成果在 ENSO 研究中进行应用.

1988 年 Graham 和 White,及 1995 年 Mantua 和 Battisi 他们认为 ENSO 的非周期性也许是高频率随机力或 ENSO 系统的内在的非线性.中尺度耦合数值模式试验表明 ENSO 的非周期性本质上是被年际循环所驱动的低维混沌的演化行为[13].1999 年,Wang 在此基础上,通过物理简化和繁杂的数学推导建立了描述 ENSO 事件的海-气振荡子的随机动力学模式.本文进一步证明必含有唯一的一个极限环解,这一极限环是一个稳定的吸引子,它代表了一个内在的耦合系统的年际振荡子[18,19].

2. ENSO 事件随机动力模型

描述海表温度距平 SST(T)和温跃层厚度(h)的 ENSO 事件随机动力方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a_1T+a_2h+a_3T^2-a_3\mu'Th-2T^3+\Gamma(t),$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}=2bh-bT-2h^3+\Gamma(t),\tag{1}$$

其中,a_1,a_2,a_3,μ',b 各参数的物理含义和定义见文献[19],$\Gamma(t)$为 ENSO 事件系统内部或系统外部的随机噪声.对其确定性方程重新标度.

令

$$x=\sqrt{2}T-\frac{a_3}{3\sqrt{2}},\quad y=\sqrt{2}h,$$

代入(1)式,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha_1x-x^3-\varepsilon_1(x-y)+\mu xy+\Gamma(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha_2y-y^3-\varepsilon_2(y-x)+\Gamma(t),\tag{2}$$

其中

$$\alpha_1=a_1+a_2+a_3^2(1-\mu')/6,\quad \varepsilon_1=a_2-a_3^2\mu'/6,$$
$$\mu=-\frac{\sqrt{2}}{2}a_3\mu',\quad \alpha_2=b,\quad \varepsilon_2=-b,$$

μ'为耦合交换系数,且 a_1,a_2,a_3,μ',b 为可调参数,因此,适当调整参量使 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$,$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$,则(2)式变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x-x^3-\varepsilon(x-y)+\mu xy+\Gamma(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha y-y^3-\varepsilon(y-x)+\Gamma(t).\tag{3}$$

一般假设 $\Gamma(t)$为白噪声,且$\langle\Gamma(t)\rangle=0$,$\langle\Gamma(t')\Gamma(t)\rangle=2D(t-t')$,$D$ 为噪声强度.与物理中薛洛格(Schlogl)化学反应模型进行类比可发现,式中 ε 可以认为海表温度距平 SST(T)和温跃层(h)之间的扩散,μxy 为一交叉项,且 μ 为一小量,$\varepsilon>0$.(3)式是一个随机非线性方程组,它描述着海表温度距平 SST(T)和温跃层(h)之间的复杂的非线性效应.当然 ENSO 的动力系统是一个极其复杂的系统,简化的(1)式仅仅是描述 ENSO 的主要特征,在海-气相互作用允许的范围内,令参数 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$,$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ 相等,其目的是分析得到 ENSO 一些特例的解析性质.

3. 海-气动力系统的稳态解与讨论

无论对微分方程组还是随机动力方程组,首先需要求出稳态解,其原因求解一个复杂的非线性方程组的解析解是很困难的.因此只有先求出稳态解,然后通过稳定性分析或线性化,再进一步了解稳态附近或邻域内的演化.

描述 ENSO 事件的非线性方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x-x^3-\varepsilon(x-y),\tag{4a}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\alpha y-y^3-\varepsilon(y-x),\tag{4b}$$

此即化学中的薛洛格双匣模型.在动力气候学的箱匣模型中,将大气、海洋视为箱匣,建立辐射-对流模型.从我们导得的(4)式来看,不但说明了箱匣模型的合理性,也证明了不同学科中某些概念理论的通用性.

3.1. 一个稳定的极限环

首先证明(4)式存在一个稳定的极限环,它描述 ENSO 事件的准正常稳定态,必须含有唯一的一个极限环解,这一极限环是一个稳定的吸引子,它代表了一个内在的耦合系统的年际振荡.经复杂的计算,(4)式可改写成单变量高阶方程,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=B_1(y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^3+B_2(y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+B_3(y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)+B_4(y),\tag{5}$$

其中

$$B_1(y) = -\frac{1}{\varepsilon^3},$$

$$B_2(y) = \frac{3}{\varepsilon^3}(Ay - y^3),$$

$$B_3(y) = 2A - 3\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^3}A^2\right)y^2 + \frac{6A}{\varepsilon^3}y^4 - \frac{3}{\varepsilon^3}y^6,$$

$$B_4(y) = \frac{1}{\varepsilon^3}y^9 + \frac{3A}{\varepsilon^3}y^7 - \frac{3A^2}{\varepsilon^3}y^5 + \left(\frac{A^2}{\varepsilon^3} + A\right)y^3 + (\varepsilon - A^2)y,$$

$$A = \alpha - \varepsilon.$$

设$\frac{dy}{dt} = z$,则

$$\dot{y} = z,$$
$$\dot{z} = B_1(y)(z)^3 + B_2(y)(z)^2 + B_3(y)(z) + B_4(y). \tag{6}$$

一般对极限环而言,系统在极限环轨道上的总能量变化率该为 0,设系统的总能量为

$$E = \text{动能} + \text{势能} = \frac{1}{2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}y^2, \tag{7}$$

所以,$\int_t^{t+T}\frac{dE}{dt}dt = 0$,即

$$\int_t^{t+T}\frac{d\left[\frac{1}{2}(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}y^2\right]}{dt}dt = \int_t^{t+T}(\dot{y}\ddot{y} + y\dot{y})dt = 0. \tag{8}$$

由(6)式知

$$\int_t^{t+T}\{B_1(y)\dot{y}^4 + B_2(y)\dot{y}^3 + B_3(y)\dot{y}^2 + [y + B_4(y)]\dot{y}\}dt = 0. \tag{9}$$

设极限环的平均半径为 $\bar{r}$,则设系统所存在的周期解为

$$y = \bar{r}\cos t, \dot{y} = -\bar{r}\sin t. \tag{10}$$

并令 $t = 0, T = 2\pi$,则

$$\int_0^{2\pi}B_1(y)\dot{y}^4dt$$
$$= -\frac{1}{\varepsilon^3}\bar{r}^4\left(-\frac{1}{4}\sin^3 t\cos t\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{4\varepsilon^3}\bar{r}^4\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt$$
$$= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\bar{r}^4\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$
$$= -\frac{3}{4\varepsilon^3}\bar{r}^4\pi, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi}y^n\dot{y}^3dt = -\int_0^{2\pi}\bar{r}^{n+3}\cos^n t\sin^3 t\,dt$$
$$= \bar{r}^{n+3}\int_0^{2\pi}\cos^n t(1 - \cos^2 t)\,d\cos t = 0,$$

即

$$\int_0^{2\pi}B_2(y)\dot{y}^3dt = 0. \tag{12}$$

同理, $\int_0^{2\pi}y^n\dot{y}dt = 0, \int_0^{2\pi}B_4(y)\dot{y}dt = 0. \tag{13}$

此外,

$$\int_0^{2\pi}\dot{y}^2dt = \bar{r}\pi, \int_0^{2\pi}y^2\dot{y}^2dt = \frac{1}{4}\bar{r}^4\pi,$$
$$\int_0^{2\pi}y^4\dot{y}^2dt = \frac{1}{8}\bar{r}^6\pi, \int_0^{2\pi}y^6\dot{y}^2dt = \frac{5}{64}\bar{r}^8\pi,$$
$$\int_0^{2\pi}y^{2n+1}\dot{y}^2dt = 0. \tag{14}$$

将(11—14)式代入(9)式,得

$$\int_t^{t+T}\{B_1(y)\dot{y}^4 + B_2(y)\dot{y}^3 + B_3(y)\dot{y}^2 + [y + B_4(y)]\dot{y}\}dt$$
$$= \bar{r}^2\pi\left[-\frac{15}{64\varepsilon^3}\bar{r}^6 + \frac{3A}{4\varepsilon^3}\bar{r}^4 - \frac{3}{4}\bar{r}^2 - \frac{3A^2}{4\varepsilon^3}\bar{r}^2 - \frac{3}{4\varepsilon^3}\bar{r}^2 + 2A\right] = 0. \tag{15}$$

令 $\bar{r}^2 = f$,则

$$-\frac{15}{64\varepsilon^3}f\pi\left[f^3 - \frac{16}{5}Af^2 + \frac{16}{5}(\varepsilon^3 + A^2 + 1)f - \frac{128}{15}A\varepsilon^3\right] = 0. \tag{16}$$

设 $f' = f + \frac{16A}{15}$,则(16)式后一因子变为

$$f'^3 + pf + q = 0, \tag{17}$$

其中 p, q 可以用 A, ε 来表示.(17)式的三个根可用公式表示为

$$f'_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$
$$f'_2 = \omega_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$
$$f'_2 = \omega_2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \omega_1\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \tag{18}$$

式中 $\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.经计算,$3\varepsilon > 1$ 时,f'_1 为一个正实根,$\bar{r}^2 = B$,$(B = -\frac{16A}{15} + f'_1)$.

且 $\bar{r}^2 < B$ 时，$\int_t^{t+T}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} > 0$ 而当 $\bar{r}^2 > B$ 时，$\int_t^{t+T}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} < 0$，这充分表明了随着时间的增长极限环内的运动将由于能量增加而逼近极限环，同时极限环外将由于能量的减少而逼近极限环，从而证明 ENSO 事件动力学系统中存在一个稳定的极限环．说明大气、海洋环流中的其他因素激发了 ENSO，但基于能量守恒能量只是在全球范围内的重新调整和分配，El Niño 或 La Niño 的反位相可能也是遵循能量守恒定律的结果．事实上，由于海洋和大气在动力学和热力学方面均在相互调整着，因此，一旦异常条件强到能破坏大气和海洋之间的平衡状态，则可以在新的条件下进行相互适应和调整使异常的过程持续发展，而发展成为 El Niño 或 La Niño 型的准平衡状态．

3.2. 稳态解

令 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$，

$$\alpha x - x^3 - \varepsilon(x - y) = 0, \tag{19a}$$

$$\alpha y - y^3 - \varepsilon(y - x) = 0. \tag{19b}$$

当 $\alpha < 0$，方程(19)只有一个稳态解，$x_0 = 0$，$y_0 = 0$，可以解释为准正常的海气相互作用的稳态．若海气相互作用都维持在 $\alpha < 0$ 条件下，气候预测与观测将会大大的简化．事实上，在外界噪声的影响下以及海-气耦合系统的内在随机涨落，可使得 $\alpha > 0$，这样就会产生复杂和难以预测的异常气候．

当 $\alpha > 0$，且 $\alpha > 3\varepsilon$ 时，此时 $x_0 = 0$，$y_0 = 0$ 变为一个不稳定的鞍点，且有一对对称稳定的结点（$x_1 = y_1 = \sqrt{\alpha}$，$x_2 = y_2 = -\sqrt{\alpha}$）和一对反对称的稳定结点（$x_3 = y_3 = \sqrt{\alpha - 2\varepsilon}$，$x_4 = y_4 = -\sqrt{\alpha - 2\varepsilon}$），另外还有 4 个周期解．$\alpha = 0$ 是一个分岔点．

给定一个确定性的动力学系统，如(19)式，存在两类定态解，一类是稳定态，另一类是不稳定态．这两类定态具有完全不同的渐近行为．当系统处于稳定态附近时，它将随时间趋于这一稳定态；而当它处于不稳定态附近时，系统将会远离这一稳定态而去．这样不稳定态似乎在现实中是不存在的，从而研究这稳定态演化没有多大的现实意义．但实际情况并非如此，在非线性系统中，不稳定态的演化出现在许多具有实际意义的过程中，研究这些演化的特点及随机力在演化中所起的作用，是非线性系统随机理论的重要内容．(1)式随时间演化的理论分析需要用 Fokker-Planck 方程来研究[20—22]，具体结果将另文发表．

对丑纪范先生的具体指导表示感谢．

[1] Bjerknes J 1969 *Mon*. *Wea*. *Rev*. **97** 163
[2] Barber R F and Chavez F P 1983 *Science* **222** 1203
[3] Ropelewski O F and Holpert M S 1987 *Mon*. *Wea*. *rev*. **115** 1606
[4] Wu G X and Meng W 1998 *Chinese Atmospheric Sciences* **22** 470(in Chinese)[吴国雄、孟 文 1998 大气科学 **22** 470]
[5] Jin Z H and Tao S Y 1999 *Chinese Atmospheric Sciences* **23** 663(in Chinese)[金祖辉、陶诗言 1999 大气科学 **23** 663]
[6] Li C Y and Mu M Q 1998 *Chinese Atmospheric Sciences* **22** 481(in Chinese)[李崇银、穆明权 1998 大气科学 **22** 481]
[7] Li C Y 1974 *Sciences in China*(B series) **6** 667
[8] Yuan J and Xiao X C 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 897(in Chinese)[袁 坚、肖先赐 1998 物理学报 **47** 897]
[9] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1221(in Chinese)[张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 1221]
[10] Tian Y C 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 442(in Chinese)[田玉楚 1997 物理学报 **46** 442]
[11] Feng G L *et al* 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 606(in Chinese)[封国林等 2000 物理学报 **50** 606]
[12] Neelin J D 1990 *J*. *Atmos*. *Sci*. **47** 674
[13] Graham N E and White W B 1988 *Science* **240** 1293
[14] Graham N E and White W B 1990 *J*. *Phys*. *Res*. **96** 3125
[15] Chao J P 1993 *ENSO Dynamics*(Beijing:China Meteorological Press) pp 300–309(in Chinese)[巢纪平 1993 厄尔尼诺和南方涛动动力学(北京:气象出版社)第 300–309 页]
[16] McCreary J P and Anderson D L T 1991 *J*. *Geophys*. *Res*. **96** 3125
[17] Nellin J D *et al* 1992 *Climate Dynamics* **7** 73
[18] Wang B and Fang Z 1996 *J*. *Atmos*. *Sci*. **53** 2786
[19] Wang B and Fang Z 1999 *J*. *Atmos*. *Sci*. **56** 565
[20] Liu S K *et al* 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10(in Chinese)[刘式适等 2001 物理学报 **51** 10]
[21] Lu Z H *et al* 1993 *Acta Phys*. *Sin*. **42** 1556(in Chinese)[卢志恒等 1993 物理学报 **42** 1556]
[22] Wang J F *et al* 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 2305(in Chinese)[王嘉赋等 1997 物理学报 **46** 2305]

On the dynamics behavour and instability evolution of air-sea oscialltor *

Feng Guo-Lin[1)2)] Dong Wen-Jie[2)] Jia Xiao-Jing[3)] Cao Hong-Xing[3)]

[1)] (*Department of Physics*, *Mathematics and Physics College*, *Yangzhou University*, *Yangzhou* 225009, *China*)

[2)] (*Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

[3)] (*Academy of Meteorological Sciences*, *Beijing* 100081, *China*)

(Received 1 June 2001; revised manuscript received 4 October 2001)

Abstract

In the view of non-equilibrium dynamics system, a limited cycle was proved in the equations of nonlinear stochastic air-sea oscillator on ENSO event, which was an stability absorber standing coupled system annual oscillator.

Keywords: ENSO, a limited cycle, air-sea oscillator, stochastic dynamics

PACC: 0545

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. G1999043408), and the National Natural Sciences Foundation of China (Grant Nos. 40175024, 40175027).