第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1424-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.7,July,2002

扩展的混合指数方法及其应用*

徐桂琼[1)2)] 李志斌[1)]

[1)](华东师范大学计算机科学技术系,上海 200062)

[2)](上海大学信息工程与管理系,上海 200436)

(2001 年 11 月 18 日收到)

改进了 Hereman 提出的构造非线性发展方程孤波解的混合指数方法,通过将非线性发展方程孤波解的表示形式推广到实指数解或复指数解的无穷级数,得到了扩展的混合指数方法. 以正则长波方程为例,说明通过扩展的混合指数方法可获得包括正则孤波解、奇异孤波解及周期解在内的诸多精确解.

关键词:孤波解,混合指数法,正则长波方程

PACC:0340K,0290

1. 引 言

近年来,许多学者利用双曲函数方法求解非线性发展方程的准确解,获得了许多有意义的结果[1—9]. 这些方法的基本思想是将非线性发展方程的孤波解先验假设为双曲函数的多项式,进而将微分方程的求解问题转化为非线性代数方程组的求解问题,借助计算机代数系统进行代数计算,由此获得非线性发展方程的准确孤波解. Hereman 提出的混合指数方法[10]是构造非线性发展方程孤波解的另外一种代数方法,利用这种方法人们已经获得了许多非线性发展方程和方程组的孤波解[10—14]. 混合指数方法的基本原理是将非线性发展方程的孤波解表示为该方程中线性部分的实指数解的级数形式. 由于双曲函数是由实指数函数定义的,因此凡是能由双曲函数方法获得的解,理论上均可通过混合指数方法得到. 然而,从目前诸多文献不难看出,利用 Hereman 提出的混合指数方法求得的解的形式相当有限,通过双曲函数方法可获得的解,由它却无法得到[7—14]. 为此,本文分析并推广了 Hereman 的混合指数方法,扩展后的混合指数方法不仅可以获得双曲函数方法得到的所有解,而且还能得到一些新的准确解. 为说明这点,以一个简单的模型——正则长波(RLW)方程为例,表明使用扩展的混合指数方法可以获得包括正则孤波解、奇异孤波解以及周期解等在内的多种形式的准确解.

考虑非线性常微分方程

$$F(\varphi,\varphi',\varphi'',\cdots)=0, \tag{1}$$

其中"$'$"$=\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$,$\xi$ 为相应发展方程的行波变量,F 是其变元的多项式. 混合指数方法的出发点是假设方程(1)具有如下形式的解:

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n g^n,\quad g=\exp(-K\xi),\quad K>0, \tag{2}$$

其中 a_n 为待定系数,g 为方程(1)中相应线性方程的实指数解.

将(2)式代入方程(1),利用级数乘积的 Cauchy 准则,可得到关于系数 a_n 的递推关系式

$$\begin{aligned}P(n)a_n+C_{\mathrm{H}}\sum_{r=H-1}^{n-1}\cdots\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{m-1}(l)^{u_1}(m-l)^{u_2}\cdots(n\\-r)^{u_H}a_la_{m-l}\cdots a_{n-r}+\cdots+C_{\mathrm{L}}\\\times\sum_{r=L-1}^{n-1}\cdots\sum_{m=2}^{k-1}\sum_{l=1}^{m-1}(l)^{v_1}(m-l)^{v_2}\cdots(n\\-r)^{u_H}a_la_{m-l}\cdots a_{n-r}=0,\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $P(n)$为 n 的多项式,H,L 分别为方程(1)中所有非线性项关于 φ 的最高次幂和最低次幂,C_{H},C_{L} 分别为方程(1)中最高阶非线性项和最低阶非线性项的系数,u_i,v_i 分别为方程(1)中最高阶非线性项和最低阶非线性项中各阶导数的阶数.

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998030600)及上海市曙光计划资助的课题.

设 a_n 为 n 的一个适当的多项式，在很多情形下可以从方程(3)中解出 a_n. 记

$$F_j(g) = \sum_{n=1}^{\infty} n^j g^n, \qquad j = 0,1,2,\cdots, \tag{4}$$

利用递推关系式

$$F_{j+1}(g) = gF'_j(g), \quad F_0(g) = \frac{g}{1-g}, \quad j = 0,1,2,\cdots, \tag{5}$$

可给出方程(1)的闭合形式解.

2. 扩展的混合指数方法

利用上述混合指数方法，可以求出许多非线性发展方程和方程组的正则孤波解[10—14]，这些解多以双曲正切和双曲正割的形式出现. 混合指数方法的难点在于没有一般的方法求解递推方程(3)，我们发现假设 a_n 为 n 的多项式是不完全的，事实上，一般可令

$$a_n = \sum_{j=0}^{\delta} A_j C_j^n n^j, \tag{6}$$

其中 A_j，C_j 均为常数. 如果方程(1)有形如(2)式的解，则可通过平衡出现在方程(1)中的线性最高阶导数项和非线性项来确定(6)式中的参数 δ，即

$$\delta = (\lambda - H + 1 - \Lambda)/(H - 1), \tag{7}$$

其中 λ 为多项式 $P(n)$ 的次数，$\Lambda = \sum_{i=1}^{H} u_i$. 由(4)式可将方程(1)的形式幂级数解(2)式，表示为

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{\delta} A_j F_j(C_j g). \tag{8}$$

适当选取 C_j 的符号，不仅可以得到方程(1)正则形式的精确解，也可以得到与其相伴的发散形式的精确解.这些解大都以双曲余切和双曲余割的形式出现，在物理上，它们表示相应发展方程具有激波结构的孤波.

更一般地，考虑 g 为方程(1)中相应线性方程的复指数解，即不限定 K 为正实数，用同样的方法还可获得方程(1)型为 sec，csc，tan，cot 等的周期解. 基于这些改进，本文大大丰富了混合指数方法求解非线性发展方程的精确解的形式.

下面以 RLW 方程为例，详细说明扩展的混合指数方法的求解过程.

3. RLW 方程的精确解

RLW 方程也称为 Benjamin-Bona-Mahony 方程[10]，其一般形式为

$$u_t + u_x + \alpha u u_x - u_{xxt} = 0, \tag{9}$$

其中 α 为参数，$u_t = \partial u/\partial t$，$u_x = \partial u/\partial x$.

为求 RLW 方程的孤波解，引入行波变换

$$u(x,t) = \phi(\xi), \quad \xi = x - ct + \xi_0, \tag{10}$$

其中 c 为波速，ξ_0 为任意常数. 将(10)式代入方程(9)，关于变量 ξ 积分，结果记作

$$c\phi'' + (1 - c)\phi + \frac{\alpha}{2}\phi^2 = 0, \tag{11}$$

其中“$''$”$= \mathrm{d}^2/\mathrm{d}\xi^2$.

设 M 为常数，又引入变换

$$\phi = M + \varphi, \tag{12}$$

代入方程(11)，得

$$c\varphi'' + (\alpha M - c + 1)\varphi + \frac{\alpha}{2}\varphi^2 + M\left(\frac{\alpha M}{2} - c + 1\right) = 0, \tag{13}$$

要求方程(13)为齐次的，故应有

$$M\left(\frac{\alpha M}{2} - c + 1\right) = 0. \tag{14}$$

分两种情况讨论：

1)当 $M = 0$ 时，方程(13)线性部分的解为 $g = \exp(-K\xi)$，其中 $K^2 = \frac{c-1}{c}$. 当 $c < 0$ 或 $c > 1$ 时，$K = \sqrt{\frac{c-1}{c}}$. 当 $0 < c < 1$ 时，$K = \sqrt{\frac{1-c}{c}}\mathrm{i}$. 假设方程(13)的解可表示为

$$\varphi(\xi) = \frac{2(c-1)}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty} a_n g^n, \tag{15}$$

为计算方便，上式中引入常数因子 $2(c-1)/\alpha$.

将(15)式代入方程(13)，利用级数乘积的 Cauchy 准则，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)a_n g^n + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{l=1}^{n-1} a_l a_{n-l} g^n = 0. \tag{16}$$

由 g 的各次系数为零，知 a_1 为任意常数，并获得关于系数 a_n 的递推关系式

$$(n^2 - 1)a_n + \sum_{l=1}^{n-1} a_l a_{n-l} = 0, \qquad n \geqslant 2, \tag{17}$$

计算 a_n 的前几项,得 $a_2 = -\frac{1}{3}a_1^2$, $a_3 = +\frac{1}{12}a_1^3$，$a_4 = -\frac{1}{54}a_1^4$，…显然 a_n 为一交错级数，由(7)式可确定出 $\delta = 1$，因而可归纳出递推方程(17)拥有非平凡解

$$a_n = (-1)^{n-1} 6n\left(\frac{a_1}{6}\right)^n, \qquad n \geqslant 1. \tag{18}$$

将(18)式代入(15)式，利用生成函数的递推关系式(5)，可得方程(13)的闭合形式解为

$$\varphi = \frac{2(c-1)}{\alpha}\sum_{n=1}^{\delta}(-1)^{n-1}6n\left(\frac{\alpha_1}{6}\right)^n g^n = \frac{12(c-1)}{\alpha}g_1\left[\frac{g_1}{1+g_1}\right]' = \frac{12(c-1)}{\alpha}\frac{g_1}{(1+g_1)^2}, \tag{19}$$

其中 $g_1 = a_1 g/6$.

当 $c<0$ 或 $c>1$ 时，取 $a_1>0$，由(10)，(12)和(19)式，可得 RLW 方程的一个钟状正则孤波解

$$u_1(x,t) = \frac{3(c-1)}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{20}$$

其中 $\Delta = -\ln\left(\frac{a_1}{6}\right)\Big/2$;取 $a_1<0$,可得 RLW 方程的一个奇异孤波解

$$u_2(x,t) = \frac{3(1-c)}{\alpha}\mathrm{csch}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{21}$$

其中 $\Delta = -\ln\left(\frac{-a_1}{6}\right)\Big/2$.

当 $0<c<1$ 时，取 $a_1>0$，可得 RLW 方程的一个周期解

$$u_3(x,t) = \frac{3(c-1)}{\alpha}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{22}$$

其中 $\Delta = \left(\ln\left(\frac{a_1}{6}\right)\Big/2\right)\mathrm{i}$;取 $a_1<0$,可得 RLW 方程的另一周期解

$$u_4(x,t) = \frac{3(c-1)}{\alpha}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{23}$$

其中 $\Delta = \left(\ln\left(\frac{-a_1}{6}\right)\Big/2\right)\mathrm{i}$.

2)当 $M=\frac{2(c-1)}{\alpha}$时，方程(13)线性部分的解仍为 $g=\exp(-K\xi)$，但 K 满足$K^2=\frac{1-c}{c}$. 当 $0<c<1$ 时，$K=\sqrt{\frac{1-c}{c}}$，而当 $c>1$ 或 $c<0$ 时，$K=\sqrt{\frac{c-1}{c}}\mathrm{i}$.假设方程(13)具有形如方程(15)的解，代入方程可得 a_1 为任意常数，并得到关于系数 a_n 的递推关系式

$$(1-n^2)a_n + \sum_{l=1}^{n-1}a_l a_{n-l} = 0, \qquad n\geqslant 2, \tag{24}$$

与递推关系式(17)作比较，此处 a_n 的系数相差一个负号.

求解递推方程(24)，得

$$a_n = 6n\left(\frac{a_1}{6}\right)^n, \qquad n\geqslant 1. \tag{25}$$

利用同样的方法，可以得到如下结论：

当 $0<c<1$ 时,RLW 方程拥有孤波解

$$u_5(x,t) = \frac{2(c-1)}{\alpha} + \frac{3(1-c)}{\alpha}\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{26}$$

其中 $\Delta = -\ln\left(\frac{-a_1}{6}\right)\Big/2$.

$$u_6(x,t) = \frac{2(c-1)}{\alpha} + \frac{3(c-1)}{\alpha}\mathrm{csch}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-c}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{27}$$

其中 $\Delta = -\ln\left(\frac{a_1}{6}\right)\Big/2$.

当 $c>1$ 或 $c<0$ 时，RLW 方程拥有周期解

$$u_7(x,t) = \frac{2(c-1)}{\alpha} + \frac{3(1-c)}{\alpha}\sec^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{28}$$

其中 $\Delta = \left(\ln\left(\frac{-a_1}{6}\right)\Big/2\right)\mathrm{i}$.

$$u_8(x,t) = \frac{2(c-1)}{\alpha} + \frac{3(1-c)}{\alpha}\csc^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\times(x-ct+\xi_0)+\Delta\right), \tag{29}$$

其中 $\Delta = \left(\ln\left(\frac{a_1}{6}\right)\Big/2\right)\mathrm{i}$.

文献[10]仅获得了解(20)，文献[8]用双曲函数方法得到了解(20)，(21)，(23)，(26)，(27)，(29). 事实上，文献[8]第一种情形中 3)和 4)给出的解正是解(26)及(20)式.本文用推广的混合指数方法统一求出了以上 8 个解.

4. 结 论

推广的混合指数方法的基本思想是将非线性发

展方程(组)的孤波解假设为其线性方程的实指数解或复指数解的级数形式，从而将非线性发展方程孤波解的求解问题转化为组合计算问题．尽管手工求解复杂的递推方程并不容易，然而由于计算机代数的发展，人们可以借助计算机代数系统有效地处理繁琐的代数计算，归纳出递推方程的解并加以验证．由此可获得非线性发展方程的多种形式的准确解．当然，该方法还有待进一步完善．例如，由于目前缺少求解复杂递推关系式的有效算法，因而构造精确解的计算过程还显得较为繁琐．如何进一步改进这个方法，使之能获得方程更多的解甚至多孤波解，并使之适用于更广泛的方程类，值得深入研究．

[1] Parks E J and Duffy B R 1996 *Comp. Phys. Commun.* **98** 288

[2] Li Z B *et al* 1997 *Acta Math. Sin.* **17** 81(in Chinese)[李志斌等 1997 数学物理学报 **17** 81]

[3] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[4] Yan Z Y and Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1962(in Chinese)[闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1962]

[5] Zhang G X *et al* 2000 *Sci. China* A **30** 1103(in Chinese)[张桂戌等 2000 中国科学 A **30** 1103]

[6] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[7] Li Z B and Yao R X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062(in Chinese)[李志斌、姚若侠 2001 物理学报 **50** 2062]

[8] Zheng Y and Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 389(in Chinese)[郑 、张鸿庆 2000 物理学报 **49** 389]

[9] Xia T C, Zhang H Q and Yan Z Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 694

[10] Hereman W, Banerjee P P and Korpel A 1986 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 607

[11] Hereman W and Takaoka M 1990 *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 4805

[12] Dash P C and Panigrahi M 1996 *Bull. Orrisa Phys. Soc.* **4** 30

[13] Panigrahi M and Dash P C 1999 *Phys. Lett.* A **261** 284

[14] Xu G Q and Li Z B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 946(in Chinese)[徐桂琼、李志斌 2002 物理学报 **51** 946]

Extended mixing exponential method and its applications*

Xu Gui-Qiong[1)2)] Li Zhi-Bin[1)]

1) (*Department of Computer Science, East China Normal University, Shanghai 200062, China*)

2) (*Department of Information Engineering and Administration, Shanghai University, Shanghai 200436, China*)

(Received 18 November 2001)

Abstract

Mixing exponential method proposed by Hereman for finding the solitary wave solutions to a nonlinear evolution equation is developed and perfected. Correspondingly, an extended mixing exponential method is obtained by expressing the solutions as an infinite series of the real or complex exponential solutions of the underlying linear equations. The effectiveness of the extended approach is demonstrated by application to the well-known regular long wave equation with physical interest. Not only are steady solitary wave solutions recovered, but also the diverging and the periodic solutions are obtained.

Keywords: solitary wave, mixing exponential method, regular long wave equation

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China (Grant No. G1998030600), and the "Dawn" Programme of Shanghai, China.