第 51 卷 第 6 期 2002 年 6 月
1000-3290/2002/51(06)/1398-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.6,June,2002

Vaidya-Bonner 黑洞的熵*

宋太平[1)] 侯晨霞[1)] 史旺林[2)]

[1)] (南阳师范学院物理系,南阳 473061)

[2)] (北京师范大学物理系,北京 100875)

(2001 年 10 月 16 日收到;2001 年 11 月 11 日收到修改稿)

从零曲面方程出发,得到了 Vaidya-Bonner 黑洞的视界;利用 Klein-Gordon 方程和薄膜 Brick-Wall 模型,并采用 WKB 近似方法,求出了 Vaidya-Bonner 黑洞的熵,所得的熵正好与该黑洞的视界面积成正比.

关键词:黑洞,熵,薄膜 Brick-Wall 模型,视界

PACC:9760L,0420

1. 引 言

在 20 世纪 70 年代,Bekenstein 和 Hawking 提出黑洞的熵与它的视界面积成正比[1,2],此后对黑洞热力学的研究取得了许多成就[3—9].1985 年,'t Hooft 提出计算黑洞熵的 Brick-Wall 模型[10],人们普遍认为这种模型是最为成功的方法之一.它在计算黑洞熵的统计起源方面表现的尤其突出.'t Hooft 研究了 Schwarzchild 黑洞背景与标量场的统计性质,得到了 Schwarzchild 黑洞的熵与它的视界面积成正比的结论.1985 年以来,人们把 Brick-Wall 模型用于其他一些黑洞的研究,也都取得成功.但是在研究中发现 Brick-Wall 模型只能适用处于热平衡态的黑洞,而对处于非热平衡态的黑洞就显得无能为力了,并且在用这种模型计算熵的过程中,一些项的取舍也常常令人困惑不解.为了解决这些困难,在 2000 年李翔和赵峥提出了薄膜 Brick-Wall 模型[11,12],这种模型认为,黑洞的熵来自于视界附近的一个薄层中量子场的贡献,因此它不仅适应于静态黑洞和稳态黑洞,而且也能用于处于非热平衡态的动态黑洞.本文采用文献[11,12]中的薄膜 Brick-Wall 模型计算 Vaidya-Bonner 黑洞的熵,得到的熵与该黑洞的视界面积成正比.

2. Vaidya-Bonner 黑洞的时空线元与视界

Vaidya-Bonner 黑洞的时空线元[13]为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r + r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2, \tag{1}$$

其中采用了超前爱丁顿坐标 v,$M=M(v)$,$Q=Q(v)$分别为黑洞的质量和电荷,它们都是 v 的函数.从(1)式可以看出,这种黑洞的时空具有球对称性,因此也叫做球对称带电蒸发黑洞.

由(1)式容易得到度规的行列式和不为零的逆变度规分量为

$$g=-r^4\sin^2\theta, \tag{2}$$

$$g^{01}=g^{10}=1,g^{11}=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2},$$
$$g^{22}=r^{-2},g^{33}=(r\sin\theta)^{-2}. \tag{3}$$

考虑到 Vaidya-Bonner 黑洞的时空具有球对称性,其事件视界表面方程可以写成

$$D(r,v)=0 \text{ 或 } r=r(v), \tag{4}$$

零曲面应满足方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial D}{\partial x^\mu}\frac{\partial D}{\partial x^\nu}=0. \tag{5}$$

将不为零的逆变度规分量代入(5)式,即可得到

* 国家自然科学基金(批准号:10073002)和河南省教育厅自然科学基金(批准号:98160001)资助的课题.

$$2\frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial r}+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left(\frac{\partial D}{\partial r}\right)^2=0. \quad (6)$$

由(4)式可得

$$\frac{\partial D}{\partial r}=-\frac{\partial D}{\partial v}\Big/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}=-\frac{1}{\dot r}\frac{\partial D}{\partial v}, \quad (7)$$

其中

$$\dot r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}. \quad (8)$$

将(7)式代入(6)式即可得到事件视界方程

$$(1-2\dot r_H)r_H^2-2Mr_H+Q^2=0, \quad (9)$$

解之得

$$r_H=\frac{M\pm\sqrt{M^2-(1-2\dot r_H)Q^2}}{1-2\dot r_H}. \quad (10)$$

由于只有外视界是事件视界，所以取

$$r_H=\frac{M+\sqrt{M^2-(1-2\dot r_H)Q^2}}{1-2\dot r_H}. \quad (11)$$

3. Vaidya-Bonner 黑洞的熵

做如下的坐标变换[14]：

$$R=r-r_H(v), \quad (12)$$

$$\mathrm{d}R=\mathrm{d}r-\dot r_H\mathrm{d}v. \quad (13)$$

时空线元(1)式变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)\mathrm{d}v^2\\&\quad+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\\&=\hat g_{00}\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R+\hat g_{22}\mathrm{d}r^2+\hat g_{33}\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \quad (14)$$

可以证明，上式中的

$$\hat g_{00}=-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)=0, \quad (15)$$

正好为视界方程(9).

由时空线元(14)式可得该度规的行列式和不为零的逆变度规分量分别为

$$\hat g=-r^4\sin^2\theta, \quad (16)$$

$$\hat g^{01}=\hat g^{10}=1,\hat g^{11}=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H,$$
$$\hat g^{22}=r^{-2},\hat g^{33}=(r\sin\theta)^{-2}. \quad (17)$$

把度规的行列式和逆变度规分量代入带电粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat g}}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\mathrm{i}eA_\mu\right)\left[\sqrt{-\hat g}\hat g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}-\mathrm{i}eA_\nu\right)\right]\Phi-\mu_0^2\Phi=0, \quad (18)$$

考虑到时空的球对称性

$$A_\mu=(A_0,A_1,A_2,A_3)=\left(-\frac{Q}{r},0,0,0\right), \quad (19)$$

(18)式可以转化为

$$\begin{aligned}&2\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial R}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}\\&+\left[\frac{2\mathrm{i}eQ}{r}+\frac{2}{r^2}(r-M-2r\dot r_H)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial R}\\&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\\&-\left(\mu_0^2-\frac{\mathrm{i}eQ}{r^2}\right)\Phi=0.\end{aligned} \quad (20)$$

虽然整个时空不是稳态时空，而是动态时空，但是由于我们将采用的薄膜 Brick-Wall 模型是在视界附近的一个薄层内计算黑洞的熵，即在 $r_H+\varepsilon<r<r_H+\varepsilon+\delta$ 的范围内计算黑洞的熵，其中 ε 和 δ 都远远小于 r_H. 因此可以认为在该薄层内，系统处于热平衡状态，因而可以按下式分离变量.

$$\Phi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ev}f(R)Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad (21)$$

其中

$$f(R)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R)}. \quad (22)$$

把(21)式代入(20)式可得径向方程

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}\\&+2\left[\frac{\mathrm{i}eQ}{r}-\mathrm{i}E+\frac{1}{r^2}(r-M-2r\dot r_H)\right]\frac{\partial f}{\partial R}\\&+\frac{\mathrm{i}}{r^2}(eQ-2Er)f-\left[\mu_0^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f=0.\end{aligned} \quad (23)$$

由(22)式得

$$\frac{\partial f}{\partial R}=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=\mathrm{i}k_R\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R)}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R^2}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}k_R}{\mathrm{d}R}\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R)}-k_R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R)}, \quad (25)$$

其中

$$k_R=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}, \quad (26)$$

k_R 叫做径向波数. 把(24)式和(25)式代入(23)式，并采用 WKB 近似，即可得到波数 k_R 满足的方程

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)k_R^2-2\left(E-\frac{eQ}{r}\right)k_R\\&+\left[\mu_0^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]=0,\end{aligned} \quad (27)$$

解之得径向波数为

$$\begin{aligned}k_R^{\pm}=&\left\{\left(E-\frac{eQ}{r}\right)\pm\left\{\left(E-\frac{eQ}{r}\right)^2\right.\right.\\&\left.\left.-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right)\left[\mu_0^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}\right\}\Big/\\&\left[1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot r_H\right].\end{aligned} \quad (28)$$

考虑到黑洞事件视界附近的一个薄层,设该薄层的厚度为 $\delta(\delta \ll r_H)$,根据半经典量子化条件[12]

$$2n\pi = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} k_R^+ \mathrm{d}R + \int_{\varepsilon+\delta}^{\varepsilon} k_R^- \mathrm{d}R = 2\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} K_R \mathrm{d}R, \tag{29}$$

其中

$$K_R = \left\{ \left(E - \frac{eQ}{r} \right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right) \times \left[\mu_0^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right). \tag{30}$$

由(29)式得

$$n = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} K_R \mathrm{d}R. \tag{31}$$

令

$$E' = E - \frac{eQ}{r}, \tag{32}$$

则由(31)式可以得到

$$n = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} \left\{ E'^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right) \times \left[\mu_0^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \Big/ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right) \mathrm{d}R. \tag{33}$$

根据统计物理知识可知系统的自由能为

$$\beta F = \sum_{n,l,m} \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta E'}\right). \tag{34}$$

把能态视为连续分布,则上式的求和可改为积分

$$\beta F = \int_0^\infty \mathrm{d}E' g(E') \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta E'}\right) = \int_0^\infty \mathrm{d}\Gamma(E') \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\beta E'}\right),$$

分部积分求得

$$\beta F = -\beta \int_0^\infty \frac{\Gamma(E')\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'} - 1}, \tag{35}$$

其中 $\Gamma(E')$ 为系统的能量小于 E' 的微观状态数,$g(E') = d\Gamma(E')/dE'$ 为态密度.

$$\Gamma(E') = \int_l (2l+1)\mathrm{d}l \frac{1}{\pi}\int_R K_R \mathrm{d}R, \tag{36}$$

把(36)式代入(35)式得

$$F = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}E' \int_R \mathrm{d}R \int_l (2l+1)\mathrm{d}l \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E'} - 1}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right)^{-1} E'^2 - \left[\mu_0^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

在计算(37)式中对 l 的积分时,积分下限为 0,上限 l' 就是使得式中的根号有意义时 l 的取值.即

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right)^{-1} E'^2 - \mu_0^2 - \frac{l'(l'+1)}{r^2} = 0. \tag{38}$$

因此(37)式的积分可化为

$$F = -\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'} - 1}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right)^{-2} \times \left[E'^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H \right)\mu_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}R. \tag{39}$$

应用定积分中的中值定理得

$$\begin{aligned} F &= -\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'} - 1}\left[E'^2 - \left(1 - \frac{2M}{r+\eta} + \frac{Q^2}{(r+\eta)^2} - 2\dot{r}_H \right)\mu_0^2 \right]^{\frac{3}{2}} \times \frac{(r_H+\eta)^2 \delta}{\left[1 - \frac{2M}{r_H+\eta} + \frac{Q^2}{(r+\eta)^2} - 2\dot{r}_H \right]^2} \\ &= -\frac{2\pi^3}{45} \cdot \frac{1}{\beta^4} \cdot \frac{r_H^6 \delta}{4\eta^2 (r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2}, \end{aligned} \tag{40}$$

其中 $\varepsilon < \eta < \varepsilon + \delta$.

由系综理论知系统的熵为

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{2\pi^3}{45}\frac{r_H^6 \delta}{\eta^2 (r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2}\frac{1}{\beta^3}. \tag{41}$$

适当地选取 δ 和 η 的取值,使得

$$\frac{\delta}{\eta^2} = 90\beta, \tag{42}$$

则(41)式即可化为

$$S = 4\pi^3 \frac{r_H^6}{(r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2} \cdot \frac{1}{\beta^2}. \tag{43}$$

由文献[15]中得到的结论

$$\frac{1}{\beta^2} = T^2 = \frac{\kappa^2}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{(r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2}{(2Mr_H - Q^2)^2}, \tag{44}$$

代入(43)式得 Vaidya-Bonner 黑洞的熵为

$$S = \frac{4\pi^3}{4\pi^2}\frac{r_H^6}{(r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2} \cdot \frac{(r_H - M - 2r_H\dot{r}_H)^2}{(2Mr_H - Q^2)^2} = \frac{1}{4}A\frac{1}{(1 - 2\dot{r}_H)^2}, \tag{45}$$

其中 $A = 4\pi r_H^2$ 为黑洞视界的面积.在最后一步利用了(9)式.

4. 讨　论

由(45)式可见,Vaidya-Bonner 黑洞的熵与其视界面积成正比.这与 Bekenstein 和 Hawking 的理论一致.在推导过程中,无需采用小质量近似,而是在(40)式中直接利用了视界方程(9)之后,含有粒子质量 μ_0 的项就会自动消去,避免了人为引入小质量近似的问题.计算过程比较简单,计算结果也比较准确.

感谢赵峥教授对本文的悉心指导.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Hawking S W 1975 *Commum Math Phys.* **43** 199

[3] Luo Z J and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395(in Chinese)[罗智坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]

[4] Liu W B, Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 581(in Chinese)[刘文彪、朱建阳、赵　峥 2000 物理学报 **49** 581]

[5] Zhao Z and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558(in Chinese)[赵峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]

[6] Lin H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1413(in Chinese)[林海 2000 物理学报 **49** 1413]

[7] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 593(in Chinese)[赵　仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 593]

[8] Li C A 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 986(in Chinese)[李传安 2001 物理学报 **50** 986]

[9] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1015(in Chinese)[赵　仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 1015]

[10] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[11] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310

[12] Li X and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 463

[13] Bonner W B and Vaidya P C 1970 *Gen. Rel. Grav.* **1** 127

[14] Li Z H and Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273(in Chinese)[黎忠恒、赵　峥 1997 物理学报 **46** 1273]

[15] Dai X X and Zhao Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 869(in Chinese)[戴宪新、赵　峥 1992 物理学报 **41** 869]

Entropy of Vaidya-Bonner black hole*

Song Tai-Ping[1)] Hou Chen-Xia[1)] Shi Wang-Lin[2)]

[1)] (*Department of Physics, Nanyang Teachers College, Nanyang* 473061, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)

(Received 16 October 2001; revised manuscript received 11 November 2001)

Abstract

In this paper, starting from the null surface equation, we obtain the event horizon of Vaidya-Bonner black hole. Making use of Klein-Gordon equation, thin film brick-wall model and WKB approximation, we find the entropy of Vaidya-Bonner black hole and this entropy is proportional to the area of event horizon.

Keywords: black hole, entropy, thin film brick-wall model, event horizon

PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10073002), and by the Henan Education Bureau Natural Science Foundation, China (Grant No. 98160001).