

# 一种“类耗散系统”中的“类 V 型阵发”<sup>\*</sup>

汪颖梅 王旭明 陈贺胜 王文秀 赵金刚 何大韧<sup>†</sup>

(扬州大学复杂性科学研究中心 扬州 225002)

(2001 年 8 月 11 日收到 2001 年 11 月 17 日收到修改稿)

一类不连续不可逆保面积映象可以展示类似耗散的行为,因此可称其为“类耗散系统”。在一种类耗散系统中观察到了椭圆周期轨道及其周围的椭圆岛与映象不连续边界碰撞而消失的现象。周期轨道消失后,经过一系列过渡椭圆周期轨道之后,系统的行为由一个混沌类吸引子主导。在混沌类吸引子刚刚出现时,混沌时间序列呈现层流相与湍流相的无规交替。这一切都与不连续耗散系统中发生的 V 型阵发的相应性质十分相似,因此可称为“类 V 型阵发”。然而,当混沌类吸引子刚刚出现时,仅可以找到最后一个过渡椭圆岛的“遗迹”,并不存在它的“鬼魂”,因此类 V 型阵发不遵从 V 型阵发的特征标度规律。反之,混沌类吸引子的鬼魂却存在于最后一个过渡椭圆周期轨道的类瞬态过程中,因此在类 V 型阵发导致混沌运动的临界点之前,由此“类瞬态混沌奇异集”中逃逸的规律就成为标志这一种临界现象的标度律。这与 V 型阵发又根本不同。

关键词:类耗散性,类混沌吸引子,类 V 型阵发

PACC: 0545

## 1. 引 言

阵发是耗散系统由周期运动向混沌运动转变的一种普遍方式。阵发的主要特征是在它发生的参数临界点附近的混沌时间序列中存在类似原来周期运动的、与标志混沌运动的“湍流相”无规交替出现的“层流相”。在一个固定参数值下,每次出现的层流相长度是无规的,然而平均层流相长度却是一定的,而且随参数的变化遵从确定标度律。随参数向临界值的靠近,平均层流相将越来越长,最后在临界点趋于无限长<sup>[1]</sup>。相应地,在相空间中已消失或已失稳的周期轨道原来所在的位置附近一定仍旧存在将迭代缓慢吸引向此区域,或缓慢由此区域排斥离去的拓扑结构。因此我们经常称在阵发混沌出现后已经消失的周期运动的“鬼魂”仍旧存在。在某种意义上,这鬼魂在临界点附近仍可能主宰系统的行为。

由于不断有新型的阵发被发现,在过去的 20 多年里它一直是研究的热点之一。现在公认的阵发类型有 6 种,即传统的 I, II, III 型阵发<sup>[2,4]</sup>、V 型阵发<sup>[3,4,1]</sup>、激变导致阵发<sup>[5-7,1]</sup>和开关型阵发<sup>[8]</sup>。其中只有 I, II, III, IV 4 个型描述由周期运动向混沌运

动的转变。V 型是由分段光滑系统中特有的边界碰撞分岔(即一个稳定的周期轨道与系统函数的不光滑集合碰撞而失稳)<sup>[9,1]</sup>引起的。标志这种向混沌转变的临界现象的主要规律是平均层流相长度的对数标度律<sup>[3,4,1]</sup>

$$\langle l \rangle \propto \ln \epsilon \quad (\epsilon \rightarrow 0), \quad (1)$$

其中  $\langle l \rangle$  为平均层流相长度,  $\epsilon = |p - p_c|$  ( $p$  为控制参数,  $p_c$  为其临界值), 以及李雅普诺夫指数谱的对数倒数标度律<sup>[10,11,1]</sup>

$$\lambda \propto 1/\ln \epsilon \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (2)$$

一个有趣的事实是:在耗散系统中广泛存在的阵发现象却从来没有在保守系统中观察到。例如,在耗散系统中具有极多例证的 I 型阵发对应的切分岔在保守系统中广泛存在<sup>[12]</sup>,但是在已知的系统中周期轨道经过切分岔失稳后却找不到任何原周期运动的鬼魂,因此也不能定义任何类型的阵发。现在看起来这个局限将在既不连续又不可逆的保守系统中被打破。近几年来,这类不遵从 Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) 定理的系统受到关注。例如,文献 [13, 14] 报道了描述一种周期驱动的一维台球模型的不连续保面积映象的特性,文献 [15] 报道了一个有过电压保护的电子张弛振子的既不连续又不可逆的保面积映

\* 国家自然科学基金(批准号:19975039)资助的课题。

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: drhe@mail.yzu.edu.cn

象的特征行为;文献 16 报道了文献 15 描述系统的一个简化模型的特征行为. 这后两个系统的共同点是系统函数的不连续性所导致的不可逆性, 以及这种不可逆性导致的类似耗散的动力学行为. 在这种被称为“类耗散”的系统中, 迭代可能被吸引向某些椭圆岛(“规则类吸引子”), 然而在达到椭圆岛后, 迭代又会严格遵从保守系统的规律. 实际上, 在系统函数的不连续点上, 系统的突变行为一般不遵从能量守恒. 这样, 在这种系统的一段时间发展过程中, 绝大部分时间是能量守恒的, 但在一些突变点也可能发生能量的突变. 所以类耗散系统实际是介于保守与耗散之间的系统. 这样的系统以往还没有引起足够的注意. 文献 15, 16 已经对这种类耗散行为作了仔细的讨论. 本文将报道在文献 16 所讨论的系统中发现的一种类似于耗散系统中 V 型的阵发, 我们称其为“类 V 型阵发”.

## 2. 系 统

由于文献 15, 16 中已有对相应系统的详细描述, 我们在此仅极其简略地介绍系统. 在文献 15 报道的过电压保护电子张弛振子中, 一个电容器通过两个电子可控开关不断进行充电和放电, 充电电流远大于放电电流. 加在电容器上的电压以线性规律在一个受到正弦调制的上阈值和一个受到充、放电处的上阈值调制信号相位影响而变化的下阈值之间作张弛振荡. 超过某一阈值  $E$  的上阈值调制信号将(由于电压过高)受到保护, 而使上阈值变为恒等于  $E$  的常量. 由此可以得到如下描述此系统的映象<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_{1x} = x_n + y_{n+1} + \frac{a}{b} \\ y_{n+1} = f_{1y} = y_n - \frac{\sin 2\pi x_n}{b} \end{cases} \pmod{.1} \quad x_n \notin F, \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_{2x} = x_n + y_n + \frac{a+c}{b} \\ y_{n+1} = f_{2y} = y_n + 2x_n \end{cases} \pmod{.1} \quad x_n \in F, \quad (4)$$

其中变量  $x_n$  为  $t_n$  时刻张弛振荡达到上阈值时调制信号的相位,  $y_n$  为描述下阈值位置变化的变量,  $a, b, c$  为常数,  $F = \left[ 0.5 + \frac{\arcsin(c)}{2\pi}, 1 - \frac{\arcsin(c)}{2\pi} \right]$  为

存在过电压保护的上阈值调制信号位相区域. 映象 (3) 和 (4) 的逆映象分别为

$$\begin{cases} x_n = f_{1x}^{-1} = x_{n+1} - y_{n+1} - \frac{a}{b} \\ y_n = f_{1y}^{-1} = y_{n+1} + \frac{\sin 2\pi x_n}{b} \end{cases} \quad x_n \notin F, \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_n = f_{2x}^{-1} = -x_{n+1} + y_{n+1} + \frac{a+c}{b} \\ y_n = f_{2y}^{-1} = y_{n+1} - 2x_n \end{cases} \quad x_n \in F. \quad (6)$$

由于选择逆映象 (5) 还是 (6) 取决于  $x_n$  而不是  $x_{n+1}$ , 所以每个  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  可能有两个分别由映象 (5) 或 (6) 决定的逆象, 亦即在某些相空间区域中可能出现两个相区域向一个相区域塌缩的类耗散行为.

文献 16 讨论了上述系统的一个简化模型, 它由一个 De Vogelaere 平方映象<sup>[12]</sup>和一个线性映象不连续地联合构成. De Vogelaere 平方映象描述相空间中一个浸入于混沌海之中的椭圆岛的演化, 它可看作是对映象 (3) 那样的标准映象的混沌海中一个椭圆岛附近行为的描述<sup>[12]</sup>, 所以可以认为简化后的模型仍然有类似于原电路模型的实际背景. 简化模型为

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{1x}(x_n, y_n) = px_n - (1-p)x_n^2 - y_n \\ y_{n+1} = g_{1y}(x_n, y_n) = x_n - px_{n+1} + (1-p)x_{n+1}^2 \end{cases} \quad x_n \geq f, \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = g_{2x}(x_n, y_n) = x_n + c \\ y_{n+1} = g_{2y}(x_n, y_n) = y_n + c \end{cases} \quad x_n < f, \quad (8)$$

其中  $p, c, f$  均为实数,  $x_n = f$  为系统的不连续边界  $\{(x, y) |_{x=f}\}$  的  $x$  坐标值. 容易证明映象 (7) (8) 的联合映象也有不连续性导致的不可逆性, 以及由此引起的类耗散性. 需要指出, 平方映象从椭圆岛以外的许多初值点出发的迭代会趋向无穷远, 本文对这些发散的迭代不予讨论.

显然, 线性映象 (8) 不可能单独具有周期轨道, 它只能与映象 (7) 联合形成“跨边界周期轨道”.

## 3. 类 V 型阵发

### 3.1. 引起周期轨道失稳的边界碰撞分岔以及过渡的联合周期轨道

文献 [16] 已经说明, 当  $f \leq -0.2, p = -0.98$  时, 不连续边界没有与任何椭圆轨道碰撞. 联合映象

(7) 和 (8) 的行为与 De Vogelaere 平方映象 (7) 单独存在时的情况相似, 仍将展示位于 (0, 0) 处的椭圆不动点周围的一个椭圆岛. 与映象 (7) 单独存在时的不同之处是存在类耗散现象. 除了发散的初值之外, 从所有岛外的初值出发的迭代都被吸引向这个椭圆岛. 因此它被称为一个“规则类吸引子”. 本文保持  $f = -0.2$  不变, 令参数  $p$  减小, 当参数  $p = -1.0$  时, 椭圆点 (0, 0) 失稳并发生倍周期分岔, 出现的两个新椭圆点在  $y = 0$  轴上<sup>[12]</sup>.  $p$  进一步减小时两个椭圆点周围的椭圆岛逐渐分开并远离, 其中一个椭圆点及其周围的椭圆岛移向边界, 如图 1 所示, 它的外层周期或准周期环随  $p$  减小, 不断与边界碰撞而破裂. 与此同时, 在这两个椭圆岛外出现许多高周期的跨边界周期轨道及相应的跨边界链状椭圆岛. 它

们都是“类共存”的规则类吸引子, 各自具有自己的“类吸引域”. 图 1(b) 更清楚地显示了左边椭圆岛附近的两个岛链. 如图 1 所示, 在同一组参数下共存的岛链很多, 参数的很小变化就使它们中的某一个与边界碰撞而消失, 同时又有新的岛链出现, 这使相空间图像及其变化相当复杂. 容易解析地得到, 当  $p = p_0 \approx -1.001539$  时, 上述位于  $y = 0$  轴上左边的椭圆点与不连续边界碰撞, 本文所研究的主要周期轨道及其倍周期分岔序列同时经由一个边界碰撞分岔<sup>[9]</sup>而消失. 然而, 正如许多不连续耗散系统中所展示的<sup>[17, 18, 1]</sup>, 混沌运动并不在此分岔后马上出现, 中间还要经过一系列的过渡周期轨道. 这些过渡周期轨道常常按照一定的规律排列, 形成所谓的“V 型阵发锁相前奏阶梯”. 这是 V 型阵发的另一个特征.

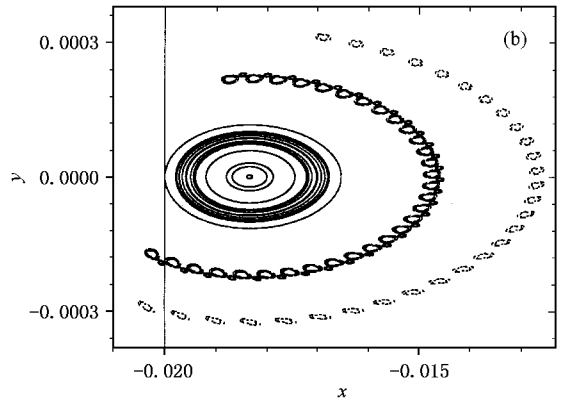
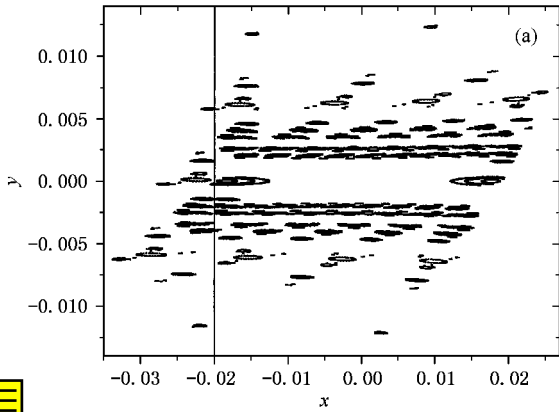


图 1 (a) 为  $p = -1.0013$ ,  $f = -0.02$ ,  $c = 0.006$  时, 在  $x \in [-0.015, 0.01]$ ,  $y \in [-0.015, 0.015]$  相区均匀选取  $10 \times 10$  个初值, 对每个初值去掉初始的 500000 迭代, 然后记录 1000 次得到的相图. 图中部显示文中所述的由倍周期分岔产生的 2 周期椭圆岛, 其余部分显示跨边界的周期岛链. (b) 为 (a) 图相应部分的放大

当  $p_c < p < p_0$  时 ( $p_c \approx -1.00697995$ ), 上述的跨边界过渡周期轨道及其椭圆岛链主宰了相空间, 它们的共存和交替情况相当复杂. 其中所谓的“1 循环周期轨道”可以表示为

$$g_1^{(n'_1)} g_2^{(n_1)}(D) = D, \quad (9)$$

表示由椭圆周期点  $D = (x_d, y_d)$  出发的轨道在  $x < f$  相区内迭代  $n_1$  步到达相区  $x > f$ , 迭代  $n'_1$  步后返回到  $D$ . 这种周期轨道的稳定性由是否满足

$$\left| \text{Tr} \left[ \prod_{j=n_1+1}^{n_1+n'_1} J_1(x_j, y_j) \right] \prod_{i=1}^{n_1} J_2(x_i, y_i) \right| < 2 \quad (10)$$

来判断, 其中  $J_1(x_j, y_j)$ ,  $J_2(x_i, y_i)$  分别为映象函数 (7) (8) 在周期点  $(x_j, y_j)$  和周期点  $(x_i, y_i)$  处的雅可比矩阵. 类似地, 所谓“ $k$  循环的周期轨道”可以表

示为

$$\prod_{i=1}^k g_1^{(n'_i)} g_2^{(n_i)}(D) = D, \quad (11)$$

轨道的稳定性判据与 (10) 式类似. 对这些过渡周期轨道及其椭圆岛链的共存和交替构成的复杂图像作进一步的解析或图像描述都相当困难. 本文将在 3.2 节中定义一个新物理量, 以便给出一个简明的图像描述.

当  $p = p_c \approx -1.00697995$  时, 最后一个过渡周期轨道与边界碰撞而消失. 一个混沌类吸引子出现并主宰了系统的动力学行为. 对此将在 3.3 节中讨论.

### 3.2. 穿越数和类 V 型阵发锁相前奏阶梯

希望能够定义一个类似于圆映象中的绕数那样的量来描述每个锁相于一定参数区间的椭圆周期轨道及其周围的椭圆岛,从而画出一个类似于圆映象中的魔梯那样的图像,来刻画上述的过渡周期轨道及其椭圆岛链的共存和交替构成的复杂图像<sup>[19,20,41]</sup>. 然而这样做有困难. 首先,目前研究的系统并非圆映象,因此不能定义绕数;其次,即使能够定义绕数,也可以说明它不具有可逆圆映象中绕数具备的那些性质,因此并不能预言或解释魔梯的出现<sup>[19,20,41]</sup>. 而且,即便能够定义一个完全类似于绕数的量,那么同一椭圆岛链上的各个迭代轨道将具有差异很大的绕数,这将使计算十分复杂困难,所得到的图像也异常复杂,难于表示所希望的物理意义. 我们选择了定义一个远比绕数含混的新物理量,并命名它为“穿越数”. 以下将对此量的合理性进行分析,并且说明对于所讨论的一类系统,使用它所得到的图像可以简明地描述过渡周期轨道及其椭圆岛链的共存和交替构成的复杂图像.

一个迭代轨道的穿越数定义为

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (12)$$

其中  $N$  为总的迭代次数,  $N_i$  为  $N$  次迭代中轨道从线性映射区向平方映射区穿越边界的次数. 可以说明穿越数具有如下性质:

(1) 一个周期轨道对应的穿越数极限一定存在,且一定为有理数.

若此周期轨道由  $D_1, D_2, \dots, D_p$  这  $p$  个周期点组成,从  $D_1$  到  $D_p$  迭代  $p$  次的过程中,按上述规定方向穿越边界  $q$  次,则在迭代  $N$  步、穿越边界  $N_i$  次后,一定存在正整数  $m$ ,使  $N = mp + l$  ( $0 < l < p$ ),同时  $N_i = mq + k$  ( $0 < k < q$ ),因此有

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{mq + k}{mp + l} = \frac{q}{p}, \quad \text{得证.} \quad (13)$$

(2) 容易提出反例,证明一个有理穿越数并不一定对应一个周期轨道,因此不一定存在对应于所有有理数的、按照 Farey 树结构排列<sup>[17,19,20,41]</sup>的周期轨道锁相阶梯,即魔梯.

(3) 如(1)所证,周期轨道的穿越数一定是有理数,所以无理数的穿越数一定不对应周期轨道. 下面可以说明,在上节所述的完全由椭圆周期轨道主

宰的参数区域中,虽然存在椭圆岛上的无理环(即准周期轨道),但所有的穿越数一定都是有理数,因此不用考虑无理的穿越数.

(4) 显然,若有两套不同位置的  $p$  个周期点  $D_1, D_2, \dots, D_p$  组成的两个周期轨道,它们每周期内都按规定方向穿越边界  $q$  次,但穿越的顺序不同,则穿越数仍相同. 所以穿越数与周期轨道之间的对应一般而言是“简并”的,一个穿越数可能对应许多周期轨道,这说明穿越数是一个比绕数远为粗糙、含混的周期轨道描述量. 然而,如下所述,对现在讨论的一类情况,可能正好由于这种含混性才给出所需要的、具有鲜明物理意义的图像.

(5) 同一个椭圆岛链上的所有迭代轨道均具有与岛链中心的椭圆周期轨道相同的有理穿越数. 说明如下:

1) 若  $D_1, D_2, \dots, D_p$  椭圆周期轨道周围的一个有理环由  $p \times r$  个周期点  $D_1^1, D_2^1, \dots, D_p^1, D_1^2, D_2^2, \dots, D_p^2, \dots, D_1^r, D_2^r, \dots, D_p^r$  组成,每在此轨道上迭代  $p$  步,一定仍按上述规定方向穿越边界  $q$  次. 因此(1)中的证明照样成立.

2) 以上结论完全可以推广到  $D_1, D_2, \dots, D_p$  椭圆周期轨道周围的一个无理环. 显然,(1)中的证明是否成立只决定于迭代  $p$  步过程中是否一定按上述规定方向穿越边界  $q$  次,而与迭代  $p$  步后是否回到初始点无关.

这样,在穿越数-参数平面上,每个穿越数锁相台阶就表示一个上述的跨边界过渡周期轨道及其椭圆岛链的稳定范围. 所有的穿越数锁相台阶就构成了上述的类 V 型阵发锁相前奏阶梯. 当然,由于上述的穿越数的简并性,其中对应同一个穿越数的少数台阶可能并非同一个椭圆岛链,却在图中表示为同一个. 然而,由于并不能期望存在像单调圆映象中那样的魔梯,这并不严重影响类 V 型阵发锁相前奏阶梯的图像. 这可能是可以得到的最简化又最鲜明的图像.

图 2(a) 是用(12)式在  $p \in [-1.008, -1.0]$  参数区间数值计算所得的类 V 型阵发锁相前奏阶梯. 如前所述,在此参数区内存在广泛的类吸引子共存,因此穿越数锁相台阶有严重的重叠. 在图的右部分重叠的穿越数锁相台阶非常多,有些地方形成了看起来像黑块或斜曲线的构造,如箭头所指部分. 然而如图 2(b) (图 2(a) 箭头所指部分的放大) 所示,这些部分只是特别密集的台阶而已. 随  $p$  进

一步减小,越来越多的岛链消失,新产生的岛链越来越少,最后只剩下  $W = 1/8$  的一个岛链. 在临界参数值  $p = p_c \cong -1.00697995$  处,它也与边界碰撞,取而代之的是一个混沌类吸引子. 同时,注意图 2(a)中最低的一个  $W = 0$  的台阶,它对应上述 De Vogelaere

平方映象中由倍周期分岔而来的 2 周期轨道及相应的椭圆岛. 台阶的左端点与这个 2 周期轨道碰撞边界的参数值  $p_0$  完全相符. 我们仔细地研究了大多数穿越数锁相台阶终结的机理,结果说明它们都由于相应周期轨道的一个周期点与不连续边界碰撞而消失.

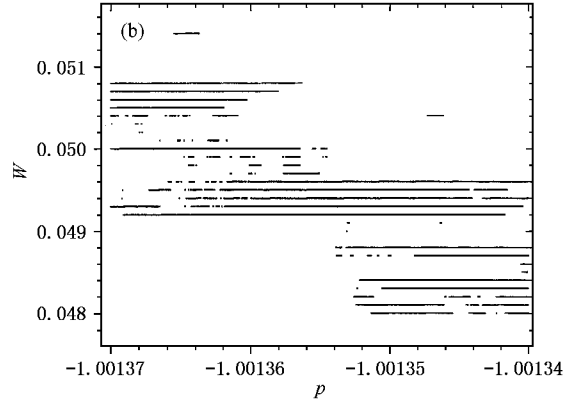
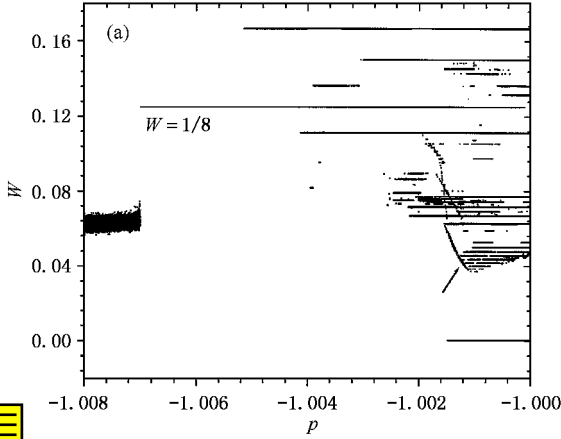


图 2 (a)为根据(12)式计算所得的类 V 型阵发锁相前奏阶梯  $f = -0.02, c = 0.006$ . 对应每个  $p$  值的穿越数数据由在  $x \in [-0.015, 0.01], y \in [-0.015, 0.015]$  的相区均匀选取  $20 \times 20$  个初值,去掉从每个初值出发的初始  $3 \times 10^7$  迭代,然后纪录穿越次数  $N_i = 2 \times 10^4$  的迭代而得到.(b)为(a)图中箭头所指部分的放大

### 3.3. 类 V 型阵发后出现的类混沌吸引子和混沌时间序列

图 3 给出上述  $W = 1/8$  的 8 周期岛链与不连续边界刚碰撞消失之后出现的类混沌吸引子. 进一步计算说明这时所有不发散的初值都被吸引向这个类混沌吸引子. 为了集中于阵发这个主题,本文不进一步讨论类混沌吸引子的各种性质(将另文专题讨论).

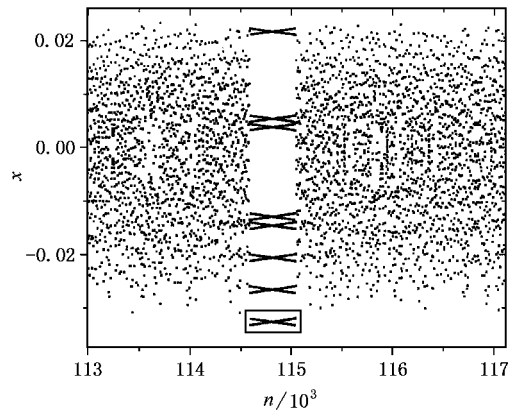


图 4  $p = -1.0069994, f = -0.02, c = 0.006$  时,从初值  $(-0.035, -0.1)$  出发,忽略 608000 次初始迭代,然后纪录如图上横坐标所示的迭代得到的混沌时间序列. 方框指出这时的时间序列中若干类似  $8 \times r$  周期运动的层流相中的一支

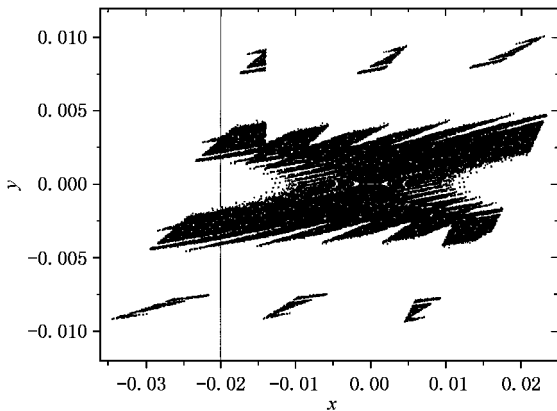


图 3  $p = -1.0069994, f = -0.02, c = 0.006$  时由初始点  $(-0.035, -0.0075)$  出发去掉 1000 次初始迭代,然后记录 20000 次所得到的混沌类吸引子

图 4 给出  $p > p_c$  同时  $p \approx p_c$  时的一个混沌时间序列. 它显示了时间序列中对应混沌运动的湍流相和对应刚刚消失的  $W = 1/8$  岛链上某个 KAM 环的层流相. 这里出现层流相的机理不难理解. 由于这已消失的岛链与类混沌吸引子存在交集(如图 5(b)及下文所示),当类混沌吸引子上的迭代落入此交集中位于平方映象(7)的定义域内的一点时,迭代将在此

点相应的 8 个 KAM 环上位于平方映象定义域内的部分中运行一段时间,直到越过边界进入线性映象(8)的定义域为止.越过边界后迭代将立即离开此 KAM 环而进入湍流相.显然,这里不存在任何将迭代缓慢吸引向此 KAM 环临界区域,或缓慢由此区域排斥离去的拓扑结构,因此层流相将始终是十分短的,它的平均长度不会随参数逼近临界点而变长.这时不存在阵发前周期运动的鬼魂,只存在它的“遗迹”.本文的数值结果显示:虽然这种湍流相和层流相的交替是  $p > p_c$ . 同时  $p \approx p_c$  时混沌时间序列的共同特征,然而不管  $p$  如何接近于  $p_c$ ,层流相与湍流相的平均长度之比总在  $10^{-4}$  数量级内作随机变化.所以,可以断定类 V 型阵发不但不遵循(1)式所示的 V 型阵发标度律,而且不存在任何平均层流相阵发标度律.我们计算了临界参数附近的 Lyapunov 指数谱,证明了(2)式所示的 V 型阵发标度律也不成立.看来标志类耗散系统中的类 V 型阵发的标度律与耗散系统中的对应规律完全不同.

### 3.4. 类 V 型阵发的标度律以及从“类瞬态混沌奇异集”中的逃逸

注意到本文计算图 2 时所抛掉的旨在避免瞬态

的异常长的迭代过程( $3 \times 10^7$ ),这是由于在  $p \rightarrow p_c$  时从绝大多数初值被吸引向上述的 8 周期椭圆岛的过程确实是异常长的.这令人想起激变后从奇异排斥子逃逸时的情况<sup>[21]</sup>,从而促使我们研究这些瞬态过程,以及它们是不是在从一个奇异集上逃逸.图 5 (a) 给出在类 V 型阵发临界点之前记录瞬态过程中的一部分迭代所得到的图形.对比图 3,可以令人相信阵发后出现的类混沌吸引子的鬼魂确实存在于阵发前的长瞬态中,并且主宰了这时相当长一段时间过程.图 5 (b) 为图 5 (a) 方框部分的放大,它说明这个瞬态过程最后终止于前述 8 周期椭圆岛.因此异常长的瞬态正来自于从这个类瞬态混沌奇异集中向 8 周期椭圆岛的逃逸,而且类瞬态混沌吸引子的鬼魂与 8 周期椭圆岛的交集正是逃逸的孔洞.这说明类 V 型阵发在临界点附近的特征标度律应该与激变类似,亦即描述类 V 型阵发这种临界现象的标度律应该是临界点之前从类瞬态混沌奇异集中逃逸的平均生存时间随参数改变的规律,而不是临界点之后的平均层流相标度律.这与耗散系统中的 V 型阵发的情况完全不同.

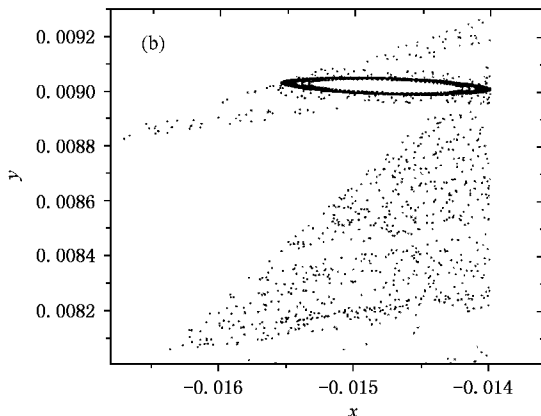
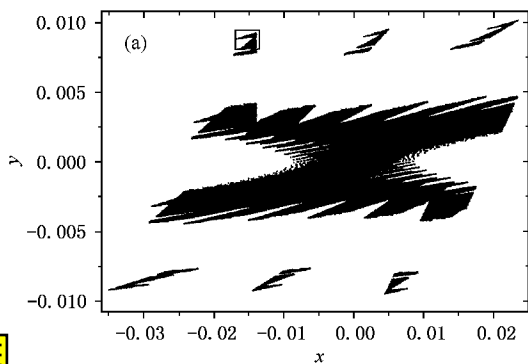


图 5 (a) 为  $p = -1.006, f = -0.02, c = 0.006$  时(对每个初值)略去从  $x \in [-0.015, 0.01], y \in [-0.006, 0.006]$  范围内均匀分布的  $8 \times 8$  个初值出发的前  $10^4$  次迭代后,记录 2500 次得到的类混沌吸引子的鬼魂图形与图 3 所示完全相同 (b) 为(a)图中方框部分的放大

由以上分析可以期待如下标度律:

$$\langle N \rangle \propto (p - p_c)^v, \quad \text{当 } p \rightarrow p_c, \quad (14)$$

其中平均生存时间  $\langle N \rangle$  定义为

$$\langle N \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n N_i}{n}, \quad (15)$$

其中  $n$  为所取初值的数目,  $N_i$  为第  $i$  个初值出发到

达 8 周期椭圆岛的瞬态长度.如图 6 所示,本文的数值结果确证了标度律(14)式的正确性,并且得到了标度指数  $v = 1.66 \pm 0.08$ .

我们在(3)和(4)式描述的简化系统的原始系统,即描述电子张弛振子的原始映象中也观察到了类 V 型阵发,并且得到了定性相同的标度律.其结果将另文报道.

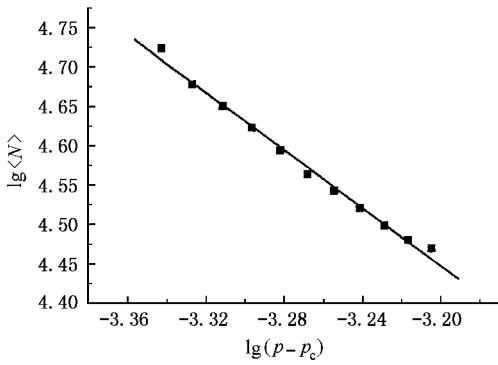


图 6  $f = -0.02$ ,  $c = 0.006$  时计算的平均生存时间标度律  
 ■ 为计算数据,初值选择为均匀分布的  $201 \times 201$  个,——为数据的最小二乘法拟合结果, $p_c$  为  $-1.0067$ — $1.0063$ ,大于  $-1.0063$  时由于八周期岛链的变化,标度律也发生突变

## 4. 结 论

在两个保面积映象不连续地链结所构成的类耗散系统中可能存在类 V 型阵发.其发生机理与耗散系统的 V 型阵发相同,都是周期轨道经过与不连续

边界的碰撞而失稳.另一个相同点是:在主要的周期轨道失稳后,类混沌吸引子要经过一系列的过渡周期轨道之后才能出现,而且这些过渡周期轨道及其周围的椭圆周期岛链可以在某个平面上表示为一个锁相阶梯.在类混沌吸引子主相空间运动后,混沌时间序列类似地也呈现层流相与湍流相的无规交替,不过平均层流相长度不遵循传统阵发的特征标度规律.与耗散系统中的 V 型阵发根本不同的是,阵发后并不存在阵发前最后一个过渡周期轨道的鬼魂,反之,阵发后出现的类混沌吸引子的鬼魂却存在于阵发前规则运动的长瞬态中.因此,描述类 V 型阵发这种临界现象的标度律与激变的标度律相似,是临界点之前从类瞬态混沌奇异集中逃逸的平均生存时间随参数改变的规律.本文研究表明,类似的现象也存在于其他类耗散系统(例如由(3)和(4)式描述的本系统的原始电路模型)中.

感谢中国科学技术大学顾雁教授、汪秉宏教授和北京师范大学胡刚教授十分有益的讨论和建议.

- [1] He D R et al 2001 *An Introduction to Nonlinear Dynamics: The Dynamic Characteristics of Everywhere-Smooth and Piecewise-Smooth Systems* (Xi'an: Shaanxi Scientific and Technological Publishing House) chaps 5—8 (in Chinese) [何大韧等 2001 非线性动力学引论:处处光滑与分段光滑系统的动力学特性(西安:陕西科技出版社)第5—8章]
- [2] Pomeau Y and Maneville P 1980 *Commun. Math. Phys.* **74** 189
- [3] He D R et al 1992 *Acta Phys. Sin.* **42** 61 (in Chinese) [何大韧等 1992 物理学报 **42** 61]
- [4] He D R et al 1992 *Phys. Lett. A* **171** 61
- [5] Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1507
- [6] Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [7] Grebogi C et al 1987 *Phys. Rev. A* **36** 5365
- [8] Platt N, Spiegel E A and Tresser C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 279
- Heagy J F, Platt N and Hammel S M 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1140
- [9] Nusse H et al 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1073
- [10] Wu S, Ding E J and He D R 1995 *Phys. Lett. A* **197** 287
- [11] Fan J P et al 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1084 (in Chinese) [范建平等 1998 物理学报 **47** 1084]
- [12] Reichl L E 1992 *The Transition to Chaos, In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations* (New York: Springer-Verlag)
- [13] Chen H S, Wang J and Gu Y 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 85
- [14] Chen H S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 844 (in Chinese) [陈贺胜 2000 物理学报 **49** 844]
- [15] Wang J et al 2001 *Phys. Rev. E* **64** 026202
- [16] Wang J et al 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 13
- [17] Wang X M et al 2001 *Sci. Technol. Lett.* **7** 613 (in Chinese) [王旭明等 2001 科技快报 **7** 613]
- [18] Qu S X, Wu S and He D R 1998 *Phys. Rev. E* **57** 402
- Qu S X et al 1997 *Phys. Lett. A* **231** 152
- [19] Chen S G 1998 *Circle Maps* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [陈式刚 1998 圆映象(上海:上海科技教育出版社)]
- [20] Zhang Z J and Chen S G 1989 *Acta Phys. Sin.* **38** 1 (in Chinese) [张张建、陈式刚 1989 物理学报 **38** 1]
- [21] Tél T 1990 *Transient Chaos Directions in Chaos* vol III ed by B L Hao (Singapore; World Scientific)

# “ Type $\bar{V}$ quasi-intermittency ” in a “ quasi-dissipative system ”\*

Wang Ying-Mei Wang Xu-Ming Chen He-Sheng Wang Wen-Xiu Zhao Jin-Gang He Da-Ren

( Complexity Science Center , Yangzhou University , Yangzhou 225002 ,China )

( Received 11 August 2001 ; revised manuscript received 17 November 2001 )

## Abstract

A kind of discontinuous and noninvertible area-preserving maps can display behaviours as a dissipative one , so it may be addressed as a “ quasi-dissipative system ”. In a kind of quasi-dissipative systems the disappearance of some elliptic periodic orbits and the elliptic islands around them via a collision with the discontinuous border of the system function can be observed. A chaotic quasi-attractor dominates the behaviour of the system after the disappearance of the elliptic periodic orbit , and a sequence of transitional elliptic periodic orbits. When the chaotic quasi-attractor just appears , the chaotic time sequence shows a random intersperse between laminar and turbulence phases. All these are very similar to the properties of type  $\bar{V}$  intermittency happened in a dissipative system. So , we may call the phenomenon as a “ type  $\bar{V}$  quasi-intermittency ”. However , there can be only some remnants of the last disappeared transitional elliptic island instead of its “ ghost ” , therefore type  $\bar{V}$  quasi-intermittency does not obey the characteristic scaling laws of type  $\bar{V}$  intermittency. On the contrary , the ghost of the chaotic quasi-attractor can be found in the quasi-transient process of the last transitional elliptic periodic orbit. The scaling law of type  $\bar{V}$  quasi-intermittency thus becomes the rule for escaping from the “ chaotic quasi-transient strange set ” , which exists before the critical point of the appearance of chaotic motion induced by type  $\bar{V}$  quasi-intermittency and signifies this critical phenomenon. This is absolutely different from type  $\bar{V}$  intermittency.

**Keywords :** quasi-dissipativity , chaotic quasi-attractor , type  $\bar{V}$  quasi-intermittency

**PACC :** 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 19975039 ).