第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1403-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.7,July,2002

双网格前后向迭代与谱积分法计算分形粗糙面的双站散射与透射*

李中新　金亚秋†

(复旦大学波散射和遥感中心,上海　200433)

(2001 年 7 月 12 日收到;2001 年 11 月 28 日收到修改稿)

对于高介电常量分形粗糙面的双站散射与透射的数值计算,须用密网格来剖分粗糙面,这样就产生了计算内存大和计算时间长的问题.双网格法通常可以用来减少计算机计算所需内存和计算时间.为计算任意角度(包括低掠角)TE 和 TM 波入射下的高介电常量分形粗糙面在各种物理条件下的双站散射与透射,将双网格法和前后向迭代与谱积分加速法相结合,发展了新的数值计算方法,并验证了散射与透射的能量守恒,讨论了双站散射与透射角度性变化的特征.

关键词:双站散射,透射,PBTG-FBM/SAA,分形粗糙面

PACC:0270,4110,4752

1.引　　言

粗糙面散射在电磁学、光学、声学等领域中是一项十分重要的研究课题.近些年来出现的分形几何学,讨论分形结构的自相似性分布,兼顾了随机粗糙面多尺度无序的特点,往往更适合描述实际的粗糙面.分形函数在周期函数和随机函数之间建立了一种联系"桥梁",它的几何廓线分布由分形函数的几个参量来支配[1].

随着计算机计算技术的发展,寻求快速精确的数值计算方法已成为粗糙面散射研究的一个热点问题[2—6].为了能够精确地计算随机粗糙面的散射,对粗糙面的离散应采用足够高的离散密度.近来,以矩量法(MoM)为基础,一种新的数值方法是前后向迭代法(forward backward method, FBM)[7].该方法具有很快的收敛性,其计算量为 $O(N^2)$(N 是粗糙面离散产生的未知量个数).文献[8,9]随后又将 Green 函数谱积分加速(spectral acceleration algorithm, SAA)法应用于 FBM 计算,计算量和内存可进一步减少为 $O(N)$.为求解高介电常量粗糙面的散射,应用阻抗边界法,结合 SAA 的 FBM,计算了 TE 入射波的散射问题[10].

在离散粗糙面时,一般采用的离散密度为 $\lambda/20$,我们称之为粗网格(SCG).但是,对于高介电常量有耗介质粗糙面下场的迅速变化,SCG 是不够精确的.一种方法是应用阻抗边界条件[10,11],它的缺点是不能对阻抗边界条件方法的近似进行误差估计.第二种方法是采用更高的离散密度,我们称之为密网格(SDG),它的缺点是增加了 CPU 计算时间和内存.由于随机粗糙面的下半空间是具有高介电常量有耗媒质,Green 函数衰减变化快;而上半自由空间的 Green 函数则变化慢.这样,产生了双网格(PBTG)法[12,13],即在粗糙面上表面采用 SCG,而在粗糙面下表面采用 SDG.这可取得与 SDG 相接近的计算精度,而时间上又比 SDG 节省.根据 Kramer-Kronig 关系,大实部的介电常量通常具有大的虚部.上表面 SCG 上单个单元场量是下表面网格相应的多个单元上场量的平均.PBTG 法在保证一定计算精度前提下,减少计算量和内存,加速自由空间 Green 函数在 SDG 上的下三角矩阵(上三角矩阵)和一维矢量乘积计算.

本文将 PBTG 法应用到前后向迭代谱积分加速法,形成 PBTG-FBM/SAA,用于计算 TE 和 TM 锥形波入射(包括低掠角入射)高介电常量分形粗糙面的散

* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2001CB309405)、国家自然科学基金(批准号:49831060 和 60171009)、国防预研基金及上海市博士后基金资助的课题.

† 通信联系人.E-mail:yqjin@fudan.ac.cn

射与透射.数值地讨论了 PBTG 法计算的优点.

2. 电场和磁场积分方程

考虑一锥形平面波 $\psi_{inc}(x,z)$ 入射到一维介质随机粗糙面上,该随机粗糙面为 $z=f(x)$,且有 $<f(x)>=0$.假设 ψ 和 ψ_1 分别表示上、下半空间的波函数,它们满足下列边界积分方程[12,13]:

$$\frac{\psi(r)}{2}-\int_{S'}\left\{\psi(r')\frac{\partial G(r,r')}{\partial n'}-G(r,r')\frac{\partial\psi(r')}{\partial n'}\right\}\mathrm{d}S' =\psi_{inc}(r), \quad (1)$$

$$\frac{\psi_1(r)}{2}+\int_{S'}\left\{\psi_1(r')\frac{\partial G_1(r,r')}{\partial n'}-G_1(r,r')\frac{\partial\psi_1(r')}{\partial n'}\right\}\mathrm{d}S' =0, \quad (2)$$

其中 $\int_{S'}$ 表示 Cauchy 积分,G 和 G_1 分别表示上下半空间中的二维 Green 函数,$G(r,r')=\mathrm{i}/4\mathrm{H}_0^1(k|r-r'|)$,$G_1(r,r')=\mathrm{i}/4\mathrm{H}_0^1(k_1|r-r'|)$,$\mathrm{H}_0^{(1)}$ 表示零阶第一类 Hankel 函数,k_1 表示下半空间媒质的波数.波函数 ψ 和 ψ_1 有下列边界条件:$\psi_1(r)=\psi(r)$ 和 $\partial\psi_1(r)/\partial n=\rho\partial\psi(r)/\partial n$,这里 r 在面上,其中 TE 波 $\rho=\mu_1/\mu$,TM 波 $\rho=\varepsilon_1/\varepsilon$.

对积分方程(1)和(2)均匀离散[15],则边界面 S' 在 $[-L/2,L/2]$ 区间离散为 N 个点(L 为锥形入射波照亮的界面长度),离散点 x_m 写为 $x_m=(m-0.5)\Delta x(m=1,2,\cdots,N)$.

方程(1)和(2) 则可写成

$$\sum_n^N a_{mn}\psi(x_n)+\sum_n^N b_{mn}u(x_n)=\psi_{inc}(x_m), \quad (3)$$

$$\sum_n^N c_{mn}\psi(x_n)+\sum_n^N d_{mn}u(x_n)=0, \quad (4)$$

其中 $u(x)=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\partial\psi/\partial n$.矩阵元素 a_{mn},b_{mn},c_{mn} 和 d_{mn} 的表达式可参见文献[12,13,16].

3. FBM

由方程(3)和(4),可得矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2N}\\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NN}\\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} & d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1N}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} & d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2N}\\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ c_{N1} & c_{N2} & \cdots & c_{NN} & d_{N1} & d_{N2} & \cdots & d_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(x_1)\\ \psi(x_2)\\ \\ \psi(x_N)\\ u(x_1)\\ u(x_2)\\ \\ u(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{inc}(x_1)\\ \psi_{inc}(x_2)\\ \\ \psi_{inc}(x_N)\\ 0\\ \\ 0\\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

方程(5)的系数阵划分为 4 个块矩阵:

$$\begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{Z}}_a & \bar{\boldsymbol{Z}}_b\\ \bar{\boldsymbol{Z}}_c & \bar{\boldsymbol{Z}}_d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}\\ \boldsymbol{U} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{inc}\\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

并通过变量和矩阵分解:$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Psi}_f+\boldsymbol{\Psi}_b$,$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}_f+\boldsymbol{U}_b$;$\bar{\boldsymbol{Z}}_a=\bar{\boldsymbol{Z}}_a^f+\bar{\boldsymbol{Z}}_a^s+\bar{\boldsymbol{Z}}_a^b$,$\bar{\boldsymbol{Z}}_b=\bar{\boldsymbol{Z}}_b^f+\bar{\boldsymbol{Z}}_b^s+\bar{\boldsymbol{Z}}_b^b$,$\bar{\boldsymbol{Z}}_c=\bar{\boldsymbol{Z}}_c^f+\bar{\boldsymbol{Z}}_c^s+\bar{\boldsymbol{Z}}_c^b$,$\bar{\boldsymbol{Z}}_d=\bar{\boldsymbol{Z}}_d^f+\bar{\boldsymbol{Z}}_d^s+\bar{\boldsymbol{Z}}_d^b$,其中 $\boldsymbol{\Psi}_f$ 和 $\boldsymbol{U}_f$ 表示前向分量(电磁波前向传播产生的电流贡献),$\boldsymbol{\Psi}_b$ 和 $\boldsymbol{U}_b$ 表示后向分量(电磁波后向传播产生的电流贡献).矩阵 $\bar{\boldsymbol{Z}}_l^f$,$\bar{\boldsymbol{Z}}_l^s$ 和 $\bar{\boldsymbol{Z}}_l^b(l=a,b,c,d)$ 分别为方程(6)矩阵 $\bar{\boldsymbol{Z}}_l$ 的下三角矩阵、对角线矩阵(自阻抗)和上三角矩阵.

这样,方程(6)可写成

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_a^s\cdot\boldsymbol{\Psi}_f+\bar{\boldsymbol{Z}}_a^s\cdot\boldsymbol{U}_f =\boldsymbol{\Psi}_{inc}-\bar{\boldsymbol{Z}}_a^f\cdot(\boldsymbol{\Psi}_f+\boldsymbol{\Psi}_b)-\bar{\boldsymbol{Z}}_b^f\cdot(\boldsymbol{U}_f+\boldsymbol{U}_b), \quad (7)$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_c^s\cdot\boldsymbol{\Psi}_f+\bar{\boldsymbol{Z}}_d^s\cdot\boldsymbol{U}_f =-\bar{\boldsymbol{Z}}_c^f\cdot(\boldsymbol{\Psi}_f+\boldsymbol{\Psi}_b)-\bar{\boldsymbol{Z}}_d^f\cdot(\boldsymbol{U}_f+\boldsymbol{U}_b), \quad (8)$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_a^s\cdot\boldsymbol{\Psi}_b+\bar{\boldsymbol{Z}}_a^s\cdot\boldsymbol{U}_b =-\bar{\boldsymbol{Z}}_a^b\cdot(\boldsymbol{\Psi}_f+\boldsymbol{\Psi}_b)-\bar{\boldsymbol{Z}}_b^b\cdot(\boldsymbol{U}_f+\boldsymbol{U}_b), \quad (9)$$

$$\bar{\boldsymbol{Z}}_c^s\cdot\boldsymbol{\Psi}_b+\bar{\boldsymbol{Z}}_d^s\cdot\boldsymbol{U}_b =-\bar{\boldsymbol{Z}}_c^b\cdot(\boldsymbol{\Psi}_f+\boldsymbol{\Psi}_b)-\bar{\boldsymbol{Z}}_d^b\cdot(\boldsymbol{U}_f+\boldsymbol{U}_b). \quad (10)$$

以上方程组可以用迭代算法求解.需要注意的是方程(7)和(8)与方程(9)和(10)都必须同时求解.同

时,必须注意:在整个迭代求解过程中不需要矩阵求逆或分解运算,因为矩阵 $\overline{Z}_a^{s}+\overline{Z}_a^{f}$,$\overline{Z}_b^{s}+\overline{Z}_b^{f}$,$\overline{Z}_c^{s}+\overline{Z}_c^{f}$ 和 $\overline{Z}_d^{s}+\overline{Z}_d^{f}$ 都是下三角矩阵,$\overline{Z}_a^{s}+\overline{Z}_a^{b}$,$\overline{Z}_b^{s}+\overline{Z}_b^{b}$,$\overline{Z}_c^{s}+\overline{Z}_c^{b}$ 和 $\overline{Z}_d^{s}+\overline{Z}_d^{b}$ 都是上三角矩阵.方程(7)和(8)与方程(9)和(10)可以分别求解,得到 $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{f}}^{(i)}$ 和 $U_{\mathrm{f}}^{(i)}$ 以及 $\boldsymbol{\Psi}_{\mathrm{b}}^{(i)}$ 和 $U_{\mathrm{b}}^{(i)}$ 来进行前后向迭代求解.该方法收敛性好,对于一般粗糙面只需迭代 6 次.

4. Green 函数 SAA 法

FBM 法需要重复计算 $\overline{\boldsymbol{Z}}_h^{f}\cdot\boldsymbol{\Psi}$,$\overline{\boldsymbol{Z}}_h^{f}\cdot\boldsymbol{U}$,$\overline{\boldsymbol{Z}}_h^{b}\cdot\boldsymbol{\Psi}$ 和 $\overline{\boldsymbol{Z}}_h^{b}\cdot\boldsymbol{U}(h=a,b,c,d)$ 等.由方程(7)—(10)可得

$$V_{\mathrm{f}}^{(1)}(r_n)=\sum_{m=1}^{n-1}Z_{mn}^{(a)}\Psi_m+\sum_{m=1}^{n-1}Z_{mn}^{(b)}U_m,\quad(11)$$

$$V_{\mathrm{f}}^{(2)}(r_n)=\sum_{m=1}^{n-1}Z_{mn}^{(c)}\Psi_m+\sum_{m=1}^{n-1}Z_{mn}^{(d)}U_m,\quad(12)$$

$$V_{\mathrm{b}}^{(1)}(r_n)=\sum_{m=n+1}^{N}Z_{mn}^{(a)}\Psi_m+\sum_{m=n+1}^{N}Z_{mn}^{(b)}U_m,\quad(13)$$

$$V_{\mathrm{b}}^{(2)}(r_n)=\sum_{m=n+1}^{N}Z_{mn}^{(c)}\Psi_m+\sum_{m=n+1}^{N}Z_{mn}^{(d)}U_m,\quad(14)$$

其中 $i=1,2,\cdots,N$. $V_{\mathrm{f}}^{(i)}$,$V_{\mathrm{b}}^{(i)}(i=1,2)$ 分别表示在第 n 个接收场单元前面粗糙面上半空间介质面的源单元电流($i=1$)和粗糙面下半空间介质面的源单元电流($i=2$)分别在前向(f)和后向(b)产生的辐射贡献.每次迭代需要 $O(N^2)$ 计算量,如果将 SAA 应用到方程(18)—(21)的计算中,则计算量和内存均减少为 $O(N)$.

首先接收场单元在 r_n 选取一个临近距离 L_s,与 r_n 相互作用的源单元 r_m 在 L_s 以内,则称为强作用组,产生强作用贡献 V_{s}.反之,则称为弱作用组,产生弱作用贡献 V_{W}.例如:方程(11)可以改写为

$$V_{\mathrm{F}}^{(1)}(r_n)=V_{\mathrm{s}}+V_{\mathrm{w}}=\sum_{m=n-N_{\mathrm{s}}}^{n-1}\left(Z_{mn}^{(a)}\Psi_m+Z_{mn}^{(b)}U_m\right)+\sum_{m=1}^{n-N_{\mathrm{s}}-1}\left(Z_{mn}^{(a)}\Psi_m+Z_{mn}^{(b)}U_m\right).\quad(15)$$

对 r_n 处的强贡献 V_{s},是由 r_n 附近距离 L_s 以内的 N_{s} 个源单元 r_m 对其共同作用产生的贡献,本文仍采用精确的 MoM 计算.

对于 r_m 远场的弱贡献 V_{w},是由在 r_n 距离 L_s 以外的 $n-N_{\mathrm{s}}-1$ 个源单元 r_m 对其共同作用产生的贡献.

方程(12)—(14)可以像方程(11)一样通过同样的方式实现 SAA 加速计算.

由 Green 函数的谱积分形式[7,8,14]:

$$G(r,r')=\frac{\mathrm{i}}{4}\mathrm{H}_0^{1}(k|r-r'|)=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{C_\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[k\cos\theta(x-x')+k\sin\theta(z-z')]}\mathrm{d}\theta,\quad(16)$$

$$\frac{\partial G(r,r')}{\partial n'}=\frac{\mathrm{i}}{4}\frac{\partial \mathrm{H}_0^{1}(k|r-r'|)}{\partial n'}=\frac{\mathrm{i}}{4\pi}\int_{C_\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[(x-x')\cos\theta+(z-z')\sin\theta]}\times\frac{\mathrm{i}k(-\sin\theta+f_{x'}\cos\theta)}{\sqrt{1+f_{x'}^2}}\mathrm{d}\theta,\quad(17)$$

可以推得

$$V_{\mathrm{w}}^{(1)}(r_n)=\sum_{m=1}^{n-N_{\mathrm{s}}-1}\left(Z_{mn}^{(a)}\Psi_m+Z_{mn}^{(b)}U_m\right)=\frac{\mathrm{i}\Delta x}{4\pi}\int_{C_\theta}F_n(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz_n\sin\theta}\mathrm{d}\theta,\quad(18)$$

其中

$$F_n(\theta)=F_{n-1}(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Delta x\cos\theta}+[-\mathrm{i}k_s(-\sin\theta+f_{x_m}\cos\theta)\Psi_{n-N_{\mathrm{s}}-1}+U_{n-N_{\mathrm{s}}-1}]\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(N_{\mathrm{s}}+1)\Delta x\cos\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz_{n-N_{\mathrm{s}}-1}\sin\theta}.\quad(19)$$

同样可以推得加速方程(12)的 SAA 公式:

$$V_{\mathrm{w}}^{(2)}(r_n)=\sum_{m=1}^{n-N_{\mathrm{s}}-1}\left(Z_{mn}^{(c)}\Psi_m+Z_{mn}^{(d)}U_m\right)=\frac{\mathrm{i}\Delta x}{4\pi}\int_{C_\theta}F_n(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1z_n\sin\theta}\mathrm{d}\theta,\quad(20)$$

其中

$$F_n(\theta)=F_{n-1}(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1\Delta x\cos\theta}+[\mathrm{i}k_s(-\sin\theta+f_{x_m}\cos\theta)\Psi_{n-N_{\mathrm{s}}-1}-\rho U_{n-N_{\mathrm{s}}-1}]\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1(N_{\mathrm{s}}+1)\Delta x\cos\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1z_{n-N_{\mathrm{s}}-1}\sin\theta},\quad(21)$$

其中 TE 波 $\rho=\mu_1/\mu$,TM 波 $\rho=\varepsilon_1/\varepsilon$.

值得指出:关于方程(19)和(21)的远场模式是与接收场单元无关,平面波展开与源单元对接收场单元的辐射贡献有关.可以看到:远场 $F_n(\theta)$ 可以通过方程(19)和(21)连续递归计算,当接收场单元向前扫描时,弱作用组的一个新的源单元产生,而从源单元产生辐射贡献可由方程(19)和(21)描述.同时,由于远场模式在实 θ 空间上趋于表现为一种狭窄的主瓣和许多狭窄旁瓣,因此,方程(18)和(20)的积分路径 C_θ 应改选为远场模式变化缓慢的新路径 C_δ.SAA 算法的高效性就在于这种缓慢变化的远场模式.选择积分路径 C_δ 和完成谱积分运算可以参

阅文献[7,8].

5. PBTG 法

假设上半空间媒质为自由空间,下半空间媒质的相对介电常量为 ε_1,并设 λ 和 λ_1 分别为上、下半空间媒质的入射波长,并有近似关系 $\lambda_1 \approx \lambda / n_1$,$n_1$ 是由对 $\sqrt{\varepsilon_1}$ 的实部取整得来.这样,分界面下表面离散密度是其上表面离散密度的 n_1 倍.

对于 PBTG 法,假设 N_{dg} 和 N 分别为 SDG 和 SCG 的离散点数,

$$N_{dg} = n_{dg}\frac{L}{\lambda} \quad 和 \quad N = n_{cg}\frac{L}{\lambda}, \tag{22}$$

通常取 $n_{cg} = 20$ 和 $n_{cg} = 20n_1$.应用 PBTG 法,方程(11),(12),(13),(14)可以重新写为

$$V_{\mathrm{f}}^{(1)}(r_{\tilde{n}}) = \sum_{m=1}^{\tilde{n}-1}\tilde{Z}_{m\tilde{n}}^{(a)}\tilde{\Psi}_m + \sum_{m=1}^{\tilde{n}-1}\tilde{Z}_{m\tilde{n}}^{(b)}\tilde{U}_m, \quad \tilde{n} = 1,2,\cdots,N, \tag{23}$$

$$V_{\mathrm{f}}^{(2)}(r_n) = \sum_{m=1}^{n-1} Z_{mn}^{(c)}\Psi_m + \sum_{m=1}^{n-1} Z_{mn}^{(d)}U_m, \quad n = 1,2,\cdots,N_{dg}, \tag{24}$$

$$V_{\mathrm{b}}^{(1)}(r_{\tilde{n}}) = \sum_{m=\tilde{n}+1}^{N}\tilde{Z}_{m\tilde{n}}^{(a)}\tilde{\Psi}_m + \sum_{m=\tilde{n}+1}^{N}\tilde{Z}_{m\tilde{n}}^{(b)}\tilde{U}_m, \quad \tilde{n} = 1,2,\cdots,N, \tag{25}$$

$$V_{\mathrm{b}}^{(2)}(r_n) = \sum_{m=n+1}^{N_{dg}} Z_{mn}^{(c)}\Psi_m + \sum_{m=n+1}^{N_{dg}} Z_{mn}^{(d)}U_m, \quad n = 1,2,\cdots,N_{dg}, \tag{26}$$

其中 $\tilde{\Psi}_m$,$\tilde{U}_m$,$\tilde{Z}_{m\tilde{n}}$,$\tilde{n}$ 表示有关 SCG 的变量或参数.

与下半空间有耗媒质相比,上半自由空间的 Green 函数相对衰减变化慢,因此,当在 SCG 上方程(23)或(25)需要完成的下三角型矩阵和一维矢量的计算时,与下表面 n_1 个 SDG 相对应的一个 SCG 上场量可基本视为常量.例如,对由 SCG 的第 m 个源点单元对第 n 个场点单元的贡献,可以等值于与该 SCG 对应的 n_1 个 SDG 源点单元对该场点单元的贡献,如图 1 所示.因此,可以有

$$\tilde{Z}_{m\tilde{n}}^{(b)}\tilde{U}_m = \sum_{l=1}^{n_1} Z_{(m+l)\tilde{n}}^{(b)} U_{(m+l)} \approx n_1 Z_{m_{mp}\tilde{n}}\left(\frac{1}{n_1}\sum_{l=1}^{n_1} U_{(m+l)}\right), \tag{27}$$

其中下标 m_{mp} 表示与 SCG 对应的从第$(m+1)$到$(m+n_1)m$ 个 SDG 源点单元的中点.方程(27)意味着对 SDG 上的场量进行平均,求得 SCG 上的场量.

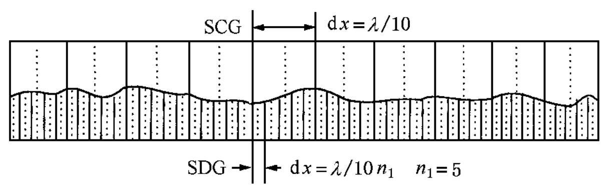


图 1 PDTG, SCG 和 SDG

6. 低掠角时的双站散射和透射系数

介质粗糙面的双站散射系数和透射系数写为[16]

$$\sigma^{(\mathrm{U})}(\theta_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{s}}) = \frac{\dfrac{1}{8\pi k}\left|\displaystyle\int_{S'}\left\{\frac{\mathrm{i}k(f_{x'}\sin\theta_{\mathrm{s}} - \cos\theta_{\mathrm{s}})}{\sqrt{1+f_{x'}^2}}EM - \frac{\partial EM}{\partial n'}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x'\sin\theta_{\mathrm{s}} + z'\cos\theta_{\mathrm{s}})}\,\mathrm{d}S'\right|^2}{L_{\mathrm{eff}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}, \tag{28}$$

$$\sigma^{(\mathrm{D})}(\theta_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{t}}) = \frac{\dfrac{a}{8\pi k}\left|\displaystyle\int_{S'}\left\{\frac{\mathrm{i}k_1(f_{x'}\sin\theta_{\mathrm{t}} - \cos\theta_{\mathrm{t}})}{\sqrt{1+f_{x'}^2}}EM - \frac{\partial EM}{\partial n'_1}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1(x'\sin\theta_{\mathrm{t}} - z'\cos\theta_{\mathrm{t}})}\,\mathrm{d}S'\right|^2}{L_{\mathrm{eff}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}, \tag{29}$$

其中对 TE 波:$a = 1$,$EM = E$ 对 TM 波:$a = \varepsilon_1^{-1}$,$EM = H$,g 表示锥形入射波的宽度控制因子,$L_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\pi/2}\,g\left(1 - (1 + 2\mathrm{tg}^2\theta_{\mathrm{in}})/2(kg)^2\right)$.上下标(U),(D)分别表明向上的散射场和向下的透射场.

对双站散射系数在上半空间进行 θ_{s} 积分求和,得 TE 和 TM 波的反射率分别为 $R_P(\theta_{\mathrm{in}}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma_P^{(\mathrm{U})}(\theta_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{s}})\,\mathrm{d}\theta_{\mathrm{s}}$(其中 P = TE 或 TM).对透射系数在下半空间进行 θ_{t} 积分求和,得 TE 和 TM 波的反射率分别为 $T_P(\theta_{\mathrm{in}}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sigma_P^{(\mathrm{D})}(\theta_{\mathrm{in}},\theta_{\mathrm{t}})\,\mathrm{d}\theta_{\mathrm{t}}$.能量守恒要求:$R_P + T_P = 1$,可用来检验数值计算的精度.

7. 数值计算与分析

采用带限 Weierstrass-Manderbrot 分形函数[1]

$$f(x) = \delta \cdot C\sum_{m=0}^{M-1} b^{(D-2)m}\sin(k_0 b^m x + \varphi_m), \quad (30)$$

其中 D 表示分维数($1<D<2$)，φ_m 表示每一谐波的随机初相位，$b(>1)$表示尺度因子，$k_0=2\pi/\Lambda_0$ 表示空间基波数，$C=\sqrt{2(1-b^{2(D-2)})/(1-b^{2M(D-2)})}$ 表示幅值控制因子，δ 表示均方根高度.

7.1. PBTG-FBM/SAA 的验证

为验证 PBTG-FBM/SAA 程序的精确性和 SAA 谱加速效率，用 PBTG-FBM/SAA 和通常的 MoM 同时计算一分形粗糙面的双站散射系数、透射系数和面感应电流. 计算中，$L=30\lambda$，$g=L/6.0$，$\theta_{\mathrm{inc}}=30°$，入射波长 $\lambda=1$(m). 分形粗糙面参量为：$D=1.3$，$b=e/2.0$，$M=10$，$\Lambda_0=10\lambda$，$\delta=0.05\lambda$，PBTG 离散密度取($\lambda/20$，$\lambda/60$)，介质粗糙面的介电常量为 $\varepsilon_r=25.0+\mathrm{j}1.0$. 两种计算完全符合，表明 PBTG-FBM/SAA 程序正确，而 MoM 耗费了大量计算时间. 同时，PBTG-FBM/SAA 计算的反射率和透射率之和应满足能量守恒，分别为：TE 波 1.0005，TM 波 1.0046，表明足够精确. PBTG-FBM/SAA 比 PBTG-FBM 计算速度快. 两者的计算时间比较见表 1.

表 1　PBTG-FBM/SAA 和 MoM 计算时间($L=30\lambda$)

	TE 波		TM 波	
	时间/min	能量守恒	时间/min	能量守恒
MoM	17.25	0.9995	12.87	1.0005
PBTG-FBM	7.42	0.9947	4.1	0.9962
PBTG-FBM/SAA	3.59	0.9964	1.97	0.9965

对两种 PBTG 离散密度分别取($\lambda/20$，$\lambda/60$)和($\lambda/30$，$\lambda/90$)，对 50 条随机分形粗糙面双站散射的平均作了比较，双站散射系数两者之间最大误差为：TE 波 0.398 dB，TM 波 0.140 dB. 双站透射系数两者之间最大误差为：TE 波 0.439 dB，TM 波 0.602 dB. 因此，PBTG 离散密度($\lambda/20$，$\lambda/60$)可保证计算精度. 同时可看到：更细微的粗糙结构对散射和透射已没有明显的贡献.

本文用($\lambda/20$，$\lambda/60$)计算 Monte Carlo 实现的 50 条与 80 条随机分形粗糙面双站散射的平均，双站散射系数两者之间最大误差为：TE 波 1.347dB，TM 波 1.007dB. 双站透射系数两者之间最大误差为：TE 波 1.693 dB，TM 波 1.525 dB. 因此，计算 50 条随机分形粗糙面来完成数值结果平均可以满足计算需要.

7.2. 基于不同离散密度比较 SCG，SDG 和 PBTG

分形粗糙面是多尺度粗糙面，为抓住分形细节，应该采用充分密集的离散密度. 同时，考虑到下垫分形粗糙面的高介电常量，分形粗糙面下表面透射的电磁场衰减变化快，因此要求有充分密集的离散密度来反映这种场量变化.

分别选取两种 SDG 离散密度 $\Delta x=\lambda/36$ 和 $\lambda/60$ 的 50 条分形随机粗糙面计算，双站散射系数两者之间最大误差为：TE 波 0.969 dB，TM 波 0.136 dB. 双站透射系数两者之间最大误差为：TE 波 0.790dB，TM 波 0.563dB. 因此，可以看到：用 SDG 的 $\Delta x=\lambda/36$计算结果是精确的，可以作为一种标准.

7.2.1. 比较 SCG，PBTG 和 SDG 的双站散射系数和透射系数

计算参数为：$\theta_{\mathrm{inc}}=30°$，$L=30\lambda$，$D=1.3$，$\delta=0.1\lambda$. SCG 的 $\Delta x=\lambda/12$，PBTG 的 $\Delta x(\lambda/12, \lambda/36)$，SDG 的 $\Delta x=\lambda/36$ 作为标准，其余与前例相同. 由计算得 $l=1.08\lambda$.

由图 2 可以看到：SCG 的双站散射和透射与 SDG 相比均有较大误差. 由表 2 可以看到：SCG 的反射率与 SDG 相比，相对误差为：TE 波 19.13%，TM 波 93.57%. 同时，SCG 的透射率与 SDG 相比，相对误差为：TE 波 59.795%，TM 波 24.988%. 由反射率加透射率等于 1 来验证能量守恒，TE 波为 1.3856，TM 波为 1.1903. 以上这些数据表明离散密度 $\Delta x=\lambda/12$ 的 SCG 的计算结果不正确.

表 2　与 SDG 相比较的 SCG 和 PBTG 的反射率、透射率和能量守恒($L=30\lambda$)

	TE 波($\lambda/12$)			TM 波($\lambda/12$)		
	SCG	SDG	PBTG	SCG	SDG	PBTG
反射率	0.5904	0.4956	0.4977	0.7166	0.3702	0.3660
误差/%	19.128	*	0.424	93.571	*	1.135
透射率	0.7953	0.4977	0.4968	0.4737	0.6315	0.6224
误差/%	59.795	*	0.181	24.988	*	1.441
能量守恒	1.3856	0.9933	0.9945	1.1903	1.0017	0.9883
误差/%	38.56	0.67	0.55	19.03	0.17	1.17
时间/h	0.73	4.67	3.37	0.73	3.96	3.29
	TE 波($\lambda/20$)			TM 波($\lambda/20$)		
反射率	0.5407	0.4935	0.4916	0.3285	0.3754	0.3744
误差/%	9.56	*	0.385	12.493	*	0.266
透射率	0.4623	0.5058	0.5032	0.6765	0.6250	0.6218
误差/%	8.6	*	0.51	8.24	*	0.512
ΔTB/K	13.05	*	0.774	15.45	*	0.96
能量守恒	1.0030	0.9993	0.9947	1.0050	1.0005	0.9961
误差/%	0.30	0.07	0.53	0.50	0.50	0.39
时间/h	2.88	30.33	21.48	1.91	19.90	15.96

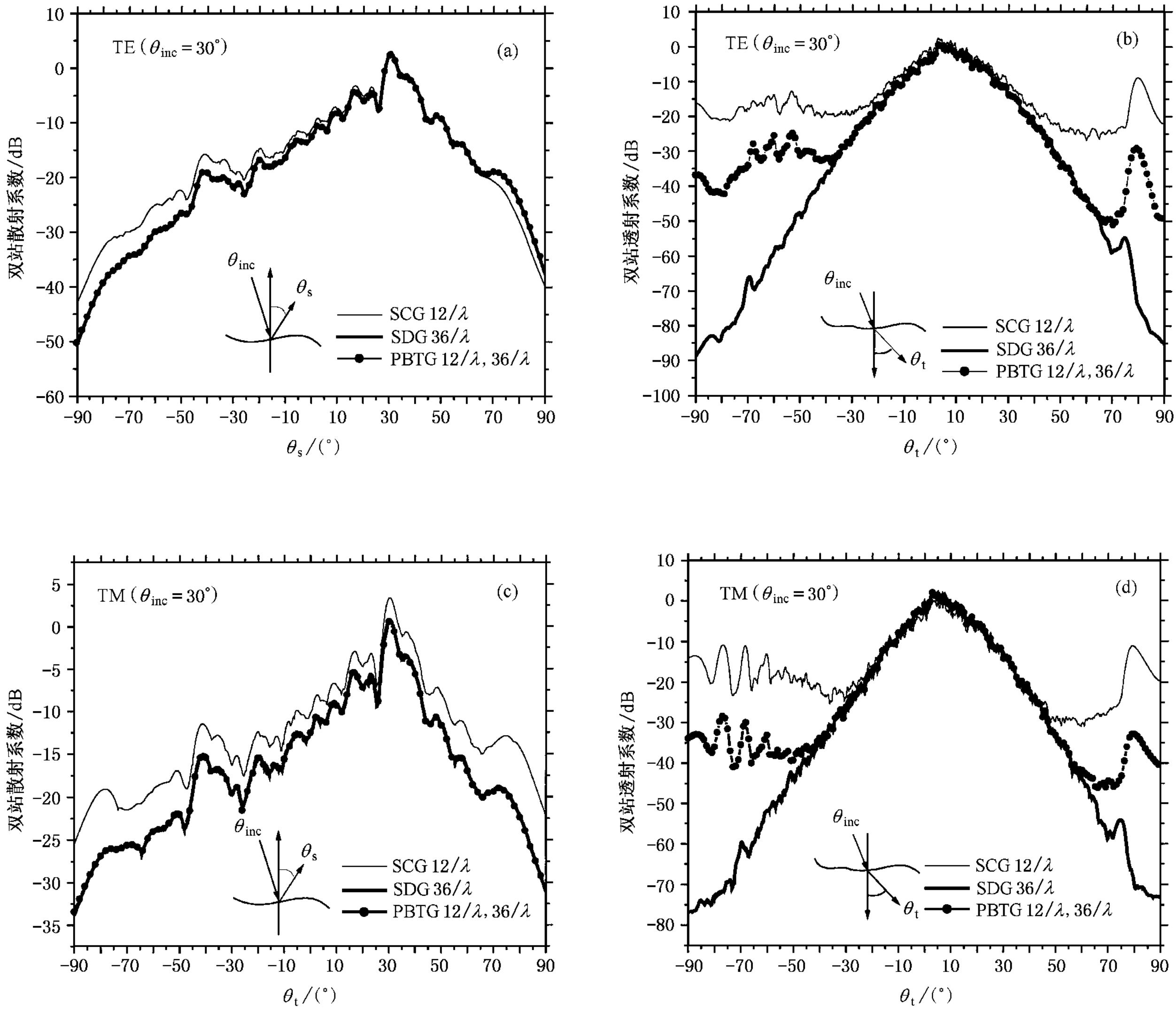


图 2　SCG,PBTG 和 SDG 的双站散射系数[(a),(c)]和双站透射系数[(b),(d)]

PBTG 的结果明显改善. 由图 2(a)和(c)可看到,PBTG 的双站散射与 SDG 完全重合. 由表 2 可看到,PBTG 反射率与 SDG 相比,相对误差为:TE 波 0.424%,TM 波 1.135%.

由图 2(b)和(d)可看到,PBTG 的双站透射与 SDG 相比在大角度时有较大误差. 由表 2 可看到,PBTG 透射率与 SDG 相比,相对误差很小,分别为:TE 波 0.181%,TM 波 1.441%. 由于大角度时双站透射很小,对透射率产生的影响不大. 因此,能量仍然守恒. 离散密度为(λ/12,λ/36)的 PBTG 法可以精确地计算双站散射场,只是在大角度的很小的透射系数(dB)与 SDG 相比有些偏差.

如果只考虑散射场的分布情况,PBTG 法计算精度足够精确.

7.2.2. 比较加密后离散密度的 SCG,PBTG 和 SDG 的双站散射系数和透射系数

另选 SCG 的 $\Delta x=\lambda/20$,PBTG 的 Δx($\lambda/20$,$\lambda/60$). 计算参数同上,计算结果见图 3.

由图 3(a)和(c)可以看出:这样选取的 Δx 使 SCG,PBTG 的双站散射与 SDG 有相当好的重合.

由图 3(b)和(d)可知:PBTG 双站透射与 SDG 基本重合一致,而 SCG 在大角度时仍与 SDG 偏离,特别是 TE 波. 由表 2 可知:PBTG 反射率与 SDG 相比较相对误差为:TE 波 0.51%,TM 波 0.512%. 以 SDG 透射率为样本,PBTG 透射率误差计算的辐射亮度温度误差为:TE 波 0.774K,TM 波 0.96K,小于辐射计测量误差要求(小于 1K,此时物理温度假设为 300K). 而用SCG的反射率误差计算得辐射亮度温

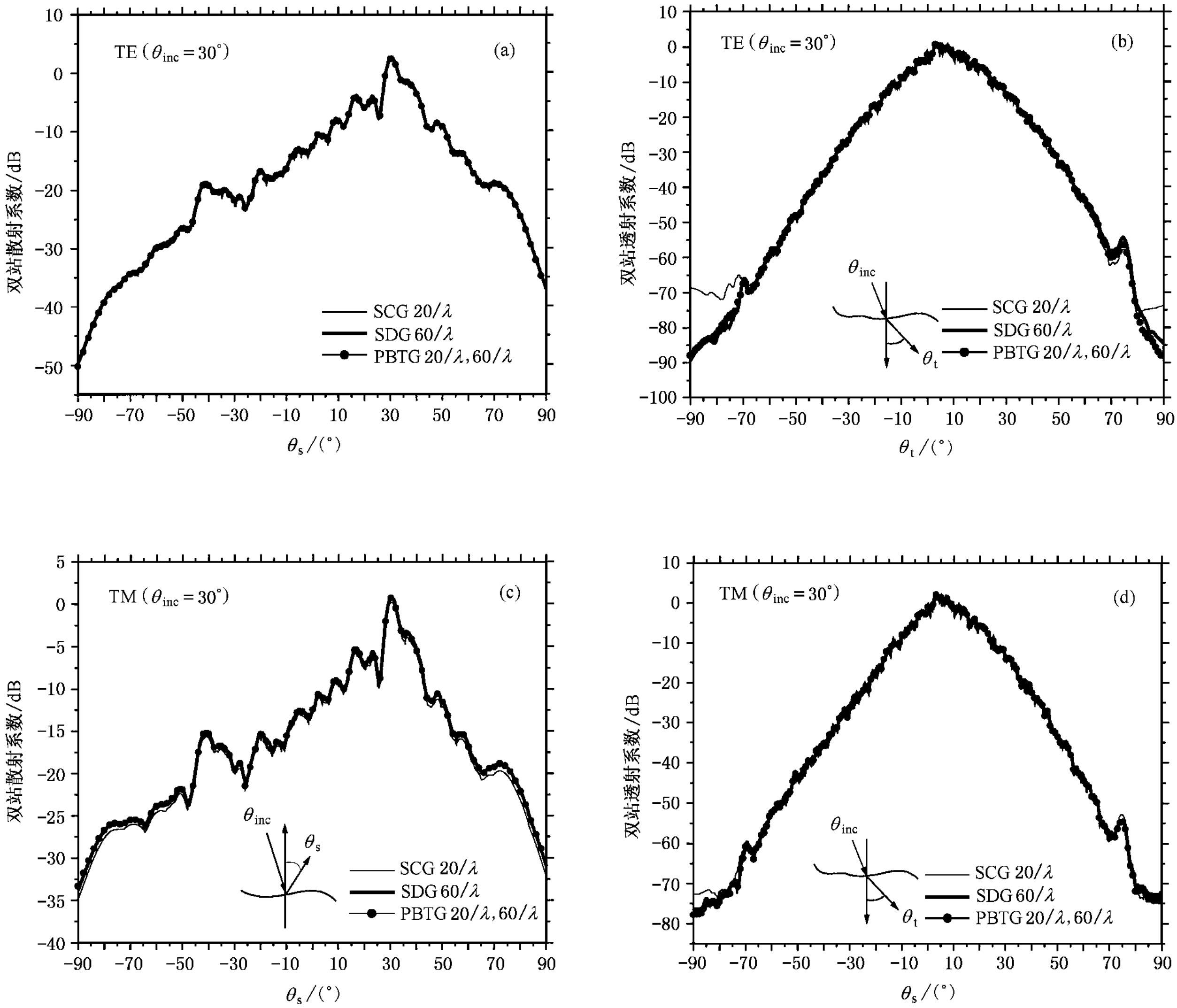


图 3　加密后离散密度的 SCG，PBTG 和 SDG 的双站散射系数[(a)，(c)]和双站透射系数[(b)，(d)]

度误差为：TE 波 13.05K，TM 波 15.45K，这一误差很大．

当电磁波折入高介电常量媒质里，沿分形粗糙面下表面的电磁场衰减变化快，SCG 不能反映这种变化，而 SDG 未能利用上表面电磁场变化小的特点，PBTG 则充分利用了这种上下表面两种分布的特点．

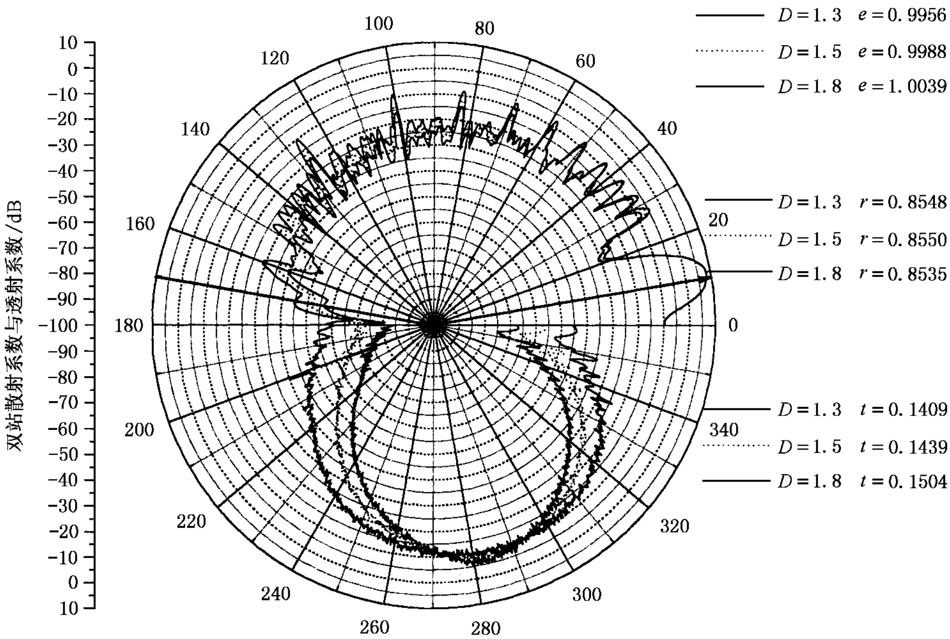
表 2 还给出 SCG，SDG 和 PBTG 计算时间比较，PBTG 的 CPU 计算时间虽比 SCG 多，但比 SDG 的计算时间快得多．

7.3. 低掠角入射时高介电常量分形粗糙面上双站散射与透射

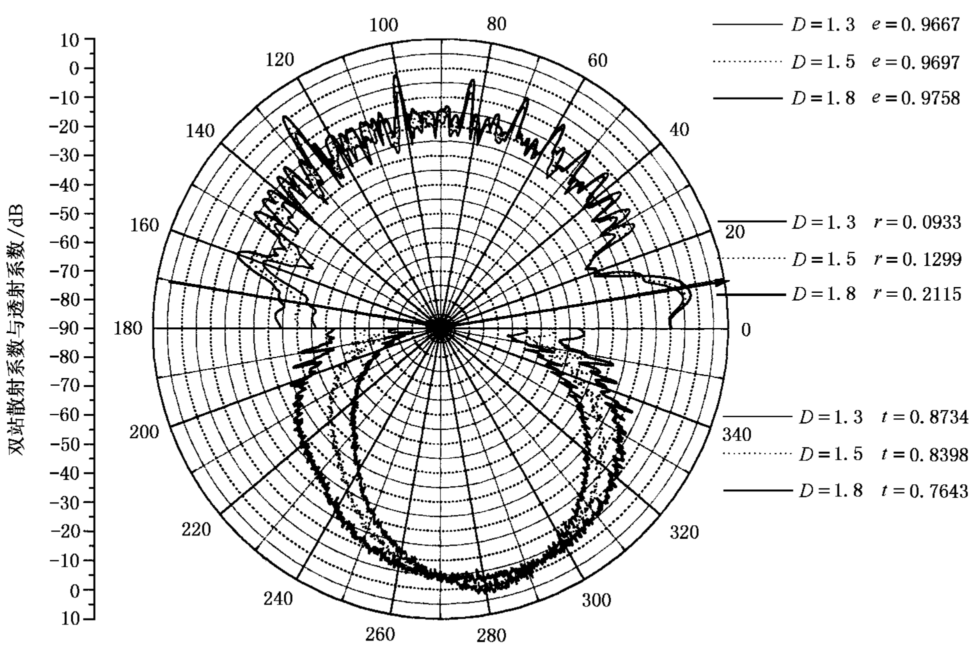
为计算低掠角入射时的散射与透射，低掠角 $\theta_{inc}=80°$ 入射时取 $L=200\lambda$，分维数分别取为 $D=1.3$，1.5 和 1.8．用 PBTG-FBM/SAA 计算．

由图 4 可以看到：在给定的均方高度下，三种不同分维数逐步增高，但在低掠角入射产生的镜面反射仍然占优，并在其两侧有角度性的波动，且随着分维数 D 的增大，分形粗糙面变得更加粗糙，角度性波动的双站散射系数不论是 TE 波还是 TM 波都将增大．

由于下垫面介质具高介电常量，透射系数表现为近似圆分布的漫散射现象，即沿着四周向下半空间漫透射，并且该圆也随着分维数 D 的增加而增加．



(a) TE波



(b) TM波

图4 低掠角入射时的双站散射

8. 结 论

本文发展了基于物理机理的 PBTG-FBM/SAA，适用于数值计算高介电常量分形介质粗糙面的双站散射和透射. 该方法比 SCG 精确，与 SDG 方法相比，节省了 CPU 计算时间和内存，并且能保证较高计算精度.

数值计算了在 TE，TM 锥形波入射下的分形粗糙介质面的双站散射系数和透射系数及其散射与透射的能量守恒，并讨论了双站散射与透射角度性变化的特征.

[1] Jaggard D L and Sun X 1990 *J. Opt. Soc. Am.* A **7** 1055
[2] Axline R M and Fung A K 1978 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **26** 482
[3] Chen J S and Ishimaru A 1990 *J. Acous. Soc. Am.* **88** 1846
[4] Chen R and West J C 1995 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* **33** 1206
[5] Rouvier S and Chenerie I 1997 *Radio Sci.* **32** 285
[6] Franceschetti G, Iodice A and Riccio D 2000 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* **38** 1644
[7] Holliday D, DeRaad L L and St-Cyr G J 1996 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **44** 722
[8] Chou H T and Johnson J T 1998 *Radio Sci.* **33** 1277
[9] Li Z X and Jin Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 797 (in Chinese) [李中新、金亚秋 2001 物理学报 **50** 797]
[10] Chou H T and Johnson J T 2000 *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing* **38** 605
[11] Johnson J T 1998 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **46** 752
[12] Tsang L and Li Q 1997 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **16** 356
[13] Li Q, Chan C H and Tsang L 1999 *IEEE Trans. Anten. Propag.* **47** 752
[14] Tsang L, Kong J A and Shin R T 1985 *Theory of Microwave Remote Sensing* (New York: Wiley)
[15] Harrington R F 1993 *Field Computation by Moment Method* (New York: IEEE Press)
[16] Sancchez-Gil J A and Nieto-Vesperinas M 1991 *J. Opt. Soc. Am.* A **8** 1270

Investigation of bistatic scattering and transmission through fractal rough dielectric surfaces with the physics-based two-grids method in conjunction with the forward and backward method and spectrum acceleration algorithm*

Li Zhong-Xin Jin Ya-Qiu†

(*Centre for Wave Scattering and Remote Sensing*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *China*)

(Received 12 July 2001; revised manuscript received 28 November 2001)

Abstract

To effectively numerically simulate bistatic scattering from a penetrable permittivity dielectric (as high as $(25 + i1.0)\varepsilon_0$) fractal rough surface at low grazing angle, a dense grid is required for accuracy; but a dense grid requires a large central processing unit (CPU) and memory. The physics-based two-grid (PBTG) method can reduce both CPU and memory requirements. In this paper, a hybrid approach of the forward-backward method (FBM) with spectral accelerated algorithm (SAA) combined with the PBTG method (PBTG-FBM/SAA) is developed. Bistatic scatterings from and transmissions through the one-dimensional fractal rough dielectric surface are calculated. The angular reflectivity and transmitivity demonstrate the energy conservation and the functional dependences upon the surface parameters.

Keywords: bistatic scattering, transmission, PBTG-FBM/SAA, fractal rough surface
PACC: 0270, 4110, 4752

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2001CB309405), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 49831060 and 60171009), the National Defense Pre-Research Foundation of China, and the Shanghai Postdoctoral Foundation.

† Author to whom correspondence should be addressed. E-mail: yqjin@fudan.ac.cn