第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1416-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.7,July,2002

广义经典力学与非完整力学的统一理论*

罗绍凯

(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

(2001 年 11 月 20 日收到)

建立广义经典力学与非完整力学的统一理论——广义非完整力学理论,构造其基本框架.提出广义非完整力学的 Четаев(Chetaev)定义,建立广义非完整力学系统的 Routh 方程和正则方程.给出广义非完整力学系统的非等时变分方程,证明由广义非完整力学系统的第一积分可以构造积分不变量.研究广义非完整力学系统作用量的非等时变分,给出系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系和积分不变量,进而给出等时变分下系统的 Poincaré 积分变量关系和通用积分不变量.给出一些推论,表明广义经典力学和一阶至高阶非完整力学的相关结论均为广义非完整力学理论的特款.

关键词:广义非完整力学,广义 Четаев 定义,运动方程,积分不变量

PACC:0316,0320

1. 引 言

1848—1858 年间,由 Остроградский 和 Jacobi 开创的广义经典力学理论,近 50 年得到了很大发展,取得一系列重要成果,并在数学、力学和物理学中广为应用[1—19].1894 年,Hertz 开创性地建立非完整力学研究领域[20],已在理论完善化、方法现代化、应用专门化诸方面取得重大成就[21—31].但是,100 余年来,广义经典力学与非完整力学一直是彼此独立地发展.本文拟建立广义经典力学与非完整力学的统一理论——广义非完整力学理论,构造其基本理论框架.

本文提出广义非完整力学的 Четаев(Chetaev)定义,建立广义非完整力学系统的 Routh 方程、正则方程和非等时变分方程,由系统的第一积分构造其积分不变量,给出系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系和积分不变量,并给出广义经典力学系统、广义非保守力学系统、一阶至高阶非完整力学系统的一系列相关的推论.

本文的研究工作表明,广义经典力学与一阶至高阶非完整力学可以和谐地统一在广义非完整力学理论之中.

2. 广义非完整力学系统虚位移的 Четаев 定义与运动方程

考虑一个 n 自由度的力学系统,其位形由广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$确定,设系统受有 g 个 l 阶非线性非完整约束

$$f_\rho(t,q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(l)}{q}_s)=0\qquad(\rho=1,\cdots,g),\tag{1}$$

在$(l-1)$次速度空间中,系统的虚位移满足推广的 Четаев 定义[24]

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\rho}{\partial \overset{(l)}{q}_s}\delta\overset{(l-1)}{q}_s=0,\tag{2}$$

$$\delta t=0,\quad \delta q_s=0,\quad \delta\dot{q}_s=\cdots=\delta\overset{(l-2)}{q}_s=0,\quad \delta\overset{(l-1)}{q}_s\neq 0.\tag{3}$$

我们把(1)式定义为广义非完整约束,将经典高阶非完整系统的 Четаев 定义(2),(3)推广,给出广义非完整力学的 Четаев 定义

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial f_\rho}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\delta\overset{(m-1)}{q}_s=0\qquad(m=1,\cdots,l),\tag{4}$$

$$\delta t=0,\quad \delta\overset{(m-1)}{q}_s\neq 0\qquad(m=1,\cdots,l).\tag{5}$$

---

* 河南省自然科学基金(批准号 994060800)和河南省教育委员会科研基金(批准号 993002)资助的课题.

变分定义(5)解除了变分定义(3)对 $\delta q_s=0,\delta\dot q_s=0,\cdots,\delta\overset{(l-2)}{q}_s=0$ 的限制,构造了广义复合导数空间.

设广义 Lagrange 函数为

$$L=L(t,q_s,\dot q_s,\cdots,\overset{(l)}{q}_s),\tag{6}$$

力学系统的运动使泛函

$$\int_{t_0}^{t_1}L\mathrm{d}t$$

在端点条件

$$\delta\overset{(m-1)}{q}_s\Big|_{t_0}=0,\quad \delta\overset{(m-1)}{q}_s\Big|_{t_1}=0\qquad(m=1,\cdots,l)\tag{7}$$

下取驻定值,引入广义 Lagrange 待定乘子 $\lambda_\rho^m(\rho=1,\cdots,g;m=1,\cdots,l)$,结合(4)和(5)式,按 Lagrange 乘子方法一贯逻辑,可得广义非完整力学系统带乘子形式的 Routh 方程

$$\sum_{m=1}^{l}(-1)^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left(\frac{\partial L}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\Lambda_s,$$

$$\Lambda_s=\sum_{m=1}^{l}\Lambda_s^m=\sum_{\rho=1}^{g}\sum_{m=1}^{l}\lambda_\rho^m\frac{\partial f_\rho}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\qquad(s=1,\cdots,n).\tag{8}$$

沿用文献[24]的思想,把方程(8)作为一个有条件的相应广义力学系统来研究,其中非完整约束(1)式是方程(8)的特殊的第一积分.

推广文献[25]给出的方法,可在方程(8)积分之前,求出 λ_ρ^m 作为 $\overset{(m)}{q}_s,\overset{(m-1)}{q}_s,t$ 的函数. 引入广义动量和广义 Hamilton 函数[3]

$$p_{s/m}=\sum_{j=0}^{l-m}(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\frac{\partial L}{\partial\overset{(j+m)}{q}_s},\tag{9}$$

$$H(\overset{(m-1)}{q}_s,p_{s/m},t)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\overset{(m)}{q}_s-L,\tag{10}$$

由(8)式可得广义非完整力学系统的正则方程

$$\overset{(m)}{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_{s/m}},\quad \dot p_{s/m}=-\frac{\partial H}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}+\tilde\Lambda_s$$
$$(s=1,\cdots,n),\tag{11}$$

$$\tilde\Lambda_s(\overset{(m-1)}{q}_s,p_{s/m},t)$$
$$=\sum_{\rho=1}^{g}\sum_{m=1}^{l}\lambda_\rho^m(\overset{(m-1)}{q}_s,\overset{(m)}{q}_s(\overset{(m-1)}{q}_s,p_{s/m},t),t)\left(\frac{\partial\tilde f_\rho}{\partial\overset{(m)}{q}_s}\right),$$

其中 Λ_s 为广义非完整约束力,$\tilde\Lambda_s$ 为 Λ_s 中 $\overset{(m)}{q}_s$ 用 $(\overset{(m-1)}{q}_s,p_{s/m},t)$ 替代所得表达式. 方程(11)称为广义非完整力学系统一般形式的正则方程,它的解联同非完整约束(1)式对初始条件的限制,便给出广义非完整系统的运动.

3. 广义非完整力学系统积分不变量的构造

3.1. 广义非完整力学系统的非等时变分方程

引入时间的任意可微无限小函数 Δt,它产生出的变轨与正轨之间的非等时变分定义为

$$\Delta\overset{(m-1)}{q}_s=\overset{(m-1)}{q^*_s}(t+\Delta t)-\overset{(m-1)}{q}_s(t),$$
$$\Delta p_{s/m}=p^*_{s/m}(t+\Delta t)-p_{s/m}(t)$$
$$(s=1,\cdots,n;m=1,\cdots,l).\tag{12}$$

由于 Δt 足够小,将 $\overset{(m-1)}{q^*_s}(t+\Delta t)$ 和 $p^*_{s/m}(t+\Delta t)$ 展开,并保留一次项,有

$$\Delta\overset{(m-1)}{q}_s=\delta\overset{(m-1)}{q}_s+\overset{(m)}{q}_s\Delta t,$$
$$\Delta p_{s/m}=\delta p_{s/m}+\dot p_{s/m}\Delta t$$
$$(s=1,\cdots,n;m=1,\cdots,l).\tag{13}$$

在方程(11)中,用 $\Delta\overset{(m-1)}{q}_s+\overset{(m-1)}{q}_s,\Delta p_{s/m}+p_{s/m},\Delta t+t$ 分别替代 $\overset{(m-1)}{q}_s,p_{s/m},t$,展开后忽略 $\Delta\overset{(m-1)}{q}_s,\Delta p_{s/m},\Delta t$ 的二阶以上小量,有

$$\overset{(m)}{q}_s+(\Delta\overset{(m-1)}{q}_s)^{\cdot}-\overset{(m)}{q}_s(\Delta t)^{\cdot}$$
$$=\frac{\partial H}{\partial p_{s/m}}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial\overset{(r-1)}{q}_k}\Delta\overset{(r-1)}{q}_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r}+\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial t}\Delta t,\tag{14}$$

$$\dot p_{s/m}+(\Delta p_{s/m})^{\cdot}-p_{s/m}(\Delta t)^{\cdot}$$
$$=-\frac{\partial H}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s\partial\overset{(r-1)}{q}_k}\Delta\overset{(r-1)}{q}_k$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r}-\frac{\partial^2H}{\partial\overset{(m-1)}{q}_s\partial t}\Delta t$$
$$+\tilde\Lambda_s+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial\tilde\Lambda_s}{\partial\overset{(r-1)}{q}_k}\Delta\overset{(r-1)}{q}_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial\tilde\Lambda_s}{\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r}+\frac{\partial\tilde\Lambda_s}{\partial t}\Delta t.\tag{15}$$

考虑到方程(11),由(14)和(15)式便得广义非完整力学系统的非等时变分方程

$$(\Delta\overset{(m-1)}{q}_s)^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial\overset{(r-1)}{q}_k}\Delta\overset{(r-1)}{q}_k$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r}$$
$$+\frac{\partial^2H}{\partial p_{s/m}\partial t}\Delta t+\frac{\partial H}{\partial p_{s/m}}(\Delta t)^{\cdot}$$
$$(s=1,\cdots,n),\tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta p_{s/m})^{\cdot} = & -\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Delta \overset{(r-1)}{q}_k \\
& -\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r} \\
& -\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial t}\Delta t + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Delta \overset{(r-1)}{q}_k \\
& +\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r} + \frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial t}\Delta t \\
& -\frac{\partial H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}(\Delta t)^{\cdot} + \tilde{\Lambda}_s(\Delta t)^{\cdot} \\
& (s = 1,\cdots,n). \qquad (17)
\end{aligned}
$$

3.2. 由广义非完整力学系统的第一积分构造积分不变量

Whittaker 指出 对于完整保守系统,已知一个第一积分,可以构造一个积分不变量[32]. 梅凤翔证明这一结论对非完整系统也适用[33]. 下面把这一重要思想用于广义非完整力学系统,提供广义非完整力学系统积分不变量的一种构造方法.

研究广义非完整力学系统的第一积分与积分不变量之间的关系. 假定广义非完整力学系统有一个第一积分

$$
\Phi(\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t) = \mathrm{const.}, \qquad (18)
$$

则可以证明

$$
\begin{aligned}
I = \int\Big(& \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\Delta \overset{(m-1)}{q}_s \\
& + \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{s/m}}\Delta p_{s/m} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Delta t\Big) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

是一个积分不变量.

实际上,利用方程(11),(16),(17),有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int & \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial \overset{(r-1)}{q}_k} \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial p_{k/r}}\Big(-\frac{\partial H}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k} + \tilde{\Lambda}_k\Big) \\
& + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\,\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\Big] + \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_{s/m}\,\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\frac{\partial H}{\partial p_{k/r}} \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_{s/m}\,\partial p_{k/r}}\Big(-\frac{\partial H}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k} + \tilde{\Lambda}_s\Big) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\,\partial p_{s/m}}\Big] \\
& \times \Delta p_{s/m} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Big[\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial p_{s/m}\,\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Delta \overset{(r-1)}{q}_k \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial p_{s/m}\,\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_{s/m}\,\partial t}\Delta t \\
& + \frac{\partial H}{\partial p_{s/m}}(\Delta t)^{\cdot}\Big] + \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{s/m}} \\
& \times\Big[-\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Delta \overset{(r-1)}{q}_k \\
& - \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r} - \frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial t}\Delta t \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Delta \overset{(m-1)}{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial p_{k/r}}\Delta p_{k/r} \\
& + \frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial t}\Delta t - \frac{\partial H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}(\Delta t)^{\cdot} + \tilde{\Lambda}_s(\Delta t)^{\cdot}\Big] \\
& + \Big[\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\,\partial t}\frac{\partial H}{\partial p_{s/m}} \\
& + \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_{s/m}\,\partial t}\Big(-\frac{\partial H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s} + \tilde{\Lambda}_s\Big) \\
& + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}\Big]\Delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\Delta t)^{\cdot} \\
= \int & \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Big\{\frac{\partial}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\Big[(\Phi, H) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\tilde{\Lambda}_k \\
& + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big]\Delta \overset{(m-1)}{q}_s + \frac{\partial}{\partial p_{s/m}}\Big[(\Phi, H) \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\tilde{\Lambda}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big]\Delta p_{s/m}\Big\} + \frac{\partial}{\partial t}\Big[(\Phi, H) \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\tilde{\Lambda}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big]\Delta t + \Big[(\Phi, H) \\
& + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\tilde{\Lambda}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big](\Delta t)^{\cdot}, \qquad (20)
\end{aligned}
$$

其中

$$
(\Phi, H) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\Big(\frac{\partial \Phi}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\frac{\partial H}{\partial p_{k/r}} - \frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\frac{\partial H}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\Big)
$$

为广义 Poisson 括号.

因为 Φ 是方程(20)的第一积分,因此有

$$
(\Phi, H) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{k/r}}\tilde{\Lambda}_k + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \qquad (21)
$$

把(21)式代入(20)式,得知(19)式为不变量. 于是得到如下定理:

定理 1 如果广义非完整力学系统有形如 $\Phi(\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t) = \mathrm{const.}$ 的一个第一积分,那么表达式

$$
\int\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\Delta \overset{(m-1)}{q}_s + \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial \Phi}{\partial p_{s/m}}\Delta p_{s/m} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Delta t\Big)
$$

为该系统的一个积分不变量.

逆定理 如果广义非完整力学系统有形如(19)式的一个积分不变量,那么该系统一定有一个第一

积分 $\Phi(\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t) = \mathrm{const}$.

在等时变分条件下,有 $\Delta t = 0$,$\delta \overset{(m-1)}{q}_s = \Delta \overset{(m-1)}{q}_s$,$\delta p_{s/m} = \Delta p_{s/m}$,方程(8)和(9)成为广义非完整力学系统的等时变分方程

$$(\delta \overset{(m-1)}{q}_s)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial p_{s/m}\partial \overset{(r-1)}{q}_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial p_{s/m}\partial p_{k/r}}\delta p_{k/r} \quad (s = 1,\cdots,n), \tag{22}$$

$$(\delta p_{s/m})^{\cdot} = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\delta \overset{(r-1)}{q}_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial^2 H}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s\partial p_{k/r}}\delta p_{k/r} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial \overset{(r-1)}{q}_k}\delta \overset{(r-1)}{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{l}\frac{\partial \tilde{\Lambda}_s}{\partial p_{k/r}}\delta p_{k/r} \quad (s = 1,\cdots,n). \tag{23}$$

定理 2　如果广义非完整力学系统有形如 $\Phi(\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t) = \mathrm{const}$. 的一个第一积分,那么表达式

$$\int \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}\delta \overset{(m-1)}{q}_s + \frac{\partial \Phi}{\partial p_{s/m}}\delta p_{s/m}\right)$$

为该系统在等时变分下的一个积分不变量. 反之,也成立.

4. 广义非完整力学系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系与积分不变量

Poincaré-Cartan 积分不变量和 Poincaré 通用积分不变量在经典力学,尤其在近代物理学中具有非常重要的作用[9,34]. 众所周知,它们在天体力学、流体动力学等中也有重要地位. 随着人们认识的发展,积分不变量受到数学、力学、物理学界广泛的重视,Arnold 甚至认为[8]:积分不变量不仅是 Hamilton 流的基础,并且可以作为整个力学的基础. Djukic,刘端等人在积分不变量的基本理论方面做了很有价值的工作[35,36]. 下面进一步给出广义非完整力学系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系和积分不变量,并给出 Poincaré 通用积分不变量.

4.1. 广义非完整力学系统作用量的非等时变分

设广义非完整力学系统初始和终了时刻以及初始和终了速度都不是固定的,而是参数 α 的函数,即

$$t_0 = t_0(\alpha),\quad \overset{(m)}{q}{}^0_s = \overset{(m)}{q}{}^0_s(\alpha);$$

$$t_1 = t_1(\alpha),\quad \overset{(m)}{q}{}^1_s = \overset{(m)}{q}{}^1_s(\alpha) \qquad (m = 1,\cdots,l).$$

在这种情况下,Hamilton 作用量的变分为

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(l)}{q}_s)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left(L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \Delta L\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q}_s}\delta \overset{(m)}{q}_s\,\mathrm{d}t + L\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1}.\end{aligned} \tag{24}$$

利用 $\mathrm{d}\delta \overset{(m)}{q}_s = \delta\mathrm{d}\overset{(m)}{q}_s$,对(24)式分部积分,并考虑到(9)式,得

$$\Delta W = \sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\delta \overset{(m-1)}{q}_s\Big|_{t_0}^{t_1} + L\Delta t\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\left[\sum_{\beta=1}^{l}(-1)^{\beta+1}\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(\beta)}{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right]\delta \overset{(m-1)}{q}_s\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

引入时间的任意可微无限小函数 Δt,它产生出的变轨与正轨之间的非等时变分与等时变分之间满足关系式

$$\Delta \overset{(m-1)}{q}_s = \delta \overset{(m-1)}{q}_s + \overset{(m)}{q}_s\Delta t \quad (s = 1,\cdots,n;\ m = 1,\cdots,l), \tag{26}$$

将(26)和(10)式与(25)式配方,得

$$\begin{aligned}\Delta W = {}&\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t\right)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Lambda_s\delta \overset{(m-1)}{q}_s\right)\mathrm{d}t \\ &+ \int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\left[\sum_{\beta=1}^{l}(-1)^{\beta+1}\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(\beta)}{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} - \Lambda_s\right]\delta \overset{(m-1)}{q}_s\,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{27}$$

在 α 值对应的路径为正路的情况下,有(8)式成立,则

$$\Delta W = \left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t\right)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\Lambda_s\delta \overset{(m-1)}{q}_s\right)\mathrm{d}t. \tag{28}$$

在 $\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t$ 构成的广义增广相空间中取一条满足约束条件 $\tilde{f}_\rho(\overset{(m-1)}{q}_s, p_{s/m}, t) = f_\rho(\overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_s(\overset{(m-1)}{q}_s,$

$p_{s/m}$,t),t)$=0$ 的闭曲线 C_0

$$\overset{(m)}{q}{}_s^0 = \overset{(m)}{q}{}_s^0(\alpha),\ p_{s/m}^0 = p_{s/m}^0(\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma;s = 1,\cdots,n;m = 1,\cdots,l),$$

其中 $\alpha=0$,$\alpha=\gamma$ 为 C_0 上同一点,由于约束的存在,C_0 实际上是在广义增广相空间的某子空间中. 以 C_0 上每一点各引一条真实路径,得到一个封闭的正路管

$$\overset{(m)}{q}_s = \overset{(m)}{q}_s(t,\alpha),\ p_{s/m} = p_{s/m}(t,\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma;s = 1,\cdots,n;m = 1,\cdots,l),$$

其中$\overset{(m)}{q}_s(t,0) = \overset{(m)}{q}_s(t,\gamma)$,$p_{s/m}(t,0) = p_{s/m}(t,\gamma)$,在此正路管上任取一条包围正路管并与每根轨线相切的闭曲线 C_1

$$\overset{(m)}{q}_s = \overset{(m)}{q}{}_s^1(\alpha),\ p_{s/m} = p_{s/m}^1(\alpha),\ t = t_1(\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma;s = 1,\cdots,n;m = 1,\cdots,l).$$

将(28)式在$[0,\gamma]$上积分,得

$$\begin{aligned} 0 &= W(\gamma) - W(0) \\ &= \int_0^\gamma \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &\quad + \int_0^\gamma \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l \Lambda_s \delta \overset{(m-1)}{q}_s \Big) \mathrm{d}t \\ &= \oint_{C_1} \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) \\ &\quad - \oint_{C_0} \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \oint_C \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l \Lambda_s \delta \overset{(m-1)}{q}_s \Big) \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{29}$$

考虑到 t_0,t_1 的任意性,这里 C 为包围正路管且和每根轨线相切的任一曲线

$$\overset{(m)}{q}_s = \overset{(m)}{q}_s(\alpha),\ p_{s/m} = p_{s/m}(\alpha),t = t(\alpha)$$

$$(0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma;s = 1,\cdots,n;m = 1,\cdots,l).$$

将(29)式两端同除以 $\Delta t = t_1 - t_0$,取极限,应用中值定理,得到关系式

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oint_C \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) \\ &= \oint_C \Big(- \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l \Lambda_s \delta \overset{(m-1)}{q}_s \Big). \end{aligned} \tag{30}$$

4.2. 广义非完整力学系统的 Poincaré-Cartan 积分变量关系与积分不变量

定理 3 如果曲线 C 是围绕广义非完整力学系统正路管的任意闭曲线,则沿此曲线存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \oint_C \Big(- \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l \Lambda_s \delta \overset{(m-1)}{q}_s \Big), \tag{31}$$

其中

$$I = \oint_C \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) \tag{32}$$

表示广义非完整力学系统的 Poincaré-Cartan 积分. 如果存在势函数 $U(\overset{(m-1)}{q}_s)$,则使得 $\Lambda_s^m = \dfrac{\partial U}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}$ $(m = 1,\cdots,l)$,或者 $\Lambda_s = 0$,则沿曲线 C 存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,即

$$\oint_C \Big(\sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \Delta \overset{(m-1)}{q}_s - H\Delta t \Big) = \text{const.} \tag{33}$$

若曲线 C 是由广义非完整力学系统的同时状态所组成,$\Delta t = 0$,则有

定理 4 如果围绕广义非完整力学系统正路管的闭曲线 C 是由该系统的同时状态所组成,则沿此曲线存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \oint_C \Big(- \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l \Lambda_s \delta \overset{(m-1)}{q}_s \Big), \tag{34}$$

其中

$$I_1 = \oint_C \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \delta \overset{(m-1)}{q}_s \tag{35}$$

表示广义非完整力学系统的 Poincaré 积分. 如果存在势函数 $U(\overset{(m-1)}{q}_s)$,使得 $\Lambda_s^m = \dfrac{\partial U}{\partial \overset{(m-1)}{q}_s}$ $(m = 1,\cdots,l)$,或者 $\Lambda_s = 0$,则沿曲线 C 存在广义 Poincaré 通用积分不变量,即

$$\oint_C \sum_{s=1}^n \sum_{m=1}^l p_{s/m} \delta \overset{(m-1)}{q}_s = \text{const.} \tag{36}$$

5. 推 论

5.1. 关于广义非完整力学的 Четаев 定义和运动方程的讨论

对于不受约束的力学系统,约束对虚位移的限制自行消失,广义非完整约束力 $\Lambda_s = 0$,方程(8)和(11)蜕化为广义经典力学的 Lagrange 方程和正则方程[3].

对于不受非完整约束的非保守力学系统,如果把 Λ_s 重新定义为

$$\Lambda_s = Q_k(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(l)}{q}_s), \tag{37}$$

由方程(8)和(11)得到广义非保守力学系统的 Lagrange 方程和正则方程[14].

在(3)式定义的$(l-1)$次速度空间中,广义非完整力学的 Четаев 定义(4)和(5)蜕化为高阶非完整力学系统的 Четаев 定义(2)和(3),方程(8)和(11)蜕化为高阶非完整力学系统的 Routh 方程和正则方程[24].

在$\delta t=0,\delta q_s\neq 0$的位形空间中,广义非完整力学的 Четаев 定义(4)和(5)蜕化为一阶非完整力学系统的 Четаев 定义,方程(8)和(11)蜕化为一阶非完整系统的 Routh 方程和正则方程[24].

5.2. 广义经典力学系统的积分不变量

对于不受约束的广义经典力学系统,$\Lambda_s=0$,由定理 1 至定理 4 分别得到

推论 1 如果广义经典力学系统有形如$\Phi(\overset{(m-1)}{q_s},p_{s/m},t)=\text{const.}$的一个第一积分,那么(19)式为该系统在非等时变分下的一个积分不变量.反之,也成立.

推论 2 如果广义经典力学系统有形如$\Phi(\overset{(m-1)}{q_s},p_{s/m},t)=\text{const.}$的一个第一积分.那么表达式

$$\int\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\overset{(m-1)}{q_s}}\delta\overset{(m-1)}{q_s}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{s/m}}\delta p_{s/m}\right)$$

为该系统在等时变分下的一个积分不变量.反之,也成立.

推论 3 如果曲线 C 为围绕广义经典力学系统正路管的任意闭曲线,则沿此曲线存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量,即

$$\oint_C\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\Delta\overset{(m-1)}{q_s}-H\Delta t\right)=\text{const.}\tag{38}$$

推论 4 如果围绕广义经典力学系统正路管的闭曲线 C 是由该系统的同时状态所组成,则沿此曲线存在广义 Poincaré 通用积分不变量,即

$$\oint_C\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\Delta\overset{(m-1)}{q_s}=\text{const.}\tag{39}$$

5.3. 广义非保守力学系统的积分不变量

对于不受非完整约束的力学系统,把 Λ_s 重新定义为(37)式,由定理 1 至定理 4 得到

推论 5 如果广义非保守力学系统有形如$\Phi(\overset{(m-1)}{q_s},p_{s/m},t)=\text{const.}$的一个第一积分,那么(19)式为该系统在非等时变分下的一个积分不变量.反之,也成立.

推论 6 如果广义非保守力学系统有形如$\Phi(\overset{(m-1)}{q_s},p_{s/m},t)=\text{const.}$的一个第一积分,那么表达式

$$\int\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\overset{(m-1)}{q_s}}\delta\overset{(m-1)}{q_s}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{s/m}}\delta p_{s/m}\right)$$

为该系统在等时变分下的一个积分不变量.反之,也成立.

推论 7 如果曲线 C 为围绕广义非保守力学系统正路管的任意闭曲线,则沿此曲线存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_C\left(\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\Delta\overset{(m-1)}{q_s}-H\Delta t\right)=\oint_C\left(-\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}Q_s\,\delta\overset{(m-1)}{q_s}\right).\tag{40}$$

假如广义力学系统只受保守力的作用,则沿曲线 C 存在广义 Poincaré-Cartan 积分不变量(33)式.

推论 8 如果围绕广义非保守力学系统正路管的闭曲线 C 是由该系统的同时状态所组成,则沿此曲线存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_C\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}p_{s/m}\,\delta\overset{(m-1)}{q_s}=\oint_C\left(-\sum_{s=1}^{n}\sum_{m=1}^{l}Q_s\,\delta\overset{(m-1)}{q_s}\right).\tag{41}$$

假如广义力学系统只受保守力的作用,则沿曲线 C 存在广义 Poincaré 通用积分不变量(36)式.

5.4. 高阶非完整力学系统的积分不变量

在满足(2)和(3)式的$(l-1)$次速度空间中,(9)和(10)式化为

$$p_{s/m}=\frac{\partial L}{\partial\overset{(l)}{q_s}},\quad H=\sum_{s=1}^{n}p_{s/l}\delta\overset{(l)}{q_s}-L,\quad \Lambda_s=\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho^l\frac{\partial f_\rho}{\partial\overset{(l)}{q_s}},\tag{42}$$

由定理 1 至定理 4 分别得到

推论 9 如果高阶非完整力学系统有形如$\Phi(\overset{(l-1)}{q_s},p_{s/l},t)=\text{const.}$的一个第一积分,那么表达式

$$\int\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial\overset{(l-1)}{q_s}}\Delta\overset{(l-1)}{q_s}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial p_{s/l}}\delta p_{s/l}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Delta t\right)$$

为该系统在非等时变分下的一个积分不变量.反之,也成立.

推论 10 如果高阶非完整力学系统有形如$\Phi(\overset{(l-1)}{q_s},p_{s/l},t)=\text{const.}$的一个第一积分,那么表达式

$$\int\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\overset{(l-1)}{q_s}}\delta\overset{(l-1)}{q_s}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_{s/l}}\delta p_{s/l}\right)$$

为该系统在等时变分下的一个积分不变量.反之,也

成立.

推论 11　如果曲线 C 是围绕高阶非完整力学系统正路管的任意闭曲线,则沿此曲线存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\oint_C\Big(-\sum_{s=1}^{n}\Lambda_s\,\delta\overset{(l-1)}{q_s}\Big),\tag{43}$$

其中

$$I=\oint_C\Big(\sum_{s=1}^{n}p_{s/l}\,\Delta\overset{(l-1)}{q_s}-H\Delta t\Big)\tag{44}$$

表示经典力学系统的高阶 Poincaré-Cartan 积分.如果存在势函数 $U(\overset{(l-1)}{q_s})$,使得 $\Lambda_s=\dfrac{\partial U}{\partial\overset{(l-1)}{q_s}}$,或者 $\Lambda_s=0$,则沿曲线 C 存在高阶 Poincaré-Cartan 积分不变量

$$\oint_C\Big(\sum_{s=1}^{n}p_{s/l}\,\Delta\overset{(l-1)}{q_s}-H\Delta t\Big)=\text{const}.\tag{45}$$

推论 12　如果围绕高阶非完整力学系统正路管的闭曲线 C 是由该系统的同时状态所组成,则沿此曲线 C 存在积分变量关系

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=\oint_C\Big(-\sum_{s=1}^{n}\Lambda_s\,\delta\overset{(l-1)}{q_s}\Big),\tag{46}$$

其中

$$I_1=\oint_C\sum_{s=1}^{n}p_{s/l}\,\delta\overset{(l-1)}{q_s}\tag{47}$$

表示经典力学系统的高阶 Poincaré 积分.如果存在势函数 $U(\overset{(l-1)}{q_s})$,使得 $\Lambda_s=\dfrac{\partial U}{\partial\overset{(l-1)}{q_s}}$,或者 $\Lambda_s=0$,则沿曲线 C 存在高阶 Poincaré 通用积分不变量,即

$$\oint_C\sum_{s=1}^{n}p_{s/l}\,\delta\overset{(l-1)}{q_s}=\text{const}.\tag{48}$$

6. 结　　语

本文的主要结果为(4),(5),(8),(11)式和定理 1—4. 推论 5—8 在广义非保守力学中,推论 9—12 在高阶非完整力学中也均为新的结果. 推论 1 和 2 即为文献[15]的结果,推论 3 和 4 即为文献[38]的结果.对于一阶非完整力学系统,取 $m=l=1$,由定理 1 得到文献[37]的结果,由定理 2 得到文献[33]的结果,由推论 7 和 8 得到文献[36]的结果.

在本文基础上,还可以进一步研究给出广义非完整力学系统的万有 d'Alembert 原理、最小作用量原理,建立系统的 Nielsen 算子、Euler 算子及其关系,给出系统的 Nielsen 型方程或其他类型的方程,给出系统的 Routh 降阶法、Whittaker 降阶法、Hamilton-Jacobi 方法、场方法等积分方法,给出系统的 Noether 对称性、Lie 对称性、形式不变性及相应的守恒律,研究系统的代数结构与几何结构,研究该理论在数学、力学、物理学相关分支中的应用等.

[1] Maria R C 1961 *An. Soc. Cient Argent* **171** 50

[2] Maria R C 1963 *An. Soc. Cient Argent* **176** 62

[3] Judith G K and Joseph A S 1965 *Amer. J. Phys.* **33** 140

[4] Anderson D 1973 *J. Math. Phys.* **14** 934

[5] Leon M D and Rodrigues P R 1985 *Generalized Classical Mechanics and Field Theory* (Amsterdam: ESPBV)

[6] Julio M T, Luiz J N and Luiner C D 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2062

[7] Podolsky B 1942 *Phys. Rev.* **65** 228

[8] Arnold V I 1979 *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (New York: Springer-Verlag)

[9] Li Z P 1993 *Classical and Qnantal Dynamics of Constrained System and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechrcic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其性质(北京: 北京工业大学出版社)]

[10] Mei F X 1990 *Appl. Math. Mech.* **11** 569

[11] Qiao Y F 1990 *Acta Mech. Sin.* **22** 99 (in Chinese) [乔永芬 1990 力学学报 **22** 99]

[12] Ding G T 1987 *Chin. Sci. Bull.* **32** 908 (in Chinese) [丁光涛 1987 科学通报 **32** 908]

[13] Ding G T 1989 *Chin. Sci. Bull.* **34** 1759 (in Chinese) [丁光涛 1981 科学通报 **34** 1759]

[14] Qiao Y F 1993 *Chin. Sci. Bull.* **38** 314 (in Chinese) [乔永芬 1993 科学通报 **38** 314]

[15] Luo S K 1995 *Huanghuai J.* **11** 25 (in Chinese) [罗绍凯 1995 黄淮学刊 **11** 25]

[16] Mei F X 1999 *Appliations of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p33 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京: 科学出版社)第 33 页]

[17] Qiao Y F, Li R J and Zhao S H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 811 (in Chinese) [乔永芬、李仁杰、赵淑红 2001 物理学报 **50** 811]

[18] Zhang Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2059 (in Chinese) [张　毅 2001 物理学报 **50** 2059]

[19] Zhang Y, Shang M amd Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[20] Hertz H R 1894 *Die Prinzipien der Mechanik* (Leibzing:Gesammelte Werke) p37

[21] Chetaev N G 1962 *Stability of Motion*, *Paper on Analytical Mechanics* (Moscow:Science Academy Press) p323

[22] Neimark U I and Fufaev N A 1967 *Dynamics of Nonholonomic Systems* (Moscow:Nauka) (in Russian)

[23] Niu Q P 1964 *Acta Mech*. *Sin*. **7** 139 (in Chinese) [**牛青萍** 1964 **力学学报 7** 139]

[24] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [**梅凤翔** 1985 **非完整系统力学基础(北京:北京工业学院出版社)**]

[25] Mei F X 1987 *Research on Nonholonomic Dynamics* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [**梅凤翔** 1987 **非完整动力学研究(北京:北京工业学院出版社)**]

[26] Mei F X, Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [**梅凤翔、刘 端、罗 勇** 1991 **高等分析力学(北京:北京理工大学出版社)**]

[27] Luo S K and Mei F X 1994 *Thirty Years for Nonholonomic Mechanics in China* (Kaifeng:Henan University Press) p1 (in Chinese) [**罗绍凯、梅凤翔** 1994 **中国非完整力学三十年(开封:河南大学出版社)第** 1 **页**]

[28] Mei F X 2000 *ASME Appl*. *Mech*. *Rev*. **53** 283

[29] Luo S K 1990 Proceedings of the International Conference on Dynamics, Vibration and Control (Beijing:Peking University Press) p645

[30] Luo S K, Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2053 (in Chinese) [**罗绍凯、郭永新、陈向炜** 2001 **物理学报 50** 2053]

[31] Guo Y X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 181

[32] Whittaker E T 1952 *A Treatise on the Analytical Mechanics of Poarticles and Rigid Bldies*, 4th ed (Cambridge:Cambridge University Press) p269

[33] Mei F X 1991 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **36** 2038

[34] Liu C Q and Luo S X 1985 *Appl*. *Math*. *Mech*. **16** 869

[35] Djukic D S 1975 *Acta Mech*. **23** 291

[36] Liu D, Luo Y and Xing S Y 1991 *Acta Mech*. *Sin*. **23** 617 (in Chinese) [**刘 端、罗 勇、邢生玉** 1991 **力学学报 23** 617]

[37] Zhang J F 1992 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **37** 661 (in Chinese) [**张解放** 1992 **科学通报 37** 661]

[38] Zhang J F 1993 *J*. *Capital Normal Univ*. **14**(2) 44

A unified theory of generalized classical mechanics and nonholonomic mechanics*

Luo Shao-Kai

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Changsha University*, *Changsha* 410003, *China*)

(Received 20 November 2001)

Abstract

A unified theory of generalized classical mechanics and nonholonomic mechanics, or the theory of generalized nonholonomic mechanics, and its basic theoretical frame are constructed. Firstly, the generalized Четаев (Chetaev) condition, Routh equations and canonical equations of the generalized nonholonomic mechanical system are given. Secondly, the equations of nonsimultaneous variation of the generalized nonholonomic mechanical system are established by using the relation between the simultaneous variation and the nonsimultaneous variation. And it is proved that using a first integral we can costruct an integral invariant of the system. Thirdly, the nonsimultaneous variation of Hamilton action of the generalized nonholonomic mechanical system is studied, and the integral variants and integral invariants with Poincaré-Cartan type and Poincaré type are obtained. Finally, some deductions are given. The results show that the relevant conslusions of the generalized classical mechanics and the first-order or higher-order nonholonomic mechanics are the deductions of the theory of generalized nonholonomic mechanics.

Keywords: generalized nonholonomic mechanics, generalized Четаев condition, equation of motion, integral invariant

PACC: 0316, 0320

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 934060800), and the Science Foundation of Educational Commitee of Henan Province, China (Grant No. 93002).