第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1428-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.7, July, 2002

非线性偏微分方程的多孤子解*

卢 竞 颜家壬†
(湖南师范大学物理系, 长沙 410081)
(2001 年 11 月 15 日收到)

对齐次平衡法的一些关键步骤进行拓宽,获得了一系列非线性方程的多孤子解,使得对非线性方程的多孤子解的求解方法更加直接,且许多步骤可以利用计算机完成.

关键词: 齐次平衡法, 非线性方程, 多孤子解
PACC: 0340K, 0290, 1190

1. 引 言

在自然科学研究中,往往对一些非线性问题进行探讨,而对这些非线性问题所带来的一些非线性方程的求解一直是一个核心问题,尤其是求解这些方程的多孤子解.近几十年来,在非线性数学物理研究领域内涌现出不少求解非线性偏微分方程的方法,如反散射方法、Bäcklund 变换、Hirota 变换、Darboux 变换等[1—4].然而,这些方法在求多孤子解时,解法过于繁杂,思路迂回曲折,不易于求解.近几年提出并发展起来的齐次平衡法[5—13],其解法比较简单直接,但在多孤子解的求解上其可解的方程有限(只对一些特殊方程组有效[8,9]).本文对此进行了分析,发现只要对齐次平衡法的一个关键步骤进行拓展,就可以使其对多孤子解的求解范围大大拓宽,从而更加完善齐次平衡法,同时还得到一批形式丰富的精确解,而且本文的关键步骤均可以在计算机上进行,充分展现了现代计算机在求解非线性偏微分方程精确解中的突出作用.

首先概述齐次平衡法的基本思想和步骤[6,7].

对于一个给定的非线性偏微分方程,假定有两个自变量 x, t

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \cdots) = 0, \tag{1}$$

式中 P 一般为多项式函数.通过要求(1)式中的最高阶导数项与最高次非线性项平衡,可以选择 u 为

$$u(x, t) = \frac{\partial^{m+n} f(\omega)}{\partial^m x \partial^n t} + g(f(\omega)), \tag{2}$$

$g(f(\omega))$为 $f(\omega)$关于 x 和 t 的低于 $m+n$ 阶偏导数的适当的线性组合.将(2)式代入(1)式,经过求导整理后,集合 $\omega(x, t)$的偏导数的最高幂次的全部项,令其系数为零,可得关于 $f(\omega)$的常微分方程,解之,得

$$f = G(\omega), \tag{3}$$

再由(3)式出发,将前一步所得方程中 f 的各阶导数的非线性项换成 f 的高阶导数的线性项,然后将 f 对 ω 相同导数项整理到一起,可得

$$F(f(\omega(x, t))) = 0. \tag{4}$$

令 f 的各阶导数前系数为零,得到关于 ω 的一组齐次微分方程组

$$H(\omega) = 0. \tag{5}$$

解此方程组可得 $\omega = \omega(x, t)$,将其和(3)式一起代回(2)式,可得方程(1)的一系列精确解.

经过分析发现,使用上述方法难以得出大多数非线性方程的多孤子解,究其主要原因在于令(4)式中 f 对 ω 相同导数项前的系数为零的假设限制了 $\omega(x, t)$的一般性,因为 f 是 ω 的函数,(4)式成立并不意味着 f 对 ω 的各阶导数前系数为零.例如,KdV 方程的两孤子解(15)式就不能使得(10)式中 f 的各阶导数前的系数为零.所以采取直接求解(4)式的办法,可得方程(1)的更多形式的精确解.于是,对于 N 孤子解,令

$$\omega(x, t) = 1 + \sum_{i=1}^{N} a_i e^{m_i x + l_i t} + \sum_{i=j+1}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij} e^{(m_i + m_j) x + (l_i + l_j) t}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19775013)资助的课题.

† 通信作者.

$$+\sum_{i=k+2}^{N}\sum_{j=k+1}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-2} c_{ijk}\, e^{(m_i+m_j+m_k)x+(l_i+l_j+l_k)t}+\cdots$$
$$+ z_n e^{(m_1+m_2+\cdots+m_N)x+(l_1+l_2+\cdots+l_N)t}, \tag{6}$$

式中 N 为一个自然数.将(6)式直接代入(4)式,把 $e^{m_ix+l_it}(i=1,2,\cdots,N)$ 及其高次项整理到一起,则(4)式的成立就必然有 $e^{m_ix+l_it}$ 及其高次项前的系数为零,于是就得到一组只包含一些待定常数的超定代数方程组,解此方程组就可得到包含 N 孤子解的一些精确解.而且将(6)式代入(4)式的代入、整理过程,以及待定常数的代数方程组的求解,均可借助于 Mathematica 软件在计算机上实现,大大减轻了在求解非线性方程多孤子解时的计算工作量.

2. 应用举例

例 1 考虑 KdV 方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0. \tag{7}$$

设(7)式具有如下形式的解:

$$u=f''(\omega)\,\omega_x^2+f'(\omega)\,\omega_{xx}, \tag{8}$$

使用齐次平衡法的前几步[7],易得

$$f=2\ln\omega, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}u_t+6uu_x+u_{xxx}=&(\omega_x^2\omega_t+4\omega_x^2\omega_{xxx}-3\omega_x\omega_{xx}^2)f'''\\&+(2\omega_x\omega_{xt}+\omega_t\omega_{xx}-2\omega_{xx}\omega_{xxx}\\&+5\omega_x\omega_{xxxx})f''+(\omega_{xxt}\\&+\omega_{xxxxx})f'=0.\end{aligned} \tag{10}$$

依齐次平衡法应令(10)式中 f 的各阶导数前的系数为零[7],这样就不能求出 KdV 方程的多孤子解.为了解决这个问题,我们考虑直接对方程(10)进行求解.先研究两孤子解,令(6)式中的 $N=2$,则(6)式变为

$$\omega(x,t)=1+\sum_{i=1}^{2}a_i e^{m_ix+l_it}+z_n e^{(m_1+m_2)x+(l_1+l_2)t}. \tag{11}$$

将(11)式代入(10)式并整理,由于 $e^{m_ix+l_it}(i=1,2)$ 及其高次项前的系数为零,所以可得

$$2a_2l_2m_2^2+2a_2m_2^5=0, \tag{12a}$$

$$\begin{aligned}&-2a_1(a_1a_2(l_1-l_2+(m_1-m_2)^3)(m_1-m_2)^2\\&+z_n(2m_1^5+5m_1^4m_2+2m_1^3m_2^2-2m_1^2m_2^3-5m_1m_2^4\\&-2m_2^5+l_2(m_1^2-2m_1m_2-2m_2^2)\\&+l_1(2m_1^2+2m_1m_2-m_2^2)))=0,\end{aligned} \tag{12b}$$

$$2a_1^2z_nl_2m_2^2+2a_1^2z_nm_2^5=0, \tag{12c}$$

$$2a_1l_1m_1^2+2a_1m_1^5=0, \tag{12d}$$

$$2a_2^2z_nl_1m_1^2+2a_2^2z_nm_1^5=0, \tag{12e}$$

$$\begin{aligned}&2(z_n(m_1+m_2)^2(l_1+l_2+(m_1+m_2)^3)-a_1a_2\\&\times(-2m_1^5+5m_1^4m_2-2m_1^3m_2^2-2m_1^2m_2^3+5m_1m_2^4\\&-2m_2^5+l_2(m_1^2+2m_1m_2-2m_2^2)+l_1(-2m_1^2\\&+2m_1m_2+m_2^2)))=0,\end{aligned} \tag{12f}$$

$$\begin{aligned}&2a_2(a_1a_2(l_1-l_2+(m_1-m_2)^3)(m_1-m_2)^2+z_n\\&\times(2m_1^5+5m_1^4m_2+2m_1^3m_2^2-2m_1^2m_2^3-5m_1m_2^4\\&-2m_2^5+l_2(m_1^2-2m_1m_2-2m_2^2)+l_1(2m_1^2\\&+2m_1m_2-m_2^2)))=0,\end{aligned} \tag{12g}$$

$$-2a_1^2l_1m_1^2-2a_1^2m_1^5=0, \tag{12h}$$

$$-2a_2z_n^2l_1m_1^2-2a_2z_n^2m_1^5=0, \tag{12i}$$

$$\begin{aligned}&-2z_n(z_n(m_1+m_2)^2(l_1+l_2+(m_1+m_2)^3)-a_1a_2\\&\times(-2m_1^5+5m_1^4m_2-2m_1^3m_2^2-2m_1^2m_2^3+5m_1m_2^4\\&-2m_2^5+l_2(m_1^2+2m_1m_2-2m_2^2)+l_1(-2m_1^2\\&+2m_1m_2+m_2^2)))=0,\end{aligned} \tag{12j}$$

$$-2a_2^2l_2m_2^2-2a_2^2m_2^5=0, \tag{12k}$$

$$-2a_1z_n^2l_2m_2^2-2a_1z_n^2m_2^5=0. \tag{12l}$$

利用 Mathematica 4.02 求解方程组(12),可得

(1)当 a_1,a_2,m_1,m_2 均不为零时

$$l_1=-m_1^3,\quad l_2=-m_2^3,\quad z_n=\frac{a_1a_2(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}, \tag{13}$$

则由上式和(8),(9),(11)式,可得 KdV 方程(7)的精确解

$$\begin{aligned}u(x,t)=&(2(m_1+m_2)^2(a_1^2a_2e^{m_2^3t+2m_1x+m_2x}(m_1-m_2)^2\\&\times m_2^2+a_2e^{2m_1^3t+m_2^3t+m_2x}m_2^2(m_1+m_2)^2\\&+a_1e^{m_1^3t+m_1x}(a_2^2e^{2m_2x}m_1^2(m_1-m_2)^2\\&+e^{2m_2^3t}m_1^2(m_1+m_2)^2+2a_2e^{m_2^3t+m_2x}\\&\times(m_1^2-m_2^2)^2)))/(a_1a_2e^{(m_1+m_2)x}\\&\times(m_1-m_2)^2+(e^{(m_1^3+m_2^3)t}\\&+a_1e^{m_2^3t+m_1x}+a_2e^{m_1^3t+m_2x})\\&\times(m_1+m_2)^2)^2,\end{aligned} \tag{14}$$

式中 a_1,a_2,m_1,m_2 为任意非零常数.其中当 $a_1>0$ 且 $a_2>0$ 时,若取 $k_i=m_i/2$,$\theta_i=\dfrac{1}{2}\left[m_ix-m_i^3t+\ln\left(\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}a_i\right)\right]$(其中 $i=1,2$),(14)式可简化为

$$u(x,t)=2(k_1^2-k_2^2)\frac{k_1^2\operatorname{csch}^2\theta_1+k_2^2\operatorname{sech}^2\theta_2}{(k_1\operatorname{cth}\theta_1-k_2\operatorname{th}\theta_2)^2}. \tag{15}$$

(15)式就是 KdV 方程(7)的典型的两孤子解，如图 1(a)．而且很容易证明(15)式不能使(10)式中 f 的各阶导数前的系数为零，即原有的齐次平衡法不能求解出 KdV 方程的多孤子解．当 $a_1 < 0$ 或 $a_2 < 0$ 时，(14)式虽然是方程(7)的精确解，但由于有奇点，所以不再是孤子解，如图 1(b)．

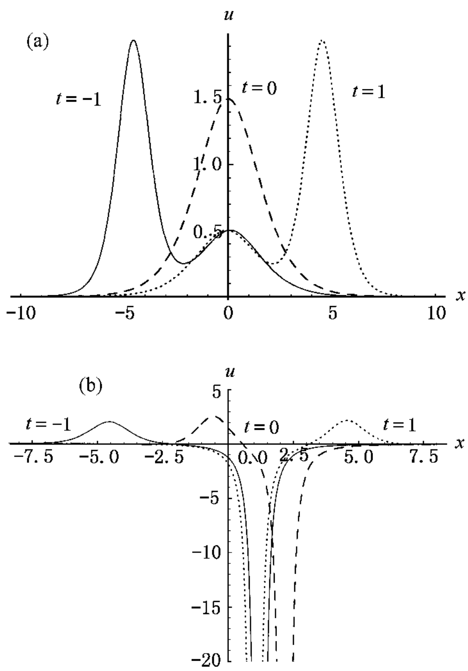

图 1 参数为 $m_1 = 2$，$m_2 = 1$，且 t 分别为 $-1,0,1$ 时的 u-x 图 (a)中 $a_1 = 3$，$a_2 = 3$，是 KdV 方程(7)的两孤子解；(b)中 $a_1 = 3$，$a_2 = -1$，不是孤子解，但还是方程(7)的一个精确解

(2)当 $a_1 = 0$，但 a_2, m_1, m_2 均不为零时

$$l_1 = m_2^3, \quad l_2 = -m_2^3, \quad m_1 = -m_2 \tag{16a}$$

或者

$$z_n = 0, \quad l_2 = -m_2^3, \tag{16b}$$

可以证明(16)式中两个解在本质上一致．由(16)式和(8)，(9)，(11)式，可得方程(7)的又一精确解

$$u(x,t) = \frac{2a_2(1+z_n)e^{m_2^3 t + m_2 x} m_2^2}{((1+z_n)e^{m_2^3 t} + a_2 e^{m_2 x})^2}, \tag{17}$$

式中 a_2, z_n, m_2 为任意常数．

由于对称性，所以当 $a_2 = 0$，但 a_1, m_1, m_2 均不为零时的情况同理可以得出．

(3)当 $m_1 = 0$ 时

$$l_2 = -m_2^3, \quad z_n = a_1 a_2 \tag{18a}$$

或者

$$l_1 = 0, \quad l_2 = -m_2^3, \quad a_1 = 0 \tag{18b}$$

或者

$$z_n = 0, \quad l_2 = -m_2^3, \quad a_1 = 0, \tag{18c}$$

可以证明(18)式中三个解在本质上与(16)式的两个解一致，所以得到的方程(7)的精确解在本质上与(17)式相同．同样由于对称性，所以当 $m_2 = 0$，不会再有新的解产生．

如果考虑三孤子解的情况，则取(6)式中的 $N = 3$，同样按照上述办法，可以得到 KdV 方程(7)的另一些精确解，

$$\begin{aligned}
u(x,t) = {} & \Big(2\Big(-\Big(a_{11} m_1 e^{-m_1^3 t + m_1 x} + \frac{a_{11} a_{12} e^{-m_1^3 t - m_2^3 t + m_1 x + m_2 x}(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} + a_{13} m_3 e^{-m_3^3 t + m_3 x} \\
& + \frac{a_{11} a_{13} e^{-m_1^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_3 x}(m_1 - m_3)^2}{m_1 + m_3} + a_{12} m_2 e^{-m_2^3 t + m_2 x} + \frac{a_{12} a_{13} e^{-m_2^3 t - m_3^3 t + m_2 x + m_3 x}(m_2 - m_3)^2}{m_2 + m_3} \\
& + (a_{11} a_{12} a_{13} e^{-m_1^3 t - m_2^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_2 x + m_3 x}(m_1 - m_2)^2(m_1 - m_3)^2(m_2 - m_3)^2(m_1 + m_2 + m_3))/((m_1 \\
& + m_2)^2(m_1 + m_3)^2(m_2 + m_3)^2)\Big)\Big)^2 + \Big(1 + a_{11} e^{-m_1^3 t + m_1 x} + \frac{a_{11} a_{12} e^{-m_1^3 t - m_2^3 t + m_1 x + m_2 x}(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \\
& + a_{13} e^{-m_3^3 t + m_3 x} + \frac{a_{11} a_{13} e^{-m_1^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_3 x}(m_1 - m_3)^2}{(m_1 + m_3)^2} + a_{12} e^{-m_2^3 t + m_2 x} + \frac{a_{12} a_{13} e^{-m_2^3 t - m_3^3 t + m_2 x + m_3 x}(m_2 - m_3)^2}{(m_2 + m_3)^2} \\
& + (a_{11} a_{12} a_{13} e^{-m_1^3 t - m_2^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_2 x + m_3 x}(m_1 - m_2)^2(m_1 - m_3)^2(m_2 - m_3)^2)/((m_1 + m_2)^2(m_1 + m_3)^2 \\
& \times (m_2 + m_3)^2)\Big)\Big(a_{11} a_{12}(m_1 - m_2)^2 e^{-m_1^3 t - m_2^3 t + m_1 x + m_2 x} + a_{11} m_1^2 e^{-m_1^3 t + m_1 x} + a_{11} a_{13}(m_1 - m_3)^2 \\
& \times e^{-m_1^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_3 x} + a_{12} m_2^2 e^{-m_2^3 t + m_2 x} + a_{12} a_{13}(m_2 - m_3)^2 e^{-m_2^3 t - m_3^3 t + m_2 x + m_3 x} + a_{13} m_3^2 e^{-m_3^3 t + m_3 x} \\
& + (a_{11} a_{12} a_{13} e^{-m_1^3 t - m_2^3 t - m_3^3 t + m_1 x + m_2 x + m_3 x}(m_1 - m_2)^2(m_1 - m_3)^2(m_2 - m_3)^2(m_1 + m_2 + m_3)^2)/
\end{aligned}$$

$$((m_1+m_2)^2(m_1+m_3)^2(m_2+m_3)^2)))\Big)\Big/\Big(1+a_{11}e^{-m_1^3t+m_1x}+\frac{a_{11}a_{12}e^{-m_1^3t-m_2^3t+m_1x+m_2x}(m_1-m_2)^2}{(m_1+m_2)^2}$$
$$+a_{13}e^{-m_3^3t+m_3x}+\frac{a_{11}a_{13}e^{-m_1^3t-m_3^3t+m_1x+m_3x}(m_1-m_3)^2}{(m_1+m_3)^2}+a_{12}e^{-m_2^3t+m_2x}+\frac{a_{12}a_{13}e^{-m_2^3t-m_3^3t+m_2x+m_3x}(m_2-m_3)^2}{(m_2+m_3)^2}$$
$$+(a_{11}a_{12}a_{13}e^{-m_1^3t-m_2^3t-m_3^3t+m_1x+m_2x+m_3x}(m_1-m_2)^2(m_1-m_3)^2(m_2-m_3)^2)/((m_1$$
$$+m_2)^2(m_1+m_3)^2(m_2+m_3)^2)\Big)^2, \tag{19}$$

式中 a_1,a_2,a_3,m_1,m_2,m_3 为任意非零常数. 当 $a_1>0,a_2>0,a_3>0$ 同时成立时,(19)式就是 KdV 方程(7)的三孤子解,而且有 6 个可以调整的常数;当 $a_1<0$ 或 $a_2<0$ 或 $a_3<0$ 时,(19)式虽然是方程(7)的精确解,但也是由于有奇点,所以不再是孤子解. 同样地,可以证明(19)式也不能使(10)式中 f 的各阶导数前的系数为零. 继续取 $N=3$,还可得到一系列其他形式的精确解,但由于形式太复杂,而且也与 KdV 方程的三孤子解没有关系,故不再列出.

例 2　考虑长水波近似方程

$$u_t-uu_x-v_x+\frac{1}{2}u_{xx}=0, \tag{20a}$$

$$v_t-(uv)_x-\frac{1}{2}v_{xx}=0. \tag{20b}$$

假定(20)和(21)式具有如下形式的解:

$$u=f'(\omega)\omega_x+a, \tag{21a}$$

$$v=f''(\omega)\omega_x^2+f'(\omega)\omega_{xx}+b, \tag{21b}$$

使用齐次平衡法的前几步[8],易得

$$f=\ln\omega, \tag{22}$$

$$u_t-uu_x-v_x+\frac{1}{2}u_{xx}=\left(\omega_x\omega_t-a\omega_x^2-\frac{1}{2}\omega_x\omega_{xx}\right)f''+\left(\omega_{xt}-a\omega_{xx}-\frac{1}{2}\omega_{xxx}\right)f'=0, \tag{23}$$

$$v_t-(uv)_x-\frac{1}{2}v_{xx}=\left(\omega_x^2\omega_t-a\,\omega_x^3-\frac{1}{2}\omega_x^2\omega_{xx}\right)\times f'''+\Big(2\omega_x\omega_{xt}+\omega_{xx}\omega_t-3a\omega_x\omega_{xx}-\frac{1}{2}\omega_{xx}^2-\omega_x\omega_{xxx}-b\omega_x^2\Big)f''+\Big(\omega_{xxt}-a\omega_{xxx}-\frac{1}{2}\omega_{xxxx}-b\omega_{xx}\Big)f''=0. \tag{24}$$

同样地,考虑两孤子解,于是令(6)式中的 $N=2$,则(6)式变为(11)式,再将(11)式代入上式,整理后可得

$$-\frac{1}{2}a_1m_1(2am_1+m_1^2-2l_1)=0, \tag{25a}$$

$$-\frac{1}{2}a_2z_nm_1(2am_1+m_1^2+2m_1m_2-2l_1)=0, \tag{25b}$$

$$-\frac{1}{2}(-2a(a_1a_2(m_1-m_2)^2+z_n(m_1+m_2)^2)-a_1a_2(m_1-m_2)(m_1^2-m_2^2-2l_1+2l_2)-z_n(m_1+m_2)(m_1^2+2m_1m_2+m_2^2-2(l_1+l_2)))=0, \tag{25c}$$

$$-\frac{1}{2}a_2m_2(2am_2+m_2^2-2l_2)=0, \tag{25d}$$

$$-\frac{1}{2}a_1z_nm_2(2am_2+2m_1m_2+m_2^2-2l_2)=0, \tag{25e}$$

$$-\frac{1}{2}a_2m_2{}^2(2b+2am_2+m_2^2-2l_2)=0, \tag{25f}$$

$$-\frac{1}{2}a_1^2z_nm_2^2(2b+2am_2+2m_1m_2+m_2^2-2l_2)=0, \tag{25g}$$

$$-\frac{1}{2}a_1(a_1a_2(m_1-m_2)^2(2b-2am_1-m_1^2+2am_2+m_2^2+2l_1-2l_2)+2z_n(-m_1^4-2m_1^3m_2+2m_1^2m_2^2+3m_1m_2^3+m_2^4+2b(m_1^2+m_1m_2+m_2^2)+a(-2m_1^3-3m_1^2m_2+3m_1m_2^2+2m_2^3)+2m_1^2l_1+2m_1m_2l_1-m_2^2l_1+m_1^2l_2-2m_1m_2l_2-2m_2^2l_2))=0, \tag{25h}$$

$$-\frac{1}{2}a_1m_1^2(2b+2am_1+m_1^2-2l_1)=0, \tag{25i}$$

$$-\frac{1}{2}a_2^2z_nm_1^2(2b+2am_1+2m_1m_2+m_1^2-2l_1)=0, \tag{25j}$$

$$\frac{1}{2}(-z_n(m_1+m_2)^2(2b+m_1^2+2m_1m_2+m_2^2+2a\times(m_1+m_2)-2l_1-2l_2)-2a_1a_2(m_1^4-m_1^3m_2-m_1^2m_2^2-m_1m_2^3+m_2^4+2b(m_1^2-m_1m_2+m_2^2)+a(2m_1^3-3m_1^2m_2-3m_1m_2^2+2m_2^3)-2m_1^2l_1$$

$$+2m_1m_2l_1+m_2^2l_1+m_1^2l_1+2m_1m_2l_2$$
$$-2m_2^2l_2))=0, \tag{25k}$$
$$-\frac{1}{2}a_2(a_1a_2(m_1-m_2)^2(2b+m_1^2+2a(m_1-m_2)$$
$$-m_2^2-2l_1+2l_2)+2z_n(m_1^4+3m_1^3m_2+2m_1^2m_2{}^2$$
$$-2m_1m_2^3-m_2^4+2b(m_1^2+m_1m_2+m_2^2)+a(2m_1^3$$
$$+3m_1^2m_2-3m_1m_2^2-2m_2^3)-2m_1^2l_1-2m_1m_2l_1$$
$$+m_2{}^2l_1-m_1^2l_2+2m_1m_2l_2+2m_2^2l_2))=0, \tag{25l}$$
$$\frac{1}{2}a_1^2m_1^2(-2b+2am_1+m_1^2-2l_1)=0, \tag{25m}$$
$$\frac{1}{2}a_2z_n^2m_1^2(-2b+2am_1+m_1^2+2m_1m_2-2l_1)=0, \tag{25n}$$
$$\frac{1}{2}z_n(z_n(m_1+m_2)^2(-2b+m_1^2+2m_1m_2+m_2^2$$
$$+2a(m_1+m_2)-2l_1-2l_2)+2a_1a_2(m_1^4$$
$$-5m_1^2m_2^2+m_2^4-2b(m_1^2-m_1m_2+m_2^2)$$
$$+a(2m_1^3-3m_1^2m_2-3m_1m_2^2+2m_2^3)$$
$$-2m_1^2l_1+2m_1m_2l_1+m_2^2l_1+m_1^2l_2$$
$$+2m_1m_2l_2-2m_2^2l_2))=0, \tag{25o}$$
$$\frac{1}{2}a_2^2m_2^2(-2b+2am_2+m_2^2-2l_2)=0, \tag{25p}$$
$$\frac{1}{2}a_1z_n{}^2m_2^2(-2b+2am_2+2m_1m_2+m_2^2-2l_2)=0. \tag{25q}$$

利用 Mathematica 4.02 求解以上超定方程组,可得

(1)当 a_1,a_2,m_1,m_2 均不为零时

$$l_1=\frac{1}{2}m_1(2a+m_1),\quad l_2=\frac{1}{2}m_2(2a+m_2),$$
$$z_n=0,\quad b=0, \tag{26}$$

则由上式和(11),(21),(22)式,可得方程(20)的精确解

$$u=\frac{a_1m_1e^{\theta_1}+a_2m_2e^{\theta_2}}{1+a_1e^{\theta_1}+a_2e^{\theta_2}}+a, \tag{27a}$$
$$v=\frac{a_1m_1{}^2e^{\theta_1}+a_2m_2^2e^{\theta_2}+a_1a_2(m_1-m_2)^2e^{\theta_1+\theta_2}}{(1+a_1e^{\theta_1}+a_2e^{\theta_2})^2}, \tag{27b}$$

式中 $\theta_i=m_ix+\frac{1}{2}m_i(2a+m_i)t(i=1,2)$.(27)式就是长水波近似方程(20)的两孤子解.当 $a_1=a_2=1$ 时,可得文献[8]的结果.

(2)当 $a_1=0$ 时

$$l_1=\frac{1}{2}m_1(2a+m_1+2m_2),$$
$$l_2=\frac{1}{2}m_2(2a+m_2),\quad b=0 \tag{28a}$$

或者

$$l_2=\frac{1}{2}m_2(2a+m_2),\quad z_n=0,\quad b=0 \tag{28b}$$

或者

$$l_1=\frac{1}{2}(2am_1+m_1^2+2am_2+2m_1m_2+m_2^2-2l_2),$$
$$a_2=0,\quad b=0 \tag{28c}$$

或者

$$l_1=\frac{1}{2}m_1(2a-m_1),\quad l_2=\frac{1}{2}m_1(-2a+m_1),$$
$$m_2=-m_1,\quad b=0 \tag{28d}$$

或者

$$l_1=\frac{1}{2}m_1(2a-m_1),$$
$$a_2=0,\quad m_2=-m_1,\quad b=0 \tag{28e}$$

或者

$$l_1=0,\quad l_2=\frac{1}{2}m_2(2a+m_2),\quad b=0,\quad m_1=0 \tag{28f}$$

或者

$$l_2=0,\quad l_1=\frac{1}{2}m_1(2a+m_1),\quad b=0,\quad m_2=0, \tag{28g}$$

可以证明(28a)与(26)式本质上等价,所以也可得到形如(27)式的两孤子解.

(28b),(28c),(28f)和(28g)式本质上也等价,所以由此4式中的任意一式并和(11),(21),(22)式,可得方程(20)的精确解,

$$u=\frac{a_2m_2e^{\theta_2}}{1+a_2e^{\theta_2}}+a, \tag{29a}$$
$$v=\frac{a_2m_2^2e^{\theta_2}}{(1+a_2e^{\theta_2})^2}. \tag{29b}$$

(28d)和(28e)式本质上也等价,所以由此两式中的任意一式并和(11),(21),(22)式,可得方程(20)的精确解,

$$u=a-\frac{a_2m_1e^{\varphi_2}}{1+z_ne^{\varphi_1+\varphi_2}+a_2e^{\varphi_2}}, \tag{30a}$$
$$v=\frac{a_2m_1{}^2e^{\varphi_2}(1+z_ne^{\varphi_1+\varphi_2})}{(1+z_ne^{\varphi_1+\varphi_2}+a_2e^{\varphi_2})^2}, \tag{30b}$$

式中 $\varphi_i=m_ix+\frac{1}{2}m_i(2a-m_i)t(i=1,2)$.

同样地,当 $a_2=0$ 时,可以对应地给出其余结

果.由于其余的一些结果与原方程(20)多孤子解没有关系,故不再列出.

[1] Ablowitz M J and Clarkson P A 1991 *Solitons Nonlinear Evolution and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Lamb G L Jr 1980 *Elements of Soliton Theory* (New York: Wiley)

[3] Hirota R 1977 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[4] Guo B L *et al* 1987 *Soliton* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [郭柏灵等 1987 孤立子(北京:科学出版社)]

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **213** 279

[7] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵等 1998 物理学报 **47** 353]

[8] Zhang J F 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1416 (in Chinese) [张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[9] Zhang J F 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 171 (in Chinese) [张解放 2000 应用数学和力学 **21** 171]

[10] Fan E G *et al* 1999 *Appl. Math. Mech.* **19** 286 (in Chinese) [范恩贵等 1999 应用数学和力学 **19** 286]

[11] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[12] Zhang J F 2000 *Chin. Phys.* **9** 1

[13] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌等 2001 物理学报 **50** 402]

Multiple-soliton solutions of the nonlinear partial differential equation*

Lu Jing Yan Jia-Ren

(*Department of Physics*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)

(Received 15 November 2001)

Abstract

In this paper we improve some key steps in the homogeneous balance method, then by using this method we are able to obtain multiple-soliton solutions of some nonlinear partial differential equations. This makes methods of solving nonlinear partial differential equations become more direct; furthermore, many steps of this method can be performed by computer.

Keywords: homogeneous balance method, nonlinear eguation, multiple-soliton solutions

PACC: 0340K, 0290, 1190

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19775013).