第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1453-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.7, July, 2002

$\tan^2(\pi\eta r)$型势阱中相对论粒子的束缚态

郭建友

(安徽大学物理系,合肥 230039)

(2001 年 11 月 24 日收到;2001 年 12 月 29 日收到修改稿)

给出了具有 $\tan^2(\pi\eta r)$型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解,并与无限深球方势阱的情况进行了比较.

关键词:$\tan^2(\pi\eta r)$势, Klein-Gordon 方程, Dirac 方程, 束缚态
PACC:0365

1. 引　　言

众所周知,在强耦合条件下,在势场中运动的粒子的相对论效应变得十分重要[1],而在考虑相对论效应时,处于势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程描述. Dominguez-Adame[2] 和 Talukdar 等人[3] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解和散射态解;胡嗣柱等人[4] 给出了在 Hulthén 标量势和矢量势相等条件下 Dirac 方程 s 波束缚态解;侯春风等人不仅分别给出了在 Morse 和 Woods-Saxon 标量势和矢量势相等条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解[5,6],而且给出了相对论性氢原子径向算符矩阵元的通项计算公式[7];陈刚[8] 给出了在 Pöschl-Teller 标量势和矢量势相等条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程 s 波束缚态解. 对于 $\tan^2(\pi\eta r)$型势,非相对论的束缚态能谱结构与无限深球方势阱十分类似,相对论情况是否也是如此,本文在 $\tan^2(\pi\eta r)$型标量势和矢量势相等条件下,分别给出了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程 s 波束缚态解,并与无限深球方势阱及非相对论情况进行了比较.

2. 具有 $\tan^2(\pi\eta r)$型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[2]指出,具有标量势 $S(r)$与矢量势 $V(r)$的 s 波 Klein-Gordon 方程为($\hbar=c=1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+[E-V(r)]^2-[M+S(r)]^2\right\}u(r)=0,$$

$$\left[R(r)=\frac{u(r)}{r}\right]. \tag{1}$$

在标量势和矢量势相等条件下,(1)式可写为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)\right]u(r)=0. \tag{2}$$

当取 $V(r)$为 $V_0\tan^2(\pi\eta r)$时(参数 $\eta=1/(2L)$),$V(r)$满足的边条件为

$$V(r)=\begin{cases}0, & r=0,\\ \infty, & r=L.\end{cases} \tag{3}$$

相应的波函数 $u(r)$满足的边条件为

$$u(r)=\begin{cases}0, & r=0,\\ 0, & r=L.\end{cases} \tag{4}$$

将 $V(r)=V_0\tan^2(\pi\eta r)$代入(2)式,得

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)V_0\tan^2(\pi\eta r)+(E^2-M^2)\right]u(r)=0. \tag{5}$$

令

$$u(r)=\cos^{-2\lambda}(\pi\eta r)w(r), \tag{6}$$

式中无量纲参数 λ 为

$$\lambda=\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{8(E+M)V_0}{\pi^2\eta^2}+1}-1\right], \tag{7}$$

得 $w(r)$满足

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}r^2}+4\lambda\pi\eta\tan(\pi\eta r)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}+4\pi^2\eta^2(v^2-\lambda^2)w=0, \tag{8}$$

式中

$$v = \sqrt{\frac{(E+M)(E-M+2V_0)}{4\pi^2\eta^2}} \tag{9}$$

为另一个无量纲参数. 引入变量 $z=\sin^2(\pi\eta r)$，(8)式可化为超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\left[\frac{1}{2}-(1-2\lambda)z\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + (v^2-\lambda^2)w = 0, \tag{10}$$

与超几何方程的标准形式

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w = 0 \tag{11}$$

比较，相应参数为 $\alpha=-(v+\lambda)$，$\beta=(v-\lambda)$，$\gamma=1/2$，考虑到边条件 $u(0)=0$，可取

$$w = \mathrm{F}(-v-\lambda, v-\lambda, 1/2; z). \tag{12}$$

它在 $z=0$ 点(即 $r=0$)取有限值.

为便于利用束缚态边条件(在 $z=1$，即 $r=L$ 点)，利用

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma;z) = (1-z)^{-\alpha}\,\mathrm{F}\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{z}{z-1}\right), \tag{13}$$

将 w 改写为

$$w = (1-z)^{v+\lambda}\,\mathrm{F}\left(-v-\lambda,\frac{1}{2}-v+\lambda,\frac{1}{2};\frac{z}{z-1}\right). \tag{14}$$

为保证 z 趋于 1 时波函数趋于零(束缚态)，(14)式作为 $\left(\frac{z}{z-1}\right)$ 的幂级数，必须中断为一个多项式，即要求 $(-v-\lambda)$ 或 $\left(\frac{1}{2}-v+\lambda\right)$ 为零或负整数. 实际上，只有第二种情况符合要求，即

$$v-\lambda-\frac{1}{2} = n, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{15}$$

将 v 和 λ 代入，得

$$\sqrt{(E_n+M)(E_n-M+2V_0)} - \sqrt{2V_0(E_n+M)+\frac{\pi^2\eta^2}{4}} = \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\eta, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{16}$$

(16)式即为具有 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 方程 s 波束缚态满足的能谱方程，相应的波函数为(未归一化)

$$u_n(r) = \cos^{-2\lambda}(\pi\eta r)\,\mathrm{F}\left(-2\lambda-n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2},\frac{1}{2};\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\right). \tag{17}$$

3. 具有 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型标量势和矢量势的 Dirac 方程的 s 波束缚态解

文献[4]指出，具有标量势 $S(r)$ 和矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar=c=1$)

$$\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{P}+\beta[M+S(r)]\}\psi = [E-V(r)]\psi. \tag{18}$$

在相对论情况下，中心力场中粒子的守恒量完全集可以取为$(H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$，$(H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$的共同本征函数为

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j} \\ \mathrm{i}g_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix} \qquad \left(\text{当 } k = j+\frac{1}{2} \text{ 时}\right), \tag{19}$$

$$\psi = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} f_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j} \\ \mathrm{i}g_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix} \qquad \left(\text{当 } k = -\left(j+\frac{1}{2}\right) \text{ 时}\right), \tag{20}$$

其中

$$\phi^A_{jm_j} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}\,Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}\,Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$$\phi^B_{jm_j} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}}\,Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}}\,Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

把(19)式或(20)式代入(18)式，可分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{k}{r}f = [M+E+S(r)-V(r)]g, \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{k}{r}g = [M-E+S(r)+V(r)]f. \tag{23}$$

在标量势和矢量势相等情况下，方程 (22)和(23)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{k}{r}f = (M+E)g, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{k}{r}g = [M-E+2V(r)]f. \tag{25}$$

把(24)式代入(25)式，可得

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2) - \frac{k(k-1)}{r^2}\right]f = 0. \tag{26}$$

对于 s 波，即 $k=1$，方程(26)变为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)\right]f=0. \tag{27}$$

当 $V(r)=V_0\tan^2(\pi\eta r)$时，方程(27)与方程(5)完全类似，于是立即可得束缚态的能谱 $E_{n,1}$ 所满足的方程为

$$\sqrt{(E_{n,1}+M)(E_{n,1}-M+2V_0)}-\sqrt{2V_0(E_{n,1}+M)+\pi^2\eta^2/4}=(2n+1/2)\pi\eta,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{28}$$

与 $E_{n,1}$ 相对应的 f 分量的径向波函数为(未归一化)

$$f_{n,1}(r)=\cos^{-2\lambda}(\pi\eta r)\mathrm{F}\left(-2\lambda-n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\frac{1}{2};\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\right). \tag{29}$$

把(29)式代入(24)式，可得

$$\begin{aligned}g_{n,1}(r)=\frac{\cos^{-2\lambda}(\pi\eta r)}{M+E_{n,1}}\Big\{&2\lambda\pi\eta\tan(\pi\eta r)\mathrm{F}\left(-2\lambda-n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\frac{1}{2};\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\right)\\&+2\lambda\pi\eta\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\cot(\pi\eta r)\left(4n\lambda+2n^2+2n+2\lambda+\frac{1}{2}\right)\mathrm{F}\left(-2\lambda-n+\frac{1}{2},n+\frac{3}{2},\frac{3}{2};\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\right)\\&-\frac{1}{r}\mathrm{F}\left(-2\lambda-n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2},\frac{1}{2};\sin^{-2\lambda}(\pi\eta r)\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{30}$$

把 $f_{n,1}(r)$和 $g_{n,1}(r)$代入(19)式，可给出 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

4. 无限深球方势阱 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

在标量势和矢量势相等情况下，无限深球方势阱中 s 波的 Klein-Gordon 方程为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-2(E+M)V(r)+(E^2-M^2)\right]u(r)=0, \tag{31}$$

其中

$$V(r)=\begin{cases}0, & r<L,\\ \infty, & r>L,\end{cases} \tag{32}$$

L 为势阱宽度，容易求出其能谱为

$$E_n=\sqrt{M^2+\frac{(n+1)^2\pi^2}{L^2}},\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{33}$$

由此可以看出，处于无限深球方势阱与 $\tan^2(\pi\eta r)$型势阱中运动的粒子，其相对论的束缚态能谱，无论基态和激发态都不相同(比较(16)，(28)和(33)式).

5. $\tan^2(\pi\eta r)$型势 Schrödinger 方程的 s 波束缚态解

众所周知，非相对论中心场径向波函数满足的 Schrödinger 为($\hbar=1$)

$$R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left[2M(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0. \tag{34}$$

令 $R(r)=u(r)/r$，得 $u(r)$满足的方程为

$$u''+\left[2M(E-V(r))-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=0. \tag{35}$$

对于 s 波，方程(35)可写为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-2MV(r)+2ME\right]u=0. \tag{36}$$

当取 $V(r)=V_0\tan^2(\pi\eta r)$，边界上 $V(r)$满足

$$V(r)=\begin{cases}0, & r=0,\\ \infty, & r=L,\end{cases} \tag{37}$$

其中 $L=1/2\eta$ 为势阱宽度，故得波函数 $u(r)$满足的边条件为

$$u(r)=\begin{cases}0, & r=0,\\ 0, & r=L,\end{cases} \tag{38}$$

所以 s 波 Schrödinger 方程可写为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-2MV_0\tan^2(\pi\eta r)+2ME\right]u=0. \tag{39}$$

令

$$u(r)=\cos^{-2\lambda}(\pi\eta r)w(r), \tag{40}$$

其中无量纲参数 λ 为

$$\lambda=\frac{1}{4}\left[\sqrt{\frac{8MV_0}{\pi^2\eta^2}+1}-1\right], \tag{41}$$

则 $w(r)$满足

$$\frac{d^2w}{dr^2}+4\lambda\pi\eta\tan(\pi\eta r)\frac{dw}{dr}+4\pi^2\eta^2(v^2-\lambda^2)w=0, \tag{42}$$

其中

$$v=\sqrt{\frac{M(E+V_0)}{2\pi^2\eta^2}}. \tag{43}$$

方程(42)与方程(8)完全一致，故立即可得

$$v-\lambda-\frac{1}{2}=n,\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{44}$$

将 v 和 λ 代入，得

$$E_{n,0} = \frac{2\pi^2\eta^2}{M}\left(n+\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 - V_0, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{45}$$

由(41)式可算出 $V_0 = \frac{\pi^2\eta^2}{M}(2\lambda^2+\lambda)$，代入(45)式，得

$$E_{n,0} = \frac{2\pi^2\eta^2}{M}\left(n^2+n+2n\lambda+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right). \tag{46}$$

当取 $V_0 = \frac{\pi^2\eta^2}{M}$ 时，$\lambda = \frac{1}{2}$，于是可得能谱公式为

$$E_{n,0} = \frac{\pi^2}{2ML^2}n(n+2) + \frac{\pi^2}{4ML^2}, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{47}$$

而在无限深球方势阱

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < L, \\ \infty, & r > L \end{cases} \tag{48}$$

中运动的粒子，其 Schrödinger 方程 s 波束缚态解的能谱为

$$E^{\mathrm{sp}}_{n,0} = \frac{\pi^2}{2ML^2}(n+1)^2 = \frac{\pi^2}{2ML^2}n(n+2) + \frac{\pi^2}{2ML^2}, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{49}$$

由此可以看出，处于无限深球方势阱与 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型势阱中运动的粒子，其非相对论的束缚态能谱，除基态外，激发态能谱完全一致(比较(47)与(49)式).

6. 结 论

综上所述，可以看出，具有相等的标量和矢量 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型势函数的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解可严格求出，相应的束缚态能谱满足完全相同的方程，如(16)和(28)式. 但具有相等的标量和矢量 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型势函数与无限深球方势阱束缚态能谱，无论基态或激发态，都完全不同(比较(16)与(33)式). 非相对论的 $\tan^2(\pi\eta r)$ 型势函数与无限深球方势阱(比较(47)与(49)式)，除基态外，激发态能谱完全一致. 这表明在同一势场中运动的粒子，非相对论的 Schrödinger 能谱与相对论的 Klein-Gordon 或 Dirac 能谱差异很大，在强耦合条件下，在势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程处理，用 Schrödinger 方程近似是不合理的.

[1] Wang I C and Wong C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[3] Talukdar B, Yunus A and Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[4] Hu S Z and Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Hou C F, Li Y and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李 炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[6] Hou C F and Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* (*Overseas Edition*) **8** 561

[7] Hou C F, Jiang Y Y Sun X D and Sun W J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1587 (in Chinese) [侯春风、姜永远、孙秀冬、孙万钧 1999 物理学报 **48** 1587]

[8] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈 刚 2001 物理学报 **50** 1651]

Bound states of realtivistic particles in $\tan^2(\pi\eta\, r)$-type potential

Guo Jian-You

(*Department of Physics*, *Anhui University*, *Hefei* 230039, *China*)

(Received 24 November 2001; revised manuscript received 29 December 2001)

Abstract

The s-wave bound states of Klein-Gordon equation and Dirac equation with scalar and vector $\tan^2(\pi\eta\, r)$-type potentials are obtained, and are compared with that of infinite-deep spherical -type potential well.

Keywords: $\tan^2(\pi\eta\, r)$ potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound states

PACC: 0365