第 51 卷 第 7 期 2002 年 7 月
1000-3290/2002/51(07)/1467-08

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.7,July,2002

扩展的纽结量子引力态

邵常贵[1)] 肖俊华[1)] 邵 亮[2)] 邵 丹[2)] 陈贻汉[1)] 潘贵军[1)]

[1)](湖北大学理论物理研究所,武汉 430062)

[2)](*Department of Physics*, *Ibaraki University*, *Mito* 310, *Japan*)

(2000 年 6 月 19 日收到;2001 年 8 月 13 日收到修改稿)

给出了微分同胚群的表示.以扩展的 Gauss 不变量 φ_G 和 Jones 多项式第二个系数 J_2 为基本片段,构造了满足齐次微分同胚约束(D-约束)的扩展 knot 不变量引力态 $\varphi_G * J_2$,$(*J_2)^2$ 和 $(*\varphi_G)^2 * J_2$.得到了它们的具体表式,并通过具体计算,给出了它们满足齐次 D-约束的证明.

关键词:微分同胚约束,扩展 knot 不变量,量子引力态

PACC:0460

1. 引 言

基于 Ashtekar 新变量[1,2]的正则非微扰量子引力理论的研究中,寻找量子引力态是目前关键的问题之一.这种引力态要求满足所有的约束方程.特别地,首先要求在微分同胚群作用下的 D-约束作用其上为零.而在量子引力的圈表象中,D-约束是通过考虑态空间中微分同胚(diffΣ)群的一个线性表示来定义的[3].在圈表象中,态函数是圈的泛函.而 knot(纽结)不变量亦正好是 diffΣ 不变量的圈泛函.于是,可将 knot 不变量作为量子引力态的理想候选者[4,5].本文先讨论圈表象中的 diffΣ 群的表示,接着引入在其下不变的 knot 不变量.由于 knot 不变量作为非微扰量子引力态具有局限性,我们着重探讨扩展的 knot 不变量.本文利用星乘积‘ $*$ ’[6],以扩展的 Gauss 不变量 φ_G 和 Jones 多项式[7,8]第二个系数 J_2 为基本片段,构造了三个扩展 knot 不变量引力态 $\varphi_G * J_2$,$(*J_2)^2$ 和 $(*\varphi_G)^2 * J_2$.求得它们的具体表式并用具体计算证明了它们满足微分同胚群下的齐次 D-约束.

2. 微分同胚群的表示

2.1. 线性表示

将 Ashtekar 引力的时空流形 M 做‘ 3 + 1 ’分解,三维空间流形记为 Σ.令 $\gamma\subset\Sigma$ 为圈,则 γ 上一个无限维多重切场 $X^{\mu}(\gamma)$ 的集合,在圈表象中,是同圈 γ 本身一一对应的:

$$\gamma\leftrightarrow X(\gamma):=\{X,X^{\mu_1}(\gamma),X^{\mu_1\mu_2}(\gamma),\cdots,X^{\mu_1\cdots\mu_n}(\gamma),\cdots\},$$

式中 $\mu_i=(a_i,x_i)$,矢量分量指标 $a_i=1,2,3$.空间位置坐标 $x_i\in\Sigma$.

考虑其基点 $o\in\Sigma$ 被固定的 γ,当 Σ 经受微分同胚 $x^a\to x'^a=D^a(x)$ 时,有圈 $\gamma\to\gamma'=D(\gamma)$.此时可求得圈上的多重切场的变换式为

$$X^{a_1x_1'\cdots a_nx_n'}(D\gamma)=\frac{\partial x_1'^{a_1}}{\partial x_1^{b_1}}\cdots\frac{\partial x_n'^{a_n}}{\partial x_n^{b_n}}\frac{1}{J(x_1)}\cdots\frac{1}{J(x_n)}\times X^{b_1x_1\cdots b_nx_n}(\gamma),\tag{1}$$

式中 $J(x)$ 为 Jacobian 变换式.引入矩阵 Λ_D,其分量

$$\Lambda_{D\,\nu_1\cdots\nu_m}^{\mu_1\cdots\mu_n}\equiv\delta_{n,m}\Lambda_{D\,\nu_1}^{\mu_1}\cdots\Lambda_{D\,\nu_n}^{\mu_n},$$

且

$$\Lambda_{D\,bx}^{ay}=\frac{1}{J(x)}\frac{\partial D^a(x)}{\partial x^b}\delta(x-D^{-1}(y))=\frac{\partial D^a(x)}{\partial x^b}\delta(D(x)-y).\tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,得

$$X^{\mu_1\cdots\mu_n}(D\gamma)=\sum_{m=1}^{\infty}\Lambda_{D\,\nu_1\cdots\nu_m}^{\mu_1\cdots\mu_n}X^{\nu_1\cdots\nu_m}(\gamma).\tag{3}$$

利用 Einstein 广义的求和约定[8],(3)式又可写为

$$X(D\gamma)=\Lambda_DX(\gamma).\tag{4}$$

由(4)式知,定义在两个微分同胚圈上的多重切场 $X(D\gamma)$ 和 $X(\gamma)$ 是由与圈无关的线性变换 Λ_D 联系起来的,而且由多重切场的多重矢量性质可以知道,Λ_D 是微分同胚群的一个无穷维线性表示.

2.2. 非平庸线性表示

多重切场 X 包含了所有与圈有关的信息,可考虑作为圈坐标,但它不是独立的量.用来构造 knot 态,它应满足下述代数约束和微分约束:

$$\sum_{p_k} X^{p_k(\mu_1,\cdots,\mu_n)} \equiv X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_k}\mu_{k+1}\cdots\mu_n} = X^{\mu_1\cdots\mu_k}X^{\mu_{k+1}\cdots\mu_n}, \tag{5}$$

式中 P_k 为对连续 k 个(广义)指标 $\mu_1,\cdots,\mu_k$ 在所有指标中做双重保持指标次序的所有置换,

$$\begin{aligned}\partial_{\mu_i} X^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_n} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_i^{a_i}} X^{\mu_1\cdots\mu_i\cdots\mu_n} \\ &= [\delta(x_i - x_{i-1}) - \delta(x_i - x_{i+1})] \\ &\quad \times X^{\mu_1\cdots\mu_{i-1}\mu_{i+1}\cdots\mu_n},\end{aligned} \tag{6}$$

式中点 x_{i-1}, x_i 与 $x_{i+1}\in\Sigma$,当 $i=1$ 或 $i=n$ 时,点 x_o 和 x_{n+1} 均为圈的基点 o.

我们将满足微分约束所有矢量 W 构成的线性空间记为 w,将满足齐次微分约束所有矢量 V 构成的线性空间记为 v,它们之间有如下关系:

$$V = \delta_{\mathrm T} W, \tag{7}$$

$$W = \sigma V, \tag{8}$$

式中 $\delta_{\mathrm T}$ 为横向投影算子($\delta_{\mathrm T} = \delta^{ax}_{by} - \Phi^{ax}_{b,y}$,$\Phi$ 为描述场发散性的函数),σ 为非对角矩阵[9].由前述内容可知,w 中的元素满足下列变换:

$$W' = \Lambda_D W. \tag{9}$$

将(7)和(8)式代入(9)式,得

$$V' = \delta_{\mathrm T} W' = \delta_{\mathrm T}\Lambda_D W = \delta_{\mathrm T}\Lambda_D\sigma V = \mathscr{L}_D V,$$

式中 $\mathscr{L}_D = \delta_{\mathrm T}\Lambda\sigma$.

由于 w 空间和 v 空间存在一个同构关系,所以 $\mathscr{L}_D$ 也是微分同胚群的一个表示,不过这个表示是由 σ 的性质决定的,对于 knot 不变量引力态而言,是个非平庸无穷维表示.令 y 是 v 的一个子空间,其中所有的元素 Y 均满足齐次代数约束,则 Y 亦有下列变换性质:

$$(Y'_1\times\cdots\times Y'_n) = \mathscr{L}_D(Y_1\times\cdots\times Y_n), \tag{10}$$

Y 为正规化的横向场,y 为微分同胚群的非平庸无穷线性表示空间.

3. 扩展的 knot 态

3.1. knot 不变量

y 空间是一个线性空间,其线性性质可由一个协变矢量 $g=(g_{\mu_1},\cdots,g_{\mu_1\cdots\mu_n},\cdots)$ 表示出来,即

$$g(\alpha Y_1+\beta Y_2) = \alpha g(Y_1) + \beta g(Y_2).$$

若 g 进一步具有性质 $g = g\cdot\delta_{\mathrm T}$,则该性质在 diff$\Sigma$ 变换下不变,当 g 是协变不变量

$$g' = g\mathscr{L}_D^{-1} = g \tag{11}$$

时,物理量

$$\psi(\gamma) = g(Y_1(\gamma)\times\cdots\times Y_n(\gamma)), \tag{12}$$

在 diffΣ 变换下为

$$\psi(\gamma') = g'(Y'_1(\gamma')\times\cdots\times Y'_n(\gamma')).$$

将(10)和(11)式代入(12)式,可得 $\psi(\gamma')=\psi(\gamma)$.这表明 $\psi(\gamma)$ 是 diffΣ 不变量,换言之,$\psi(\gamma)$ 是一个 knot 不变量.我们所知道的最简单的 knot 不变量是 Gauss 不变量 $\varphi_{\mathrm G}(\gamma) = g_{\mathrm G}(Y_1(\gamma)\times Y_2(\gamma)) = g_{\mu_1\mu_2}Y^{\mu_1}(\gamma)Y^{\mu_2}(\gamma)$,若用 γ 上的多重切场表示,则为

$$\varphi_{\mathrm G}(\gamma) = g_{\mu_1\mu_2}X^{\mu_1\mu_2}(\gamma). \tag{13}$$

3.2. 扩展的 knot 态

将多重切场 $X^\mu(\gamma)$ 一般化为一般的场 X^μ,那么,相应的 knot 不变量就变为扩展的 knot 不变量.利用多重切场,(13)式应为

$$\varphi_{\mathrm G} = g_{\mu_1\mu_2}X^{\mu_1\mu_2}.$$

常见的作为量子引力态的扩展的 knot 不变量还有 Jones 多项式的第二、三个系数:

$$J_2 = g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_4}X^{\mu_1\cdots\mu_4} + h_{\mu_1\mu_2\mu_3}X^{\mu_1\cdots\mu_3},$$

$$\begin{aligned}J_3 = {} & (h_{\mu_1\mu_2\alpha}g^{\alpha\beta}h_{\mu_3\mu_4\beta} - h_{\mu_1\mu_4\alpha}g^{\alpha\beta}h_{\mu_2\mu_3\beta}) \\ & \times X^{\mu_1\cdots\mu_4} + g_{(\mu_1\mu_3}h_{\mu_2\mu_4\mu_5)c}X^{\mu_1\cdots\mu_5} \\ & + (2g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_6} \\ & + \frac{1}{2}g_{(\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_4\mu_6)c})X^{\mu_1\cdots\mu_6},\end{aligned}$$

式中 $g_{\mu_1\mu_2}$ $h_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ 分别为 Chern-Simons 理论中的两点传播子和三点传播子.

4. 构造的扩展 knot 态的具体表式

以 $\varphi_{\mathrm G}, J_2$ 为基本片段,引入星乘积'$*$",构造出了混合的扩展的 knot 不变量 $\varphi_{\mathrm G}*J_2$,$(*J_2)^2$,$(*\varphi_{\mathrm G})^2*J_2$ 作为量子引力态候选者,下面给出具体结果.

对于 $\varphi_{\mathrm G}*J_2$,其构成如下:

$$\varphi_{\mathrm{G}} * J_2 \equiv g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} X^{\underline{\mu_1\mu_2}\mu_3\cdots\mu_6} + g_{\mu_1\mu_2} h_{\mu_3\mu_4\mu_5} X^{\underline{\mu_1\mu_2}\mu_3\cdots\mu_5} = GX^{\mu_1\cdots\mu_6} + IX^{\mu_1\cdots\mu_5}, \tag{14}$$

式中引入的符号经计算为

$$G = G^1_{\mu_1\cdots\mu_6} + G^2_{\mu_1\cdots\mu_6} + G^3_{\mu_1\cdots\mu_6} + G^4_{\mu_1\cdots\mu_6} + G^5_{\mu_1\cdots\mu_6},$$

式中

$$G^1_{\mu_1\cdots\mu_6} = g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6},$$
$$G^2_{\mu_1\cdots\mu_6} = g_{\mu_1\mu_3}\left(2g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4\mu_5} + g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}\right),$$
$$G^3_{\mu_1\cdots\mu_6} = g_{\mu_1\mu_4}\left(2g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_5} + 3g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_6}\right),$$
$$G^4_{\mu_1\cdots\mu_6} = g_{\mu_1\mu_5}\left(2g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_4}\right),$$
$$G^5_{\mu_1\cdots\mu_6} = g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_5},$$

$$I = g_{\mu_1\mu_5} h_{\mu_2\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} h_{\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_1\mu_3} h_{\mu_2\mu_4\mu_5} + g_{\mu_1\mu_2} h_{\mu_3\mu_4\mu_5} + g_{\mu_2\mu_4} h_{\mu_1\mu_3\mu_5} + g_{\mu_2\mu_5} h_{\mu_1\mu_3\mu_4}$$
$$+ g_{\mu_2\mu_3} h_{\mu_1\mu_4\mu_5} + g_{\mu_3\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_4} + g_{\mu_4\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_3} + g_{\mu_3\mu_4} h_{\mu_1\mu_2\mu_5}.$$

对于$(*J_2)^2$,其构成如下:

$$(*J_2)^2 \equiv g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_4}\mu_5\cdots\mu_8} + 2g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} h_{\mu_5\mu_6\mu_7} X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_4}\mu_5\cdots\mu_7} + h_{\mu_1\mu_2\mu_3} h_{\mu_4\mu_5\mu_6} X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_3}\mu_4\cdots\mu_6}$$
$$= G_1 X^{\mu_1\cdots\mu_8} = I_1 X^{\mu_1\cdots\mu_7} + HX^{\mu_1\cdots\mu_6}, \tag{15}$$

式中引入的符号经计算为

$$G_1 = G^1_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^2_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^3_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^4_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^5_{\mu_1\cdots\mu_8},$$

式中

$$G^1_{\mu_1\cdots\mu_8} = 2g_{\mu_1\mu_3}\left(g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_5\mu_8} + g_{\mu_2\mu_7} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_8} + g_{\mu_2\mu_8} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_7}\right),$$
$$G^2_{\mu_1\cdots\mu_8} = 2g_{\mu_1\mu_4}\left[g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_2\mu_6}\left(2g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_8} + g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_7}\right) + g_{\mu_2\mu_7}\left(g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_8}\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_8}\right) + g_{\mu_2\mu_8} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_7}\right],$$
$$G^3_{\mu_1\cdots\mu_8} = 2g_{\mu_1\mu_5}\left[g_{\mu_2\mu_6}\left(3g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_8} + 2g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_7}\right) + g_{\mu_2\mu_7}\left(2g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_8} + g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_6}\right) + g_{\mu_2\mu_8} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_7}\right],$$
$$G^4_{\mu_1\cdots\mu_8} = 2g_{\mu_1\mu_6}\left[g_{\mu_2\mu_4}\left(g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_8}\right) + 2g_{\mu_2\mu_5}\left(g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_8}\right) + g_{\mu_2\mu_7} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_8}\right.$$
$$\left. + g_{\mu_2\mu_8} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_7}\right],$$
$$G^5_{\mu_1\cdots\mu_8} = 2g_{\mu_1\mu_7}\left[g_{\mu_2\mu_4}\left(g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_8} + g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_8}\right) + g_{\mu_2\mu_5}\left(g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_8}\right) + g_{\mu_2\mu_8} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6}\right],$$
$$I_1 = I^1_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^2_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^3_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^4_{\mu_1\cdots\mu_7},$$

式中

$$I^1_{\mu_1\cdots\mu_7} = 2g_{\mu_1\mu_3}\left(g_{\mu_2\mu_4} h_{\mu_5\mu_6\mu_7} + g_{\mu_2\mu_5} h_{\mu_4\mu_6\mu_7} + g_{\mu_2\mu_6} h_{\mu_4\mu_5\mu_7} + g_{\mu_2\mu_7} h_{\mu_4\mu_5\mu_6}\right) + 2g_{\mu_1\mu_4}\left(g_{\mu_2\mu_5} h_{\mu_3\mu_6\mu_7}\right.$$
$$\left. + g_{\mu_2\mu_6} h_{\mu_3\mu_5\mu_7} + g_{\mu_2\mu_7} h_{\mu_3\mu_5\mu_6}\right) + 2g_{\mu_1\mu_5}\left(g_{\mu_2\mu_6} h_{\mu_3\mu_4\mu_7} + g_{\mu_2\mu_7} h_{\mu_3\mu_4\mu_6}\right) + 2g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_7} h_{\mu_3\mu_4\mu_5},$$
$$I^2_{\mu_1\cdots\mu_7} = 2g_{\mu_1\mu_4}\left(g_{\mu_3\mu_5} h_{\mu_2\mu_6\mu_7} + g_{\mu_3\mu_6} h_{\mu_2\mu_5\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_2\mu_5\mu_6}\right) + 2g_{\mu_1\mu_5}\left(g_{\mu_3\mu_6} h_{\mu_2\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_2\mu_4\mu_6}\right.$$
$$\left. + g_{\mu_4\mu_6} h_{\mu_2\mu_3\mu_7} + g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_2\mu_3\mu_6}\right) + 2g_{\mu_1\mu_6}\left(g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_3\mu_4\mu_5} + g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_5\mu_7} h_{\mu_2\mu_3\mu_4}\right),$$
$$I^3_{\mu_1\cdots\mu_7} = 2g_{\mu_2\mu_4}\left(g_{\mu_3\mu_5} h_{\mu_1\mu_6\mu_7} + g_{\mu_3\mu_6} h_{\mu_1\mu_5\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_1\mu_4\mu_5}\right) + 2g_{\mu_2\mu_5}\left(g_{\mu_3\mu_6} h_{\mu_1\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_1\mu_4\mu_6}\right.$$
$$\left. + g_{\mu_4\mu_6} h_{\mu_1\mu_3\mu_7} + g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_1\mu_3\mu_6}\right) + 2g_{\mu_2\mu_6}\left(g_{\mu_3\mu_7} h_{\mu_1\mu_4\mu_5} + g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_1\mu_3\mu_5} + g_{\mu_5\mu_7} h_{\mu_1\mu_3\mu_4}\right),$$
$$I^4_{\mu_1\cdots\mu_7} = 2g_{\mu_3\mu_5}\left(g_{\mu_4\mu_6} h_{\mu_1\mu_3\mu_7} + g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_1\mu_2\mu_6}\right) + 2g_{\mu_3\mu_6}\left(g_{\mu_4\mu_7} h_{\mu_1\mu_2\mu_5} + g_{\mu_5\mu_7} h_{\mu_1\mu_2\mu_4}\right) + 2g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_7} h_{\mu_1\mu_2\mu_3},$$
$$H = 2\left(h_{\mu_1\mu_2\mu_3} h_{\mu_4\mu_5\mu_6} + h_{\mu_1\mu_2\mu_4} h_{\mu_3\mu_5\mu_6} + h_{\mu_1\mu_2\mu_5} h_{\mu_3\mu_4\mu_6} + h_{\mu_1\mu_2\mu_6} h_{\mu_3\mu_4\mu_5} + h_{\mu_1\mu_3\mu_4} h_{\mu_2\mu_5\mu_6} + h_{\mu_1\mu_3\mu_5} h_{\mu_2\mu_4\mu_6}\right.$$
$$\left. + h_{\mu_1\mu_3\mu_6} h_{\mu_2\mu_4\mu_5} + h_{\mu_1\mu_4\mu_5} h_{\mu_2\mu_3\mu_6} + h_{\mu_1\mu_4\mu_6} h_{\mu_2\mu_3\mu_5} + h_{\mu_1\mu_5\mu_6} h_{\mu_2\mu_3\mu_4}\right).$$

对于$(*\varphi_G)^2 * J_2$,其构成如下:

$$(*\varphi_G)^2 * J_2 \equiv g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} X^{\underline{\mu_1\mu_2}\mu_3\mu_4} * J_2 = 2(g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3})(g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_4}\mu_5\cdots\mu_8} + h_{\mu_5\mu_6\mu_7} X^{\underline{\mu_1\cdots\mu_4}\mu_5\cdots\mu_7}) = G_2 X^{\mu_1\cdots\mu_8} + I_2 X^{\mu_1\cdots\mu_7}, \tag{16}$$

式中引入的符号经计算为

$$G_2 = G^{\mathrm{I}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{II}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{III}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{IV}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{V}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{VI}}_{\mu_1\cdots\mu_8} + G^{\mathrm{VII}}_{\mu_1\cdots\mu_8},$$

式中

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{I}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_2}[g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_3\mu_5}(g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_7\mu_8} + 2g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_6\mu_7}) + g_{\mu_3\mu_6}(2g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_7} \\
& + 3g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_5\mu_8}) + g_{\mu_3\mu_7}(g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_6} + g_{\mu_4\mu_5} g_{\mu_6\mu_8} + 2g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_8}) + g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_7}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{II}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_3}[g_{\mu_2\mu_4}(2g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_5\mu_6} g_{\mu_7\mu_8} + g_{\mu_5\mu_8} g_{\mu_6\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_5}(2g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_6\mu_7} + 2g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_7\mu_8} \\
& + 3g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_6}(4g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_5\mu_8} + g_{\mu_4\mu_5} g_{\mu_7\mu_8} + 3g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_7}(2g_{\mu_4\mu_5} g_{\mu_6\mu_8} \\
& + 2g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_6} + 3g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_8}(2g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_7} + g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_5\mu_6} + g_{\mu_4\mu_5} g_{\mu_6\mu_7})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{III}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_4}[g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_5\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_2\mu_5}(3g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_6\mu_7} + 3g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_7\mu_8} + 4g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_6}(4g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_7} \\
& + 5g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_8} + 2g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_7\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_7}(4g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_8} + 3g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_8} + 3g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_6}) + g_{\mu_2\mu_8}(3g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_7} \\
& + 2g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_6} + 2g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_7})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{IV}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_5}[g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_6\mu_7} + g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_7\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_4}(2g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_6\mu_7} + 2g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_7\mu_8} \\
& + 3g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_5}(6g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_8} + 5g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_7\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_7}(5g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_8} \\
& + 2g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_6\mu_8} + 4g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_6}) + g_{\mu_2\mu_8}(4g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_6\mu_7} + 3g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_6})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{V}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_6}[g_{\mu_2\mu_3}(3g_{\mu_4\mu_7} g_{\mu_5\mu_8} + 2g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_4}(3g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_7} + g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_7\mu_8} \\
& + 4g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_5}(5g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_8} + 4g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_7}(4g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_8} + 3g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_8} \\
& + 3g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_5}) + g_{\mu_2\mu_8}(2g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_7} + 2g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_5} + 3g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_7})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{VI}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_7}[g_{\mu_2\mu_3}(g_{\mu_4\mu_5} g_{\mu_6\mu_8} + g_{\mu_4\mu_8} g_{\mu_5\mu_6} + 2g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_4}(3g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_8} + 2g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_5\mu_7} \\
& + 2g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_5}(4g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_8} + 3g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_6\mu_8}) + g_{\mu_2\mu_6}(3g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_8} + 2g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_8} \\
& + 2g_{\mu_3\mu_8} g_{\mu_4\mu_5}) + g_{\mu_2\mu_8}(2g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_5} + g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_6})],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{VII}}_{\mu_1\cdots\mu_8} = {}& 2g_{\mu_1\mu_8}[g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_5\mu_7} + g_{\mu_2\mu_4}(g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_5\mu_6} + g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_6\mu_7} + 2g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_5\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_5}(2g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_6} \\
& + 3g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_7}) + g_{\mu_2\mu_6}(g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_7} + 2g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_7} + g_{\mu_3\mu_7} g_{\mu_4\mu_5}) + g_{\mu_2\mu_7} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_5\mu_6}],
\end{aligned}$$

$$I_2 = I^{\mathrm{I}}_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^{\mathrm{II}}_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^{\mathrm{III}}_{\mu_1\cdots\mu_7} + I^{\mathrm{IV}}_{\mu_1\cdots\mu_7},$$

式中

$$\begin{aligned}
I^{\mathrm{I}}_{\mu_1\cdots\mu_7} = {}& 2(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4}) h_{\mu_5\mu_6\mu_7} + 2(g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_5} \\
& + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_5}) h_{\mu_4\mu_6\mu_7} + 2(g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_6}) h_{\mu_4\mu_5\mu_7} \\
& + 2(g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_7} + g_{\mu_1\mu_7} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_7}) h_{\mu_4\mu_5\mu_6} + 2(g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_4\mu_5} + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_4} \\
& + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_5}) h_{\mu_3\mu_6\mu_7} + 2(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_4\mu_6}) h_{\mu_3\mu_5\mu_7} + 2(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_7} \\
& + g_{\mu_1\mu_7} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_4\mu_7}) h_{\mu_3\mu_5\mu_6} + 2(g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_5} + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_5\mu_7}) h_{\mu_3\mu_4\mu_7} \\
& + 2(g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_7} + g_{\mu_1\mu_7} g_{\mu_2\mu_5} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_5\mu_7}) h_{\mu_3\mu_4\mu_6} + 2(g_{\mu_1\mu_7} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_7} \\
& + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_6\mu_7}) h_{\mu_3\mu_4\mu_5},
\end{aligned}$$

$$I^{\mathrm{II}}_{\mu_1\cdots\mu_7} = 2(g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_5} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_4\mu_5}) h_{\mu_2\mu_6\mu_7} + 2(g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_6}$$

$$
\begin{aligned}
&+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_4\mu_6})h_{\mu_2\mu_5\mu_7}+2(g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_3\mu_4}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_4\mu_7})h_{\mu_2\mu_5\mu_6}+2(g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_3\mu_6}\\
&+g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_5\mu_6})h_{\mu_2\mu_4\mu_7}+2(g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_5\mu_7})h_{\mu_2\mu_4\mu_6}\\
&+2(g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_2\mu_4\mu_5}+2(g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}\\
&+g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_4\mu_5})h_{\mu_2\mu_3\mu_7}+2(g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_4\mu_7})h_{\mu_2\mu_3\mu_6}+2(g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_4\mu_7}\\
&+g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_2\mu_3\mu_5}+2(g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_1\mu_7}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_2\mu_3\mu_4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^{\mathrm{III}}_{\mu_1\cdots\mu_7}=&\,2(g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_4}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_4\mu_5})h_{\mu_1\mu_6\mu_7}+2(g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_4}\\
&+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_4\mu_6})h_{\mu_1\mu_5\mu_7}+2(g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_3\mu_4}+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_4\mu_7})h_{\mu_1\mu_5\mu_6}\\
&+2(g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_5}+g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_5\mu_6})h_{\mu_1\mu_4\mu_7}+2(g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_3\mu_5}\\
&+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_5\mu_7})h_{\mu_1\mu_4\mu_6}+2(g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_3\mu_6}+g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_7}+g_{\mu_2\mu_3}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_1\mu_4\mu_5}\\
&+2(g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_4\mu_5})h_{\mu_1\mu_3\mu_7}+2(g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_4\mu_7}\\
&+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_5\mu_7})h_{\mu_1\mu_3\mu_6}+2(g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_1\mu_3\mu_5}\\
&+2(g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_2\mu_7}g_{\mu_5\mu_6})h_{\mu_1\mu_3\mu_4},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I^{\mathrm{IV}}_{\mu_1\cdots\mu_7}=&\,2(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_6})h_{\mu_1\mu_2\mu_7}+2(g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_4\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_5}+g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_5\mu_7})h_{\mu_1\mu_2\mu_6}\\
&+2(g_{\mu_3\mu_4}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_4\mu_6}+g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_4\mu_7})h_{\mu_1\mu_2\mu_5}+2(g_{\mu_3\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_6\mu_7}+g_{\mu_3\mu_7}g_{\mu_5\mu_6})h_{\mu_1\mu_2\mu_4}\\
&+2(g_{\mu_4\mu_7}g_{\mu_5\mu_6}+g_{\mu_4\mu_6}g_{\mu_5\mu_7}+g_{\mu_4\mu_5}g_{\mu_6\mu_7})h_{\mu_1\mu_2\mu_3}.
\end{aligned}
$$

由于扩展的 knot 不变量基本片段十分有限，本文用混合的方式求得的如上三个扩展 knot 态的具体表式，对于研究态的哈密顿不变性和 M-恒等式的满足，计算上将得到进一步的应用，并带来很大方便. 下面将证明上述三个扩展的 knot 态，在微分同胚群非平庸线性表示下是不变的.

5. 构造的扩展 knot 态满足齐次 D-约束的证明

我们知道，D-约束对扩展圈表象中抽象波函数的作用等于其宗量的一个变更[9]：

$$C_{ax}\psi(X)=\psi(\mathscr{F}_{ab}(x)\times X^{bx}),\tag{17}$$

式中 $\mathscr{F}_{ab}(x)$ 表示的是下列群代数中的元素：

$$\mathscr{F}_{ab}(x)=\delta_{1,n(\mu)}\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}(x)+\delta_{2,n(\mu)}\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}(x),$$

式中

$$\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}(x)=\mathscr{F}^{a_1x_1}_{ab}(x)=\delta^{ad}_{ab}\partial_d\delta(x_1-x)=-\varepsilon_{abc}g^{cx\mu_1},$$

$g^{cx\mu_1}$ 为 Chern-Simons 二点传播子的逆变张量，且有 $g^{cx\mu_1}(x)=\varepsilon^{ca_1k}\partial_k\delta(x-x_1)$；同时

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}^{\mu_1\mu_1}_{ab}(x)&=\mathscr{F}^{a_1x_1,a_2x_2}_{ab}(x)\\
&=\delta^{a_1a_2}_{ab}\delta(x_1-x)\delta(x_2-x).
\end{aligned}
$$

扩展的 knot 态在微分同胚群非平庸表示下的不变性，要求其满足齐次 D-约束的作用：

$$C_{ax}\varphi(X)=0.\tag{18}$$

目前，在 Ashtekar 正则非微扰量子广义相对论引力的扩展圈表象的研究中，找到的满足齐次 D-约束扩展的 knot 态并不多. 下面证明本文所构造的三个扩展的 knot 不变量均满足(18)式.

对于态 $(*J_2)^2$，由(15)和(17)式知，D-约束对其作用为

$$
\begin{aligned}
C_{ax}(*J_2)^2=&\,\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}G_1X^{(bx\mu_2\cdots\mu_8)_c}+\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}I_1X^{(bx\mu_2\cdots\mu_7)_c}\\
&+\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}HX^{(bx\mu_2\cdots\mu_6)_c}+\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}G_1X^{(bx\mu_3\cdots\mu_8)_c}\\
&+\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}I_1X^{(bx\mu_3\cdots\mu_7)_c}+\mathscr{F}^{\mu_1\mu_2}_{ab}HX^{(bx\mu_3\cdots\mu_6)_c}.
\end{aligned}\tag{19}
$$

经计算，(19)式等号右端第一项

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{F}^{\mu_1}_{ab}G_1X^{(bx\mu_2\cdots\mu_8)_c}\\
&=-2\varepsilon_{abc}[g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_5}g_{\mu_5\mu_6}\\
&\quad\times(\Phi^{cx}_{x_1}-\Phi^{cx}_{x_2})+g_{\mu_1\mu_3}g_{\mu_2\mu_5}\\
&\quad\times g_{\mu_4\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1}-\Phi^{cx}_{x_3}+\Phi^{cx}_{x_4}-\Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_5}g_{\mu_3\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1}+\Phi^{cx}_{x_2}+\Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad-\Phi^{cx}_{x_4}-\Phi^{cx}_{x_5}-\Phi^{cx}_{x_6})+g_{\mu_1\mu_5}g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_6}\\
&\quad\times(\Phi^{cx}_{x_1}+\Phi^{cx}_{x_2}-\Phi^{cx}_{x_4}-\Phi^{cx}_{x_5})\\
&\quad+g_{\mu_1\mu_6}g_{\mu_2\mu_4}g_{\mu_3\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1}-\Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad+g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_6}g_{\mu_3\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_2}+\Phi^{cx}_{x_3}-\Phi^{cx}_{x_5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3})\\
&+ g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_4}(\Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4})\\
&+ g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5})\\
&+ g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})]\\
&\times X^{(bx\mu_1\cdots\mu_6)_c} = A. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

现在引入下列证号：

$$
\begin{aligned}
B = -2(&g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4[ax}g_{bx]\mu_5} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3[ax}g_{bx]\mu_5}\\
&+ g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_5} + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3[ax}g_{bx]\mu_4}\\
&+ g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_4} + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_3}\\
&+ g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4[ax}g_{bx]\mu_6} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3[ax}g_{bx]\mu_6}\\
&+ g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_6} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5[ax}g_{bx]\mu_6}\\
&+ g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_5} + g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_4}\\
&+ g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_3} + g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_2}\\
&+ g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_6}) X^{(bx\mu_1\cdots\mu_6)_c},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C = -2(&g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_2} h_{\mu_3\mu_4\mu_5} + g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_3} h_{\mu_2\mu_4\mu_5}\\
&+ g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_4} h_{\mu_2\mu_3\mu_5} + g_{\mu_1[ax}g_{bx]\mu_5} h_{\mu_2\mu_3\mu_4}\\
&+ g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_3} h_{\mu_1\mu_4\mu_5} + g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_4} h_{\mu_1\mu_3\mu_5}\\
&+ g_{\mu_2[ax}g_{bx]\mu_5} h_{\mu_1\mu_3\mu_4} + g_{\mu_3[ax}g_{bx]\mu_4} h_{\mu_1\mu_2\mu_5}\\
&+ g_{\mu_3[ax}g_{bx]\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_4} + g_{\mu_4[ax}g_{bx]\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_3})\\
&\times X^{(bx\mu_1\cdots\mu_5)_c},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D = 2\varepsilon_{abc}[&g_{\mu_1\mu_2} h_{\mu_3\mu_4\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_2}) + g_{\mu_1\mu_3} h_{\mu_2\mu_4\mu_5}\\
&\times(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_3}) + g_{\mu_1\mu_4} h_{\mu_2\mu_3\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_4})\\
&+ g_{\mu_1\mu_5} h_{\mu_2\mu_3\mu_4}(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_5}) + g_{\mu_2\mu_3} h_{\mu_1\mu_4\mu_5}\\
&\times(\Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3}) + g_{\mu_2\mu_4} h_{\mu_1\mu_3\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_4})\\
&+ g_{\mu_2\mu_5} h_{\mu_1\mu_3\mu_4}(\Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_5}) + g_{\mu_3\mu_4} h_{\mu_1\mu_2\mu_5}\\
&\times(\Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4}) + g_{\mu_3\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_4}(\Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_5})\\
&+ g_{\mu_4\mu_5} h_{\mu_1\mu_2\mu_3}(\Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5})] X^{(bx\mu_1\cdots\mu_5)_c},
\end{aligned}
$$

则(19)式等号右端第二项

$$\mathscr{T}^{\mu_1}_{ab} I_1 X^{(bx\mu_2\cdots\mu_7)_c} = B - D - A, \qquad (21)$$

第三项

$$\mathscr{T}^{\mu_1}_{ab} H X^{(bx\mu_2\cdots\mu_6)_c} = C + D, \qquad (22)$$

第四项

$$\mathscr{T}^{\mu_1\mu_2}_{ab} G_1 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_8)_c} = -B, \qquad (23)$$

第五项

$$\mathscr{T}^{\mu_1\mu_2}_{ab} I_1 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_7)_c} = -C, \qquad (24)$$

第六项

$$\mathscr{T}^{\mu_1\mu_2}_{ab} H X^{(bx\mu_3\cdots\mu_6)_c} = 0, \qquad (25)$$

从而有(20)+(21)+(22)+(23)+(24)+(25)式，得

$$C_{ax}(*J_2)^2 = 0.$$

对于态$(*\varphi_G)^2 * J_2$，由(16)和(17)式知，D-约束对其作用为

$$
\begin{aligned}
C_{ax}[(*\varphi_G)^2 * J_2] = &\mathscr{T}^{\mu_1}_{ab} G_2 X^{(bx\mu_2\cdots\mu_8)_c}\\
&+ \mathscr{T}^{\mu_1}_{ab} I_2 X^{(bx\mu_2\cdots\mu_7)_c}\\
&+ \mathscr{T}^{\mu_1\mu_2}_{ab} G_2 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_8)_c}\\
&+ \mathscr{T}^{\mu_1\mu_2}_{ab} I_2 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_7)_c}. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

经计算，(26)式等号右端第一项

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{T}^{\mu_1}_{ab} G_2 X^{(bx\mu_2\cdots\mu_8)_c}\\
&= -2\varepsilon_{abc}[g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1}\\
&\quad - \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3} + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad - \Phi^{cx}_{x_4} + \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1}\\
&\quad + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3} + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_5}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_4}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_6}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_6}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4} + \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_5}(\Phi^{cx}_{x_1} - \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_5\mu_6}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3} - \Phi^{cx}_{x_4} + \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})\\
&\quad + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_4}(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} + \Phi^{cx}_{x_3}\\
&\quad - \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6}) + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_5}\\
&\quad \times(\Phi^{cx}_{x_1} + \Phi^{cx}_{x_2} - \Phi^{cx}_{x_3} + \Phi^{cx}_{x_4} - \Phi^{cx}_{x_5} - \Phi^{cx}_{x_6})]\\
&\quad \times X^{(bx\mu_1\cdots\mu_6)_c} = E, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

第二项

$$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1} I_2 X^{(bx\mu_2\cdots\mu_7)_c} = F - E, \tag{28}$$

式中

$$\begin{aligned}
F = &-2[(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} \\
&+ g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_2\mu_4}) g_{\mu_5[ax} g_{bx]\mu_6} + (g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_5} \\
&+ g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_5}) g_{\mu_4[ax} g_{bx]\mu_6} \\
&+ (g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_6}) \\
&\times g_{\mu_4[ax} g_{bx]\mu_5} + (g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_5} \\
&+ g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_4\mu_5}) g_{\mu_3[ax} g_{bx]\mu_6} + (g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_6} \\
&+ g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_4\mu_6}) g_{\mu_3[ax} g_{bx]\mu_5} \\
&+ (g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_2\mu_5} + g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_2\mu_6} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_5\mu_6}) \\
&\times g_{\mu_3[ax} g_{bx]\mu_4} + (g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_5} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_4\mu_5} \\
&+ g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_3\mu_4}) g_{\mu_2[ax} g_{bx]\mu_6} + (g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_3\mu_4} \\
&+ g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_4\mu_6}) g_{\mu_2[ax} g_{bx]\mu_5} \\
&+ (g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_3\mu_5} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_5\mu_6}) \\
&\times g_{\mu_2[ax} g_{bx]\mu_4} + (g_{\mu_1\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_5\mu_6} \\
&+ g_{\mu_1\mu_6} g_{\mu_4\mu_5}) g_{\mu_2[ax} g_{bx]\mu_3} + (g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_4} \\
&+ g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_5} + g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_5}) g_{\mu_1[ax} g_{bx]\mu_6} \\
&+ (g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_3\mu_6} + g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_4}) \\
&\times g_{\mu_1[ax} g_{bx]\mu_5} + (g_{\mu_2\mu_3} g_{\mu_5\mu_6} + g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_3\mu_5} \\
&+ g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_3\mu_6}) g_{\mu_1[ax} g_{bx]\mu_4} + (g_{\mu_2\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} + g_{\mu_2\mu_4} g_{\mu_5\mu_6} \\
&+ g_{\mu_2\mu_6} g_{\mu_4\mu_5}) g_{\mu_1[ax} g_{bx]\mu_3} + (g_{\mu_3\mu_6} g_{\mu_4\mu_5} + g_{\mu_3\mu_5} g_{\mu_4\mu_6} \\
&+ g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_6}) g_{\mu_1[ax} g_{bx]\mu_3}] X^{(bx\mu_1\cdots\mu_6)_c},
\end{aligned}$$

第三项

$$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2} G_2 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_8)_c} = -F, \tag{29}$$

第四项

$$\mathscr{F}_{ab}^{\mu_1\mu_2} I_2 X^{(bx\mu_3\cdots\mu_7)_c} = 0, \tag{30}$$

从而有(27)+(28)+(29)+(30)式，得

$$C_{ax}[(*\varphi_G)^2 * J_2] = 0.$$

对于态 $\varphi_G * J_2$，证明是类似的，且计算较简单，在此从略.

本文求得在微分同胚变换下满足齐次 D-约束的扩展的纽结不变量引力态 $\varphi_G * J_2$，$(*J_2)^2$ 和 $(*\varphi_G)^2 * J_2$ 的具体表式，并给出了齐次性的具体证明结果.引力态在哈密顿约束下不变性的具体表式虽与 D-约束的不同，但态的不变性表式的中间片段与本文 D-约束下的片段的表式有许多是相同或相近的[8].如上不变性具体证明的表式，将被应用在态的重组以及约束下非齐次性消除方法的研究中.

[1] Ashtekar A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 2244

[2] Ashtekar A 1987 *Phys. Rev.* D **36** 1587

[3] Rovelli C and Smolin L 1990 *Nucl. Phys.* B **331** 80

[4] Rovelli C and Smolin L 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 1155

[5] Brügmann B，Gambini R and Pullin J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 431

[6] Griego J 1996 *Nucl. Phys.* B **473** 291

[7] Brügmann B，Gambini R and Pullin J 1993 *Gen. Rel. Grav.* **25** 1

[8] Shao C G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 619 (in Chinese)[邵常贵等 2000 物理学报 **49** 619]

[9] Bartolo C D，Gambini R and Griego J 1995 *Phys. Rev.* D **51** 502

The extended knot states under the representation of the diffeomorphism group

Shao Chang-Gui[1)] Xiao Jun-Hua[1)] Shao Liang[2)] Shao Dan[2)] Chen Yi-Han[1)] Pan Gui-Jun[1)]
[1)] (*Institute of Theoretical Physics*, *Hubei University*, *Wuhan* 430062, *China*)
[2)] (*Department of Physics*, *Ibaraki University*, *Mito* 310, *Japan*)
(Received 19 June 2000; revised manuscript received 13 August 2001)

Abstract

After giving a non-trivial representation of the diffeomorphism group, using the extended Gauss knot invariant φ_G and the second coefficient of the Jones polynomial J_2 as the basic blocks, we have constructed the extended knot invariant gravity states $\varphi_G * J_2$, $(*J_2)^2$ and $(*\varphi_G)^2 * J_2$. They satisfy the homogeneous diffeomorphism constraint (D-constraint). And we gave a detailed demonstration for them.

Keywords: diffeomorphism constraint, extended knot invariant, quantum gravity state
PACC: 0460