第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1448-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.7, July, 2002
©2002 Chin. Phys. Soc.

一般三生成元含时系统的精确解*

朱红毅　　沈建其

（浙江大学现代光学仪器国家重点实验室，光及电磁波研究中心，
浙江近代物理中心，物理系，杭州　310027）

（2001 年 11 月 11 日收到；2001 年 12 月 6 日收到修改稿）

在量子光学、凝聚态物理、原子分子物理中存在许多典型的具有三生成元李代数结构的量子系统或模型. 用 Lewis-Risenfeld 不变量理论及与不变量有关的幺正变换方法精确求解了这些系统的含时薛定谔方程的精确解.

关键词：不变量理论，精确解，生成元，几何相位

PACC：0365，0290，4250

1. 引　　言

在量子光学、凝聚态物理、原子分子物理中存在许多典型的具有三生成元李代数结构的量子系统或模型. 由于这些系统和模型具有物理意义，对它们的研究有助于突出物理现象的本质，所以它们一直被广泛研究. 例如，带电自旋粒子在磁场中的运动[1,2]、光子在非共面弯曲的光纤中的传播[3—5]，引力场中粒子自旋与引力磁场的耦合[6—8]等都可以用自旋模型来描述. 自旋模型是一个最为人熟知的三生成元量子系统[9—13]. 除此之外，在一些领域中，还存在着许多模型，其哈密顿量可以用三个李代数生成元表征. 如具有如下形式哈密顿量

$$H = \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2 + g a_1 a_2 + g^* a_1^\dagger a_2^\dagger \tag{1}$$

的耦合谐振子模型，令 $K_+ = a_1^\dagger a_2^\dagger$，$K_- = a_1 a_2$，$K_3 = \frac{1}{2}(a_1 a_1^\dagger + a_2^\dagger a_2)$，则 K_+，K_- 和 K_3 满足 $SU(1,1)$ 李代数生成元对易关系. 广义谐振子的哈密顿量[14]为

$$H = \frac{1}{2}[Xq^2 + Y(qp + pq) + Zp^2], \tag{2}$$

可以证明 q^2，p^2 和 $\mathrm{i}(qp + pq)$ 也构成李代数生成元，满足对易关系

$$\begin{aligned}
[q^2, p^2] &= 2\mathrm{i}(qp + pq), \\
[\mathrm{i}(qp + pq), q^2] &= 4q^2, \\
[\mathrm{i}(qp + pq), p^2] &= -4p^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

又如带电粒子在磁场中的运动，其哈密顿量为

$$H = -\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}L^2\right) + \frac{1}{8}\mu\omega^2 r^2 - \frac{\omega}{2}L_z, \tag{4}$$

其中 $\omega = B/\mu$，μ 为粒子质量，B 为磁场强度. 令

$$\begin{aligned}
K_1 &= \mu r^2, \\
K_2 &= -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}L^2\right), \\
K_3 &= -2\mathrm{i}\left(\frac{3}{2} + r\frac{\partial}{\partial r}\right),
\end{aligned} \tag{5}$$

它们满足

$$\begin{aligned}
[K_1, K_2] &= 2\mathrm{i}K_3, \\
[K_3, K_2] &= 4\mathrm{i}K_2, \\
[K_3, K_1] &= -4\mathrm{i}K_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

显然该系统也具有三生成元李代数结构. 有意义的是，二能级单模多光子 Jaynes-Cummings 模型具有超对称结构[15,16]. 可以证明，在相应于守恒的生成元（不变量）的属于某一本征值的 Hilbert 子空间中，其生成元也具有三生成元李代数性质. 二能级多光子超对称 Jaynes-Cummings 模型的哈密顿量为[17,18]

$$H(t) = \omega(t)a^\dagger a + \frac{\omega_0(t)}{2}\sigma_z + g(t)(a^\dagger)^k\sigma_- + g^*(t)a^k\sigma_+, \tag{7}$$

其中 $a^\dagger$ 和 a 为光子场的产生、湮没算符，Pauli 矩阵 σ_+，σ_- 和 σ_z 为二能级原子算符. 计算证明，$a^\dagger a + \sigma_z + \frac{1}{2}$，$a^{\dagger k}\sigma_-$，$a^k\sigma_+$ 满足三生成元李代数对易关系. 对于许多量子系统尽管已做了大量研究，但所有这

* 国家自然科学基金（批准号：30000034）资助的课题.

些研究大多限于哈密顿量不显含时间的情形(或者哈密顿量部分参数含时)，其用来确定 Schrödinger 方程的解的方法是：先将解写成以某一算符的本征函数展开的形式，然后将这个通解代入 Schrödinger 方程，确定出所有展开系数[19]．这一方法对于精确求解哈密顿量全部参数都含时的 Schrödinger 方程一般并不奏效．1969 年由 Lewis 和 Riesenfeld 提出的不变量理论[20]适合处理含时问题，但是所获得的解一般是形式解，所以还必须使用 1991 年由高孝纯等人提出的与不变量有关的幺正变换方法[14]来精确求解这些含时系统．本文结合这些不变量理论精确求解了一般的含时三生成元系统 Schrödinger 方程的解，它们都是显式解．由于几何相位出现在哈密顿量含时或者哈密顿量含演化参数[21—23]的系统中，所以不变量理论也是研究几何相位的理论工具．

2．含时Schrödinger方程的精确解

引言中提到的随时间演化的系统都可以用下面的含时 Schrödinger 方程来描述：

$$\mathrm{i}\frac{\partial|\Psi(t)\rangle_s}{\partial t}=H(t)|\Psi(t)\rangle_s,\tag{8}$$

其中哈密顿量可以写成由三个算符 A,B,C 构成的形式：

$$H(t)=\omega(t)\Big\{\frac{1}{2}\sin\theta(t)\exp[-\mathrm{i}\phi(t)]A+\frac{1}{2}\sin\theta(t)\exp[\mathrm{i}\phi(t)]B+\cos\theta(t)C\Big\},\tag{9}$$

其中 A，B，C 满足如下李代数对易关系：

$$[A,B]=nC,\quad [C,A]=mA,\quad [C,B]=-mB,\tag{10}$$

其中 $m,-m,n$ 为该李群的结构常数．对于一般三生成元系统，通过对生成元作适当的线性组合，总可以构成满足对易关系(10)的新的生成元，哈密顿量可以化成这些新的生成元的线性组合形式．根据 Lewis-Riesenfeld 不变量理论，如果算符 $I(t)$ 满足如下的不变量方程[20]：

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{i}}[I(t),H(t)]=0,\tag{11}$$

那么该算符被称作不变量．不变量的本征值与时间无关，即

$$I(t)|\lambda,t\rangle_I=\lambda|\lambda,t\rangle_I,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial t}=0.\tag{12}$$

从(11)式可以看出，不变量 $I(t)$ 也应该是生成元 A,B,C 的线性组合形式，不妨写作

$$I(t)=y\Big\{\frac{1}{2}\sin a(t)\exp[-\mathrm{i}b(t)]A+\frac{1}{2}\sin a(t)\exp[\mathrm{i}b(t)]B\Big\}+\cos a(t)C,\tag{13}$$

其中常数 y 的表达式(用 m,n 表示)将在下面给出．将(13)式代入(11)式，得到如下两个辅助方程：

$$y\exp(-\mathrm{i}b)(\dot a\cos a-\mathrm{i}\dot b\sin a)-\mathrm{i}m\omega\times[\exp(-\mathrm{i}\phi)\cos a\sin\theta-y\exp(-\mathrm{i}b)\sin a\cos\theta]=0,$$
$$\dot a+\frac{ny}{2}\omega\sin\theta\sin(b-\phi)=0,\tag{14}$$

其中 a,b 上的点表示对它们关于时间的求导，含时变量 a,b 由上面的辅助方程确定，所以不变量(13)的形式原则上是确定的．容易证明：(8)式的一个特解 $|\Psi(t)\rangle_s$ 可以用不变量 $I(t)$ 的本征态 $|\lambda,t\rangle_I$ 来表示，即

$$|\Psi(t)\rangle_s=\exp\Big[\frac{1}{\mathrm{i}}\varphi(t)\Big]|\lambda,t\rangle_I,\tag{15}$$

其中

$$\varphi(t)=\int_{0I}^{t}\Big\langle\lambda,t'\Big|\Big[H(t')-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}\Big]\Big|\lambda,t'\Big\rangle_I\mathrm{d}t',\tag{16}$$

$\int_{0I}^{t}\langle\lambda,t'|H(t')|\lambda,t'\rangle_I\mathrm{d}t'$ 和 $\int_{0I}^{t}\langle\lambda,t'|-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}|\lambda,t'\rangle_I\mathrm{d}t'$ 的物理意义分别为动力学相位和几何相位．注意(15)式只是 Schrödinger 方程的一个形式解．进一步利用与不变量有关的幺正变换方法，可以得到含时 Schrödinger 方程精确解的完备集．根据与不变量有关的幺正变换方法[14,24,25]的精神，令含时幺正变换算符具有这种形式：

$$V(t)=\exp[\beta(t)A-\beta^*(t)B],\tag{17}$$

其中 $\beta(t)=-\frac{a(t)}{2}x\exp[-\mathrm{i}b(t)]$，$\beta^*(t)=-\frac{a(t)}{2}x\exp[\mathrm{i}b(t)]$，常系数 x 待定．利用 Glauber 公式，经过大量计算可以得到

$$I_V=V^\dagger(t)I(t)V(t)=\Big\{\frac{y}{2}\exp(-\mathrm{i}b)\sin a\cos\Big[\Big(\frac{mn}{2}\Big)^{1/2}ax\Big]-\frac{\big(\frac{mn}{2}\big)^{1/2}}{n}\exp(-\mathrm{i}b)\cos a\sin\Big[\Big(\frac{mn}{2}\Big)^{1/2}ax\Big]\Big\}A$$
$$+\Big\{\frac{y}{2}\exp(\mathrm{i}b)\sin a\cos\Big[\Big(\frac{mn}{2}\Big)^{1/2}ax\Big]-\frac{\big(\frac{mn}{2}\big)^{1/2}}{n}\exp(\mathrm{i}b)\cos a\sin\Big[\Big(\frac{mn}{2}\Big)^{1/2}ax\Big]\Big\}B$$
$$+\Big\{\cos a\cos\Big[\Big(\frac{mn}{2}\Big)^{1/2}ax\Big]+\frac{\big(\frac{mn}{2}\big)^{1/2}}{m}y\sin a$$

$$\times\sin\left[\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}ax\right]\Big\}C. \tag{18}$$

容易看出如果选择

$$y=\frac{m}{\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}},\quad x=\frac{1}{\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}}, \tag{19}$$

则有

$$I_V=C, \tag{20}$$

即通过幺正变换(17)式获得的 I_V 是一个与时间无关的生成元 C. I_V 的本征值和本征函数容易求得,其本征方程和本征函数可分别写为

$$I_V|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle,\quad |\lambda\rangle=V^{\dagger}(t)|\lambda,t\rangle_I. \tag{21}$$

利用幺正变换 $V(t)=\exp[L(t)]$ 和 Baker-Campbell-Hausdorff 公式[26]

$$V^{\dagger}(t)\frac{\partial}{\partial t}V(t)=\frac{\partial}{\partial t}L+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial t}L,L\right]+\frac{1}{3!}\left[\left[\frac{\partial}{\partial t}L,L\right],L\right]+\frac{1}{4!}\left[\left[\left[\frac{\partial}{\partial t}L,L\right],L\right],L\right]+\cdots, \tag{22}$$

可以得到

$$\begin{aligned}V^{\dagger}(t)H(t)V(t)=&\Big\{\omega\Big[\frac{1}{2}\sin\theta\exp(-\mathrm{i}\phi)\\&-\frac{\sqrt{\frac{mn}{2}}}{n}\exp(-\mathrm{i}b)\cos\theta\sin\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\Big]\\&+\frac{1}{2}\omega\exp(-\mathrm{i}b)\sin\theta\\&\times\cos(b-\phi)\left[\cos\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)-1\right]\Big\}A\\&+\Big\{\omega\Big[\frac{1}{2}\sin\theta\exp(\mathrm{i}\phi)-\frac{\sqrt{\frac{mn}{2}}}{n}\\&\times\exp(\mathrm{i}b)\cos\theta\sin\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\Big]\\&+\frac{1}{2}\omega\exp(\mathrm{i}b)\sin\theta\cos(b-\phi)\\&\times\left[\cos\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)-1\right]\Big\}B\\&+\omega\Big[\cos\theta\cos\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\\&+\frac{\sqrt{\frac{mn}{2}}}{m}\sin\theta\cos(b-\phi)\\&\times\sin\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\Big]C\end{aligned} \tag{23}$$

和

$$\begin{aligned}V^{\dagger}(t)\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}=&\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}\dot{a}\,x\exp(-\mathrm{i}b)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{mn}{2}}}\dot{b}\\&\times\exp(-\mathrm{i}b)\sin\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\Big]A\\&+\Big[\frac{\mathrm{i}}{2}\dot{a}\,x\exp(\mathrm{i}b)-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{mn}{2}}}\dot{b}\\&\times\exp(\mathrm{i}b)\sin\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\Big]B\\&-\frac{\dot{b}}{m}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{mn}{2}}ax\right)\right]C,\end{aligned} \tag{24}$$

于是在幺正变换下,哈密顿量 $H(t)$ 相应变为

$$\begin{aligned}H_V(t)=&V^{\dagger}(t)H(t)V(t)-V^{\dagger}(t)\mathrm{i}\frac{\partial V(t)}{\partial t}\\=&\Big\{\omega\Big[\cos a\cos\theta+\frac{\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}}{m}\sin a\sin\theta\\&\times\cos(b-\phi)\Big]+\frac{\dot{b}}{m}(1-\cos a)\Big\}C.\end{aligned} \tag{25}$$

在幺正变换 $V(t)$ 下,不变量方程(11)化为

$$\frac{\partial I_V}{\partial t}+\frac{1}{\mathrm{i}}[I_V,H_V]=0. \tag{26}$$

由于$\frac{\partial I_V}{\partial t}=0$,故$[I_V,H_V]=0$.显然由(25)和(20)式,可以证明(26)式成立.同时获得经幺正变换之后的含时 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial|\Psi(t)\rangle_V}{\partial t}=H_V(t)|\Psi(t)\rangle_V, \tag{27}$$

其中 $|\Psi(t)\rangle_V=V^{\dagger}|\Psi(t)\rangle_s$.因此 $|\Psi(t)\rangle_V$ 与 I_V 的本征态只相差一个含时 c- 数因子 $\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\varphi(t)\right]$[14].

这样根据(15)和(21)式,可以得到含时 Schrödinger 方程(8)的特解:

$$|\Psi(t)\rangle_s=\exp\left[\frac{1}{\mathrm{i}}\varphi(t)\right]V(t)|\lambda\rangle, \tag{28}$$

其中相位

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&\int_0^t\langle\lambda|\Big[V^{\dagger}(t')H(t')V(t')\\&-V^{\dagger}(t')\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t'}V(t')\Big]|\lambda\rangle\mathrm{d}t'\\=&\varphi_{\mathrm{d}}(t)+\varphi_{\mathrm{g}}(t)\\=&\lambda\int_0^t\Big\{\omega\Big[\cos a\cos\theta+\frac{\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}}{m}\sin a\sin\theta\end{aligned}$$

$$\times \cos(b-\phi)\Big] + \frac{\dot{b}}{m}(1-\cos a)\Big\}\mathrm{d}t', \quad (29)$$

动力学相位的显式为

$$\varphi_{\mathrm{d}}(t) = \lambda\int_0^t \omega\Big[\cos a\cos\theta + \frac{\left(\frac{mn}{2}\right)^{1/2}}{m}\sin a\sin\theta\cos(b-\phi)\Big]\mathrm{d}t',$$

几何相位的显式为

$$\varphi_{\mathrm{g}}(t) = \lambda\int_0^t \frac{\dot{b}}{m}(1-\cos a)\mathrm{d}t'.$$

可以看出，动力学相位与哈密顿量的系数 ω，$\cos\theta$，$\sin\theta$ 等直接有关，然而几何相位和这些系数并没有直接的关系，它体现的是含时系统整体演化特征. 如果参数 a 与时间无关，那么不变量参数空间一个周期的几何相位

$$\varphi_{\mathrm{g}}(T) = \lambda\int_0^T \frac{\dot{b}}{m}(1-\cos a)\mathrm{d}t' = \frac{\lambda}{m}[2\pi(1-\cos a)],$$

其中 $2\pi(1-\cos a)$ 表示参数空间的立体角，这个事实显示了 $\varphi_{\mathrm{g}}(t)$ 的几何或者拓扑意义. (28) 式为含时 Schrödinger 方程对应于 I_V 本征值为 λ 时的特解，通解可以很容易地用它们的线性叠加表示.

3. 结　　论

对于特殊情形，例如自旋模型，其哈密顿量为 $H=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{J}$，故可以选择 $A=J_+=J_1+\mathrm{i}J_2$，$B=J_-=J_1-\mathrm{i}J_2$，$C=J_3$，$m=1$，$n=2$，将它们代入方程(28)和(29)，所获得结论与文献[8,27]一致. 本文用不变量理论和幺正变换方法获得了一般的含时三生成元量子系统或模型 Schrödinger 方程的精确解. 由于几何相位出现在哈密顿量显含时间的系统中，所以有了含时 Schrödinger 方程的精确解，就有利于研究几何相位的性质，从上面的几何相位表达式中也可以看出几何相位没有色散和相移的性质. 因此与不变量有关的幺正变换方法是一种研究几何相位[28]和含时 Schrödinger 方程的有效方法，对于含时场论的研究也有重要意义[29]. 对于生成元个数多于三个的系统，其含时 Schrödinger 方程的精确解也可以用该方法获得. 值得一提的是，含时 Schrödinger 方程经常被提到，但含时 Klein-Gordon 方程却鲜有涉及. 可以证明，将 Lewis-Riesenfeld 不变量理论推广到含时 Klein-Gordon 方程并获得方程的精确解也是可能的. 关于这方面的结果及对其几何相位的研究将另文发表.

本工作得到高孝纯教授的帮助，特此致谢.

[1] Morales D A 1988 *J. Phys.* A **21** 1889
[2] Fu J, Li X H Gao X C and Gao J 1999 *Commun. Theor. Phys.* (*China*) **31** 135
[3] Chiao R Y and Wu Y S 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 933
[4] Tomita A and Chiao R Y 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 937
[5] Kwiat P G and Chiao R Y 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 588
[6] Mashhoon B 1995 *Phys. Lett.* **198** 9
[7] Mashhoon B 1999 *Gen. Rel. Grav.* **31** 681
[8] Shen J Q, Zhu H Y and Li J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1884 (in Chinese) [沈建其、朱红毅、李　军 2001 物理学报 **50** 1884]
[9] Bouchiat C and Gibbons G W 1998 *J. Phys.* (Paris) **49** 187
[10] Datta N *et al* 1989 *Phys. Rev.* A **40** 526
[11] Mizrahi S S 1989 *Phys. Lett.* A **138** 465
[12] Gao X C, Xu J B and Qian T Z 1991 *Phys. Lett.* A **152** 449
[13] Zhang Z C *et al* 2000 *High Energy Phys. Nucl. Phys.* **24** 1106 (in Chinese) [张忠灿等 2000 高能物理与核物理 **24** 1106]
[14] Gao X C, Xu J B and Qian T Z 1991 *Phys. Rev.* A **44** 7016
[15] Sukumar C V and Buck B 1981 *Phys. Lett.* A **83** 211
[16] Kien F L, Kozierowki M and Quany T 1988 *Phys. Rev.* A **38** 263
[17] Lu H X, Wang X Q and Zhang Y D 2000 *Chin. Phys.* **9** 325
[18] Lu H X and Wang X Q 2000 *Chin. Phys.* **9** 568
[19] Fu J, He S L and Xiao S S 2000 *J. Phys.*: *Math. Gen.* A **33** 7761
[20] Lewis H R and Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458
[21] Ding S W and Ye C H 1992 *Prog. Phys.* **42** 63 (in Chinese) [丁尚武、叶朝辉 1992 物理学进展 **42** 63]
[22] Liu D Y 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 705 (in Chinese) [刘登云 1993 物理学报 **42** 705]
[23] Jing H and Wu J S 2000 *Chin. Phys.* **9** 481
[24] Gao X C, Xu J B and Zou X B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1011 (in Chinese) [高孝纯、许晶波、邹旭波 1999 物理学报 **48** 1011]
[25] Gao X C, Gao J and Fu J 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 912 (in Chinese) [高孝纯、高　隽、符　建 1996 物理学报 **45** 912]
[26] Wei J and Norman E 1963 *J. Math. Phys.* (N.Y.) **4** 575
[27] Li B Z, Zhang L Y and Zhang X D 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2081 (in Chinese) [李伯臧、张凌云、张向东 1997 物理学报 **46** 2081]
[28] Shen J Q, Zhu H Y and Shi S L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 536 (in Chinese) [沈建其、朱红毅、施申蕾 2002 物理学报 **51** 536]
[29] Fu J, Gao X C, Xu J B and Zou X B 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 606 (in Chinese) [符　建、高孝纯、许晶波、邹旭波 1998 物理学报 **47** 606]

Exact solutions of general time-dependent three-generator systems*

Zhu Hong-Yi Shen Jian-Qi
(*State Key Laboratory of Modern Optical Instrumentation*, *Center for Optical and Electromagnetic Research*, *Zhejiang Institute of Modern Physics*, *Department of Physics*, *Zhejiang University*, *Hangzhou* 310027, *China*)
(Received 11 November 2001; revised manuscript received 6 December 2001)

Abstract

There exist a number of typical systems and models which possess the three-generator Lie algebraic structure in quantum optics, atomic and molecular physics and condensed matter physics. The present paper obtains exact solutions of these time-dependent three-generator systems by making use of the Lewis-Riesenfeld invariant theory and the invariant-related unitary transformation formulation.

Keywords: invariant theory, exact solutions, generators, geometric phase factor
PACC: 0365, 0290, 4250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 30000034).