

离子通道回旋电子注受激辐射非线性理论*

唐昌建¹⁾ 钱尚介²⁾

¹⁾ 四川大学物理科学与技术学院, 成都 610065)

²⁾ 核工业西南物理研究院, 成都 610041)

(2001 年 8 月 6 日收到, 2001 年 9 月 28 日收到修改稿)

建立了离子通道电子回旋脉塞的非线性理论体系构架. 利用粒子模拟的理论方法论证了该系统由实验发现的电磁不稳定性机理. 文中对散射波自洽增长的时间响应进行了数值模拟计算, 研究了离子密度、电子注入能量对电磁散射波的功率、频率以及工作效率的非线性影响.

关键词: 电磁辐射, 非线性, 高功率毫米波源, 等离子体

PACC: 4230D, 4255T, 4255V, 4235M

1. 引 言

研究电子束在等离子体中传播过程中束、等离子体、波相互作用而引起和可能引起的物理问题, 是科学界十分关注的重要课题^[1-5]. 当电子束通过等离子体空间时, 如果满足 $n_p \gg n_b / \gamma^2$ (n_b 是电子注密度, n_p 为等离子体密度, γ 是电子注的相对论因子) 则存在两个基本物理过程. 一是相对论电子束将推开等离子体电子, 在其传播的轨道柱上留下一相对静态的离子群, 被称为离子通道 (Ion-Channel). 二是在满足一定的条件下, 通道中离子空间电荷场将稳定的对电子束聚焦而产生电磁相干辐射. 20 世纪 90 年代初, Whittum 及 Sessler 教授首次提出了离子通道激光的物理模型 (ICL)^[4]. 在此基础上, Tang 等分析了在通道内引入回旋电子注的聚焦机理, 建立了离子通道电子回旋脉塞 (ICECM) 系统并针对该系统电磁不稳定性进行了研究^[6]. 由于离子聚焦机理 (IFR) 的巨大潜力的, 近几年该课题已成为相关领域的热点^[7-11].

我们已经注意到, 由于离子通道暂态特性所致, 稳定维持通道对电子注聚焦是否满足对应的时间准则问题、电磁辐射对短脉冲电子注的时间响应问题、系统的工作效率以及各工作参量对非线性过程的影响等方面的问题, 需建立相应的非线性理论进行研究.

2. 暂态非线性微分方程组

图 1 为 ICECM 结构及坐标系. 由于 I 区与 II 区散射波场幅有固定线性关系^[3], 我们研究注-波相互作用的非线性过程仅需考虑 II 区中的场. 设 ICECM 存在 Compton 情形, 纵向等离子体静电波可略. 对 TE_{mn} 波, 通道内散射波的位函数为

$$\Psi_{mn}(r, \varphi) = C_{mn} J_m(K_{mn} r) e^{\pm jm\varphi}, \quad (1)$$

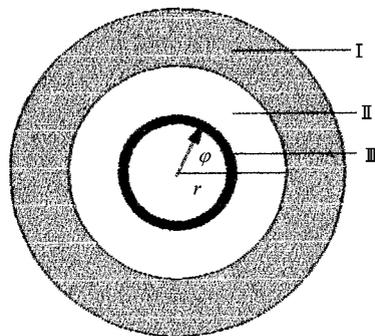


图 1 ICECM 结构及坐标系 I 准静态等离子体; II 离子通道; III 相对论回旋电子注

式中, C_{mn} 为波模的归一化系数, $J_m(K_{mn} r)$ 为 m 阶 Bessell 函数. 通道内横向电场可以证明是

$$E(r, \varphi, z, t) = \tilde{A}(z, t) e_{mn}(r, \varphi) e^{-j\omega_0 t}, \quad (2)$$

式中 $e_{mn}(r, \varphi) = \hat{z} \times \nabla_t \Psi_{mn}^{\pm}$, ω_0 为波的参考频率,

* 国家自然科学基金 (批准号 69493505) 资助的课题.

$\tilde{A}(z, t)$ 为场复振幅. 设通道内 $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_0$ 且各向同性, 考虑场的相对缓变条件, 将(2)式对时间取二阶微商, 由 Maxwell 含源波动方程可以导出

$$\left\{ \mathbf{e}_{mn} \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega_0^2}{C^2} - K_{mn}^2 \right) \tilde{A} + \mathbf{e}_{mn} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2j\omega_0 \tilde{A}}{C^2} \right) \right\} e^{-j\omega_0 t} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_t, \quad (3)$$

式中 \mathbf{J}_t 为通道中回旋电子注的电流密度. 由于周期运动的电子注所提供的电流密度也具有周期性, 设 \mathbf{J}_ω 为周期电流密度的平均幅值, 则^[10]

$$\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_\omega e^{-j\omega_0 t}. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 然后在通道内作积分

$$\int_0^L \left[\tilde{A}^* \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2} + 2 \frac{\omega_0^2 - \omega_c^2}{C^2} \tilde{A} \tilde{A}^* + 2j \frac{\omega_0}{C^2} \left(\tilde{A}^* \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} - \tilde{A} \frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial t} \right) \right] dz = -j\mu_0 \omega_0 \int_v \left[\tilde{A}^* (\mathbf{J}_\omega \cdot \mathbf{e}_{mn}^*) - \tilde{A} (\mathbf{J}_\omega^* \cdot \mathbf{e}_{mn}) \right] dv, \quad (5)$$

$$\int_0^L \left[\tilde{A}^* \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \tilde{A} \frac{\partial^2 A^*}{\partial z^2} + 2j \frac{\omega_0}{C^2} \frac{\partial |A|^2}{\partial t} \right] dz = -j\mu_0 \omega_0 \int_v \left[\tilde{A}^* (\mathbf{J}_\omega \cdot \mathbf{e}_{mn}^*) + \tilde{A} (\mathbf{J}_\omega^* \cdot \mathbf{e}_{mn}) \right] dv, \quad (6)$$

式中 ω_c 为散射波截止频率. 设复振幅 $\tilde{A}(z, t)$ 可以写成分离变量的形式^[11]

$$\tilde{A}(z, t) = a(t) e^{-j\psi(t)} f(z), \quad (7)$$

式中 $a(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是散射波的时间幅值和扰动相位, $f(z)$ 是场的纵向分布函数, 设具有如下高斯形式

$$f(z) = \exp[-K_z^2(z - \sigma L)^2], \quad (8)$$

显然, ICECM 的实际工作频率为 $\omega = \omega_0 + \frac{d\psi}{dt}$. 将以上各式整理可以解出

$$\frac{da}{dt} = -\frac{c^2}{4N\mu_0} s(t) - \frac{\omega_0}{2Q} a(t), \quad (9)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{2\omega_0} - \frac{c^2 j\mu_0}{4Na(t)} u(t). \quad (10)$$

以上两式是描述 ICECM 起振过程的暂态微分方程组, 它决定了散射波的幅值和相位随时间变化的非线性关系. 式中, $N = \int_0^L |f(z)|^2 dz$, Q 为通道等效绕射品质因素. $s(t)$ 和 $u(t)$ 命为耦合函数, 其数学形式为

$$s(t) = \int_0^L f(z) \mathbf{I}(\mathbf{J}_\omega \cdot \mathbf{e}_{mn}^*) e^{j\psi} + (\mathbf{J}_\omega^* \cdot \mathbf{e}_{mn}) e^{-j\psi} dz, \quad (11)$$

$$u(t) = \int_0^L f(z) \mathbf{I}(\mathbf{J}_\omega \cdot \mathbf{e}_{mn}^*) e^{j\psi} - (\mathbf{J}_\omega^* \cdot \mathbf{e}_{mn}) e^{-j\psi} dz. \quad (12)$$

从物理意义上讲, 耦合函数由散射波场与电子注电流共同决定, 它给出了注-波相互作用的所有信息, 表征了注-波相互作用的特征. 因此, 求解耦合函数是研究自洽场非线性理论的核心内容.

3. 注-波相互作用耦合函数

在图1坐标 (r, φ, z) 中, 设 II 区内离子密度为 n_i , 且假定 $\nabla n_i = 0$, 以及 $\frac{\partial n_i}{\partial t} = 0$, 则离子电荷的静场位势为 $\Phi = -n_i e r^2 / 4\epsilon_0$. 由电子相对论动力学方程可得

$$\gamma \omega_0^2 m_0 r = -|e| \frac{\partial}{\partial r} \Phi(r), \quad (13)$$

式中, γ 为电子的相对论因子, m_0 和 e 是电子的质量和电量. 设 Ω 为电子回旋频率, 由(13)式有

$$\Omega = \left(\frac{|e|^2 n_i}{2\epsilon_0 m_0 \gamma_0} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

式中 γ_0 为电子入射时的相对论因子, 定义

$$\varphi = \Omega t + \psi(t). \quad (15)$$

式中 $\psi(t)$ 为电子的扰动力学相位. 考虑电子的相对论动力学方程

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -|e| \left(\mathbf{E} + \frac{1}{\gamma m_0} \right) \mathbf{P} \times \mathbf{B} \quad (16)$$

以及能量关系

$$\frac{d\epsilon}{dt} = m_0 C^2 \frac{d\gamma}{dt}, \quad (17)$$

可以推出

$$\frac{dP_t}{dt} = -|e| \left(E_\varphi + \frac{P_z B_R}{\gamma m_0} \right),$$

$$\frac{d\phi}{dt} = |e| \left[E_R + \frac{1}{\gamma m_0} (P_t B_z - P_z B_\varphi) \right] \frac{1}{P_t}$$

$$- \Omega \left(1 - \frac{P_\omega}{P_t} \right),$$

$$\frac{dP_z}{dt} = |e| \frac{P_t B_R}{\gamma m_0},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -|e| \frac{P_t E_\varphi}{m_0 C^2 \gamma}. \quad (18)$$

因 \mathbf{J}_ω 是周期电子注电流密度平均值, 由(4)式有

$$J_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_t e^{j\omega_0 t} d(\omega_0 t), \quad (19)$$

将以上关系代入(11)式和(12)式有耦合函数的具体形式

$$s(t) = -4I_0 C_{mn} \int_0^L \frac{P_t}{P_z} f(z) \times K_{mn} J'_m(K_{mn} r) \cos \xi_{\xi_0} dz, \quad (20)$$

$$u(t) = -4I_0 C_{mn} \int_0^L \frac{P_t}{P_z} f(z) \times K_{mn} J'_m(K_{mn} r) \sin \xi_{\xi_0} dz,$$

式中 $\xi = \omega_0 t + \psi \mp m\varphi, \dots \xi_0$ 表示括号内中的函数需在初量 ξ_0 上取平均. 由 Maxwell 旋度方程, 散射波的各场分量为

$$E_r = \mp a(t) f(z) C_{mn} \frac{m}{r} J_m(K_{mn} r) \sin \xi,$$

$$E_\varphi = a(t) f(z) C_{mn} K_{mn} J'_m(K_{mn} r) \cos \xi,$$

$$E_z = 0,$$

$$B_r = \frac{\partial f(z)}{\partial z} C_{mn} K_{mn} J'_m(K_{mn} r) \times \{a(t) (\omega_0 - \dot{\psi}) \sin z + \dot{a}(t) \cos z\} \frac{1}{\omega_0},$$

$$B_\varphi = \mp \frac{\partial f(z)}{\partial z} C_{mn} \frac{m}{r} J_m(K_{mn} r) \times \{a(t) (\omega_0 - \dot{\psi}) \cos z - \dot{a}(t) \sin z\} \frac{1}{\omega_0},$$

$$B_z = K_{mn}^2 C_{mn} f(z) J_m(K_{mn} r) \times \{a(t) (\omega_0 - \dot{\psi}) \sin z + \dot{a}(t) \cos z\} \frac{1}{\omega_0^2}, \quad (21)$$

式中, 正负号代表角向两个不同旋转方向的行波. 需要指出的是, 电子的回旋半径 r 没有考虑它的微分方程所带来的扰动量, 但它可表示为电子相对论因子 γ 的单调函数, 即

$$r(\gamma) = \sqrt{\frac{\gamma - 1/\gamma}{1 + 1/\alpha^2}} / \Omega_0, \quad (22)$$

式中 Ω_0 为电子的非相对论回旋频率, $\alpha = \frac{v_t}{v_z}$. 由此, 联立(18)(20)(21)以及(22)各式, 耦合函数方可求解. 通过(9)式和(10)式就能确定 ICECM 暂态非线性过程.

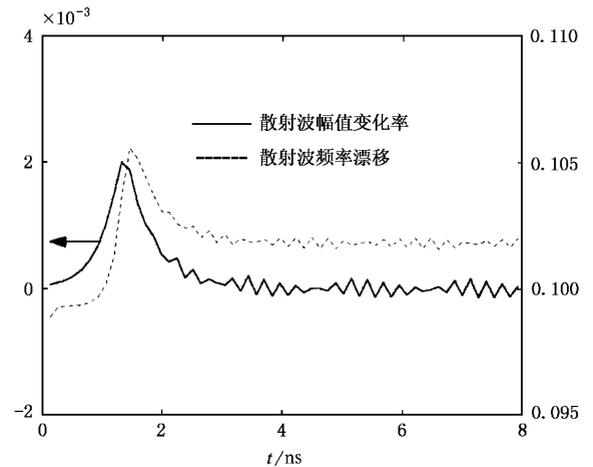
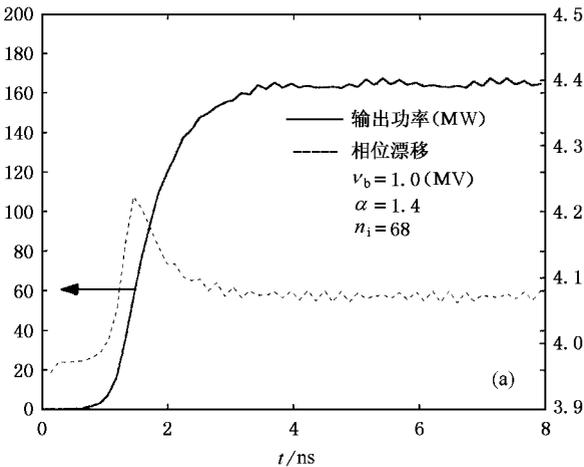
4. 计算模拟结果与分析

表 1 给出计算中使用的参数.

计算中沿通道 z 方向将电子注分为 500 层, 而每一层参与计算的回旋电子数为 800, 对于每一层参与计算的电子, 我们采用复式跟踪计算最后求平均的办法来进行的. 计算的结果如图 2 所示.

表 1 计算中所使用的一组参数

工作模式	截止波长	通道半径	通道长度	品质因素	离子密度	发射角 α	工作电流	加速电压
TE ₁₃	8mm	10.87mm	32mm	200	$68 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$	1.2	1.5kA	1MV



(a) 通道电磁辐射波功率及漂移相位随时间变化的关系

(b) 通道电磁辐射波幅值率及频率漂移 $\Delta\bar{\omega} = (\omega - \omega_0) / \omega_0$ 随时间变化的关系

图 2 ICECM 电磁辐射的非线性过程

根据图 2 计算的结果,我们作如下讨论.

首先我们注意到,从电子注入通道开始至散射波达到峰值所历时间约在 $\tau = 4\text{ns}$ 以内.对于计算中所取的等离子密度,其电子的振荡频率 $\omega_e = 4.37 \times 10^{11}\text{Hz}$.显然, $\tau\omega_e \gg 1$.这一结果表明,穿过通道的脉冲电子注时间已足够长,因而离子通道与准等离子体交界面上的等离子体电子不能产生振荡而影响 ICECM 的工作.另一方面,由于离子质量远大于电子质量,因而通道内离子振荡频率 ω_i 应在 10^7 量级上,这就有 $\tau\omega_i \ll 1$.物理意义上表示电子注产生电磁辐射达到峰值以前,通道内离子不能形成振荡而避免离子通道的崩溃.综上,ICECM 的结构要求 $\tau_e \ll \tau \ll \tau_i$ 时间准则条件(式中 τ_e 与 τ_i 分别为电子与离子的特征反映时间).目前的数值计算认定是可以保证的.

其次,散射波功率在一段时间后出现饱和状态.我们曾在离子通道线性理论^[5]中作过讨论,ICECM 的电磁不稳定性只有当电子的横向动量满足 $P_t > P_{ct}$ (其中 P_{ct} 为发生 ICECM 电磁不稳定性时横向动量的阈值)时,才有不稳定性出现.显然,当散射波在非线形过程中逐渐增长时,电子逐步交出能量,当其动量接近 P_{ct} 时,电子交出能量达到最大.图 3 给出 $t = 8\text{ns}$ 时通道内某横面层电子在通道中整个运行期间的相空间图.图中选择的 20 个电子入射时均分布在 $0-2\pi$ 的通道空间,初始动量归一化值 $\bar{P}_{i0} = 1.81$.一部分电子与波相互作用后交出能量, P_t 变小最后趋于稳定.出现饱和的另一个原因是相位捕获.图 3 可以发现一小部分电子的相空间轨迹呈半封闭且位于 P_{i0} 以上.这一部分电子的扰动相位变化局限在一个小范围内且恒定交出能量.从图中还可以发现交出能量的电子数大于获得能量的电子数且交出能量的幅度较大.

另外,图 2(b) 给出了波失谐量的相对值 $\delta\omega = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ 与场幅变化率 $\frac{dA}{dt}$ 随时间的变化关系.由图可知,ICECM 在起振过程中注-波相互作用影响着输出波的频率.线性理论分析已经表明,由注-波相互作用的谐振条件所决定,在 ICECM 起振时,对于不同频率的波来说,只有满足谐振条件的波才会有波的增长.从图中看到,增长波的实际频率 ω 已偏离我们设定的参考频率 ω_0 .当波达到饱和时 ω 处于稳定.饱和时 $\delta\omega \approx 0.1$,即有 $\omega = 1.1\omega_0$.因为计算中已取 $\omega_0 =$

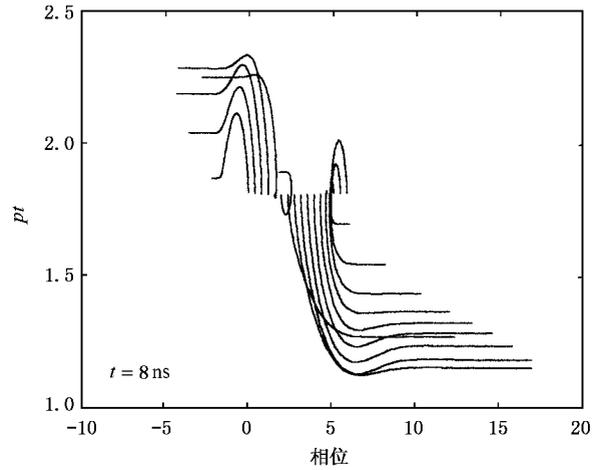


图 3 饱和时电子群的相空间图

$\omega_r = 258\text{GHz}$,所以本文计算的工作模式散射波频率可达 284GHz .

关于电子与波相互作用的效率计算有两种方法.设效率为 η ,理论计算中如果不考虑通道的粒子碰撞损失则有

$$P_{\text{out}} = \eta I_0 V_b, \quad (23)$$

其中波的输出功率 P_{out} 可由

$$P_{\text{out}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 a^2 N \omega_0 / Q \quad (24)$$

计算.按此公式给出图 2(a) 的输出功率曲线.由图可知,饱和输出功率为 $P_{\text{out}} \approx 160\text{MW}$,而 $P_{\text{in}} = 1500\text{MW}$,所以 $\eta = 10.66\%$.电子与波的相互作用效率还可用

$$\eta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_0 - \gamma_i}{\gamma_0 - 1} \quad (25)$$

计算.式中 γ_0 为每一个电子进入通道时的相对论因子, γ_i 为该电子传播中任意时刻的相对论因子, n 为参与计算的电子数.图 4 按上式计算方法给出了 $t = 4\text{ns}$ 时,通道内沿 z 方向不同电子层的注-波相互作用效率关系.图中描述了五个不同电子层的效率数据点.其矩阵为 $\eta = [0.0037 \ 0.0986 \ 0.1421 \ 0.1420 \ 0.1420]$.该 5 个数据的平均值为 $\bar{\eta} = 10.56\%$.显然,两种完全不同的方法计算结果基本相同.此方法可用来作为检查粒子模拟程序是否正确的重要手段.

另外,通过对电子云图的粒子模拟,还能观察到一个重要的现象.我们将沿 z 方向不同电子层面的电子全部叠加在一张如图 5 所示二维平面图上.由图可以看出:1)回旋电子注能保持较好的聚焦形态.

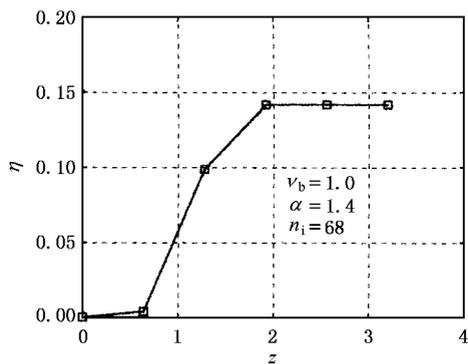


图 4 注-波相互作用效率沿 z 方向的分布

另外,电子注的内径变小,且群聚中心点逐渐右旋,靠近初始半径的内侧是电子集密的地方,内侧总的电子数远大于外侧电子数,这说明失去能量的电子数远大于获得能量的电子数,因而散射波增长.

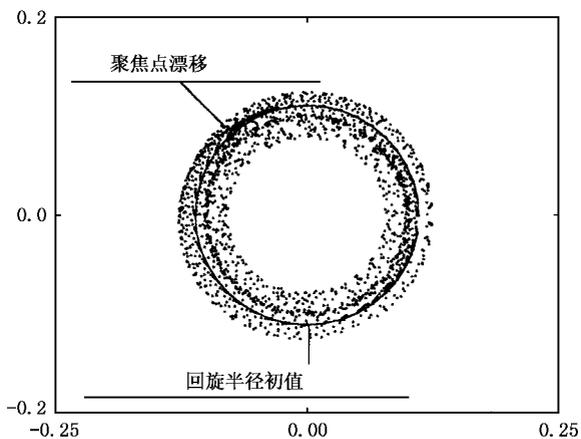


图 5 各不同电子层叠加的二维电子云图

图 6 表现了不同离子密度的散射波饱和效率,因为不同的离子密度会导致不同的电子回旋频率,而在给定的计算条件下满足谐振条件或波增长条件

的电子回旋频率最佳值只有一个,所以在对应最佳离子密度的两边,注-波相互作用效率都减小.

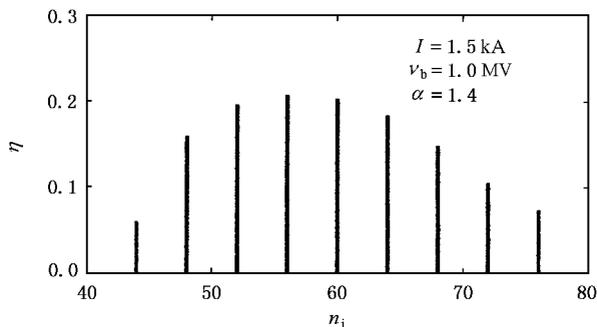


图 6 饱和效率与离子密度的关系(图中离子密度单位为 10^{12}cm^{-3})

5. 结 论

本文建立了 ICECM 非线性微分方程组,从不同的侧面论证了所建立基本理论的方法和结论的正确性.通过本文阐述的理论提出并证明了 ICECM 的时间准则,描述了非线性过程的一些重要特征.借助于粒子模拟的方法发现了离子通道对回旋电子注聚焦机理的潜力.与普通电子回旋脉塞相比,ICECM 工作频率的提高不受强磁场要求的限制,调整等离子体密度即可改变 ICECM 的辐射频率,在提高微波的输出功率、相互作用效率以及稳定性方面都比其他传统相对论高功率微波器件具有更强的吸引力.按本文的计算,在中等等离子体密度的情况下,可获得高达频率 280GHz、功率为 160MW 的毫米波.诚然,本文对 ICECM 的非线性理论研究仅仅是初步的.许多更深一步的问题,如边界问题、考虑纵向等离子体情形时的问题,增加纵向磁场出现复合模等有关与工程实际更接近的问题尚需进一步加以研究.

[1] Carmel Y et al 1992 *Phys. Fluids*. B **4** 2286
 [2] Whittum D H et al 1993 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **21** 136
 [3] Liu S G and Barker R J 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 2135
 [4] Whittum D H, Sessler A M et al 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 2511
 [5] Tang C J, Liu P K and Liu S G 1996 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **29** 90
 [6] 唐昌建,刘濮鲲,刘盛纲 1995 红与毫米波学报 **14** 407
 [7] Parashar J et al 1997 *J. Plasma Phys.* **58** 613
 [8] Jha P et al 1998 *Phys. Rev. E* **57** 2256
 [9] Liu S G et al 2000 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **28** 1016
 [10] Tang C J et al 1993 *Science in China* **23** 766 [in Chinese] 唐昌建等 1993 中国科学 **23** 766]
 [11] Fliflet A W and Manheimer W M 1989 *Phys. Rev. A* **39** 3432
 [12] Li Z K 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 893 [in Chinese] 李治宽 2000 物理学报 **49** 893]
 [13] Li Y J et al 2001 *Chin. Phys.* **10** 516

The nonlinear theory of cyclotron electron stimulated radiation in an ion-channel^{*}

Tang Chang-Jian¹⁾ Qian Shang-Jie²⁾

¹⁾ College of Physical Science and Technology, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

²⁾ Southwest Physics Institution of Nuclear Industry, Chengdu 610041, China)

(Received 6 August 2001 ; revised manuscript received 28 September 2001)

Abstract

A nonlinear theory on ion-channel electron cyclotron maser (ICECM) is presented, and particle analog result is given. It confirms this system electromagnetic instability which is discovered from experiments. In the paper, we have searched the time's response for scattering wave self-consistent growth, meanwhile, the nonlinear influence of ion density and electron energy on scattering wave power and frequency and efficiency.

Keywords : electromagnetic emission, nonlinear, high power millimeter-wave source, plasma

PACC : 4230D, 4255T, 4255V, 4235M

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.69493505).