

统一混沌系统的反馈同步*

陶朝海¹⁾ 陆君安^{1)†} 吕金虎²⁾

¹⁾ 武汉大学数学与统计学院, 武汉 430072)

²⁾ 中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100080)

(2001 年 12 月 4 日收到, 2001 年 12 月 28 日收到修改稿)

应用线性、非线性和广义同步三种反馈方法, 研究了一个新的单参数统一混沌系统的反馈同步问题. 研究表明, 线性反馈同步和广义同步中控制参数 k 的下确界与系统的最大 Lyapunov 指数 λ 有关, 并且导出了非线性反馈同步的控制参数 p, q 与统一系统参数 α 的关系. 数值仿真表明反馈同步方法的有效性和理论结果的正确性.

关键词: 统一混沌系统, 反馈同步, 控制, 最大 Lyapunov 指数

PACC: 0545

1. 引言

由于混沌系统对初值的极其敏感性, 过去人们认为混沌的同步非常困难. 然而 Pecora 等人提出一种混沌同步方法, 并在电路试验中首次观察到了混沌同步现象^[1]. 十多年来, 随着混沌同步研究不断深入, 发现它在保密通信等领域有着广阔的应用前景, 引起了广泛重视. 混沌控制与同步已成为这一领域的研究热点. 近年来, 人们提出了各种不同的混沌控制与同步的方法^[2-14].

1963 年, Lorenz 在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子. 1999 年, 陈关荣发现了一个类似但不拓扑等价的混沌吸引子^[15]. 十分有趣的是, 根据 Vaněček 和 Čelikovský 的定义^[16], 这两个系统分属于两个不同的类: Lorenz 系统满足 $a_{12} a_{21} > 0$; Chen 系统满足 $a_{12} a_{21} < 0$. 2001 年, 吕金虎等人发现了在这两个对偶系统之间存在一个新的混沌系统, 称为 Lü 系统^[17, 18]. 最近, 吕金虎、陈关荣等人又提出一个新的混沌系统——统一系统^[19], 这个系统连接了 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子, 并包含 Lü 系统作为它的一个特例. 统一系统的数学模型可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = (25\alpha + 10)(y - x), \\ \dot{y} = (28 - 35\alpha)x - xz + (29\alpha - 1)y, \\ \dot{z} = xy - \frac{1}{3}(8 + \alpha)z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ 为系统的参数.

特别地, 对于参数 $\alpha \in [0, 1]$, 系统均为混沌态^[19]. 根据 Vaněček 和 Čelikovský 在文献^[16]中的定义, 当 $\alpha \in [0, 0.8)$ 时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统, 满足条件 $a_{12} a_{21} > 0$; 当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时, 统一系统属于广义 Chen 系统, 满足条件 $a_{12} a_{21} < 0$; 而当 $\alpha = 0.8$ 时, 统一系统属于广义 Lü 系统, 它具有连接 Lorenz 系统和 Chen 系统的重要作用. 统一系统(1)十分有趣, 它只用一个参数 α 就可以控制整个系统, 当 α 由零逐渐增加到 1 时, 系统也由广义 Lorenz 系统逐渐过渡到广义 Chen 系统^[19], 它为混沌控制和同步等提供了一个新的研究模型, 而且这个统一系统有许多问题值得深入研究^[20]. 本文应用线性、非线性和广义同步三种反馈方法, 深入研究了统一系统的反馈同步问题.

2. 反馈同步

根据混沌系统动力学的定性了解, 估计出在运动中具有极不稳定性质的变量, 对它加以检测, 并将负反馈施加到响应系统的相同变量上. 如果这一反馈不足以稳定同步混沌轨道, 再找出次不稳定方向的量, 并将其作为进一步加强反馈的信号, 以此类推, 直到同步混沌信号在响应系统中稳定为止.

* 香港研究资助局项目(批准号: 1112/99E)和中国科学院研究生科学与社会实践(创新研究类)基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jalu@wuhee.edu.cn

2.1 线性反馈同步

对于驱动系统 (1), 构造如下的响应系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(y_1 - x_1) + u_1, \\ \dot{y}_1 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1z_1 + (29\alpha - 1)y_1 - k(y_1 - y), \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \frac{1}{3}(8 + \alpha)z_1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 k 与 α 有关, 通过调节参数 $k(\alpha)$ 的大小来实现驱动系统和响应系统的同步. 发现对于给定系统参数 α , 存在一个 $k_0(\alpha)$, 当参数 $k(\alpha)$ 取定为 $k_0(\alpha)$ 时, 响应系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 为零; 当 $k(\alpha) > k_0(\alpha)$ 时, 响应系统的最大 Lyapunov 指数小于零, 响应系统和驱动系统实现同步. 因此, $k_0(\alpha)$ 是实现同步的参数 $k(\alpha)$ 的下确界. 表 1 列出当 $\alpha = 0, 0.8, 1$ 时, 对应系统的 $k_0(\alpha)$ 与驱动系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 的关系.

表 1 参数 $k(\alpha)$ 与驱动系统最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 的关系

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k_0(\alpha)$	2.44	4.08	3.94
$\lambda(\alpha)$	0.90	2.36	2.04

通过计算发现, 统一系统 (1) 在 $\alpha = 0.8$ 时, 最大 Lyapunov 指数 λ 达到最大值 2.36. 就 $\alpha = 0, 0.8, 1$ 这三种最重要的情形而言, $\alpha = 0$ 对应的 λ 最小, 为 0.90; $\alpha = 1$ 对应的 λ 其次, 为 2.04. $k_0(\alpha)$ 与对应的驱动系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 有关, $\lambda(\alpha)$ 越小, 则 $k_0(\alpha)$ 越小; $\lambda(\alpha)$ 越大, 则 $k_0(\alpha)$ 越大, 即呈正相关性. 由于最大 Lyapunov 指数是反映系统对初值的平均敏感程度, 因此最大 Lyapunov 指数越大, 负反馈的控制参数 k 也应越大. 这与上述结果完全一致.

2.2. 非线性反馈同步

考虑统一系统 (1) 作为驱动系统, 给定响应系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (25\alpha + 10)(y_1 - x_1) + u_1, \\ \dot{y}_1 = (28 - 35\alpha)x_1 - x_1z_1 + (29\alpha - 1)y_1 + u_2, \\ \dot{z}_1 = x_1y_1 - \frac{1}{3}(8 + \alpha)z_1, \end{cases} \quad (3)$$

其中 u_1, u_2 为反馈控制函数.

定理 对于驱动系统 (1) 和响应系统 (3), 取响应系统 (3) 的反馈控制函数为

$$\begin{aligned} u_1 &= (p - z)(y_1 - y) + (q + y)(z_1 - z), \\ u_2 &= -29\alpha(y_1 - y). \end{aligned} \quad (4)$$

当 p, q 满足如下关系:

$$\begin{cases} 38 - 10\alpha - 2\sqrt{25\alpha + 10} < p < 38 - 10\alpha + 2\sqrt{25\alpha + 10}, \\ q^2 < \frac{4}{3}(25\alpha + 10)(8 + \alpha) - \frac{1}{3}(8 + \alpha)(38 - 10\alpha - p) \end{cases} \quad (5)$$

时, 驱动系统 (1) 和响应系统 (3) 实现同步.

证明 令 $e_1 = x_1 - x, e_2 = y_1 - y, e_3 = z_1 - z$, 按上述方法取 u_1, u_2 , 则 (3) 式减去 (1) 式, 得到

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + (p - z)e_2 + (q + y)e_3, \\ \dot{e}_2 = (28 - 35\alpha)e_1 - e_2 - x_1z_1 + xz, \\ \dot{e}_3 = -\frac{1}{3}(8 + \alpha)e_3 + x_1y_1 - xy. \end{cases}$$

令 $E = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + e_3\dot{e}_3 \\ &= e_1[(25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + (p - z)e_2 + (q + y)e_3] + e_2[(28 - 35\alpha)e_1 - e_2 - x_1z_1 + xz] + e_3[-\frac{1}{3}(8 + \alpha)e_3 + x_1y_1 - xy] \\ &= -(25\alpha + 10)e_1^2 - e_2^2 - (8 + \alpha)e_3^2 + (38\alpha - 10 - p)e_1e_2 - qe_1e_3 \\ &= -\left[25\alpha + 10 - \frac{1}{4}(38\alpha - 10 - p)^2 - \frac{3q^2}{4(8 + \alpha)}\right]e_1^2 - \left[e_2 - \frac{1}{2}(38\alpha - 10 - p)e_1\right]^2 - \left[e_3\sqrt{\frac{8 + \alpha}{3}} + \frac{\sqrt{3}qe_1}{2\sqrt{8 + \alpha}}\right]^2. \end{aligned}$$

当 p, q 满足不等关系 (5) 式时, 上式等号右边第一项 e_1^2 的系数小于零, 于是保证了 $dE/dt < 0$, 故 E 将以指数速度收敛到零, 所以响应系统 (3) 和驱动系统 (1) 实现同步.

2.3. 广义同步

设驱动系统为 $\dot{X} = f(X)$, 响应系统为 $\dot{Y} = g(X, Y)$, 其中 $X \in R^n, Y \in R^m, f: R^n \rightarrow R^n, g: R^n \times R^m \rightarrow R^m$. 如果响应系统输出 $Y(t)$ 由驱动信号 $X(t)$ 唯一确定, 即满足 $Y = \varphi(X)$, 则这两个混沌态处于广义同步状态. 判断是否实现广义混沌同步的有效方法之一就是建立一个与响应系统完全相同的辅助系统 $\dot{Z} = g(X, Y)$, 并用同样的信号 $X(t)$ 去驱动它, 则 $Y(t)$ 与 $Z(t)$ 之间实现稳定广义混沌同步的

充要条件为 $Z(t) = Y(t)$.

对于驱动系统(1)构造响应系统(2)和(6),其中(6)为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = (25\alpha + 10\gamma)(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 = (28 - 35\alpha)x_2 - x_2z_2 \\ \quad + (29\alpha - 1)y_2 - k(y_2 - y), \\ \dot{z}_2 = x_2y_2 - \frac{1}{3}(8 + \alpha)z_2. \end{cases} \quad (6)$$

对于给定系统参数 $\alpha \in [0, 1]$, 则存在一个 $k^*(\alpha)$, 当系统控制参数 $k(\alpha) > k^*(\alpha)$ 时, 对于任意不同的初值, 响应系统(2)和(1)很快实现稳定广义同步. $k^*(\alpha)$ 与对应的驱动系统最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 的关系完全类似于 2.1 节中的情形, 见表 2.

表 2 $k^*(\alpha)$ 与驱动系统最大 Lyapunov 指数 $\lambda(\alpha)$ 的关系

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$
$k^*(\alpha)$	2.53	4.20	4.07

3. 数值仿真

文中所有的仿真均采用 Runge-Kutta 4, 5 阶算法.

图 1 和图 2 分别示出线性反馈同步条件下取 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 1$ 时的响应系统与驱动系统误差, 其中 $r(t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$.

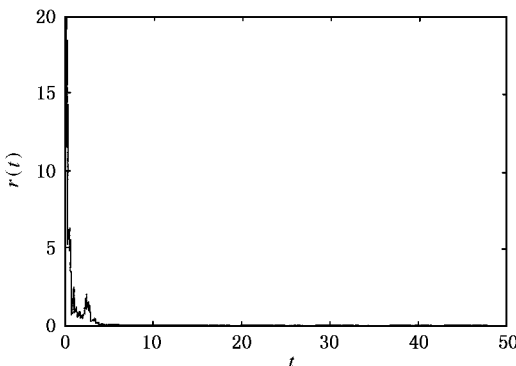


图 1 $\alpha = 0.8$ 时线性反馈同步误差图

图 3 示出在非线性反馈同步中控制参数 p 和系统参数 α 的关系, 可见给定 $\alpha \in [0, 1]$, p 的取值有充分的余地.

图 4 示出非线性反馈同步中 $\alpha = 0.8$ 时驱动系统(1)和响应系统(3)的同步情况, 其中 $p = 38 - 10\alpha$,

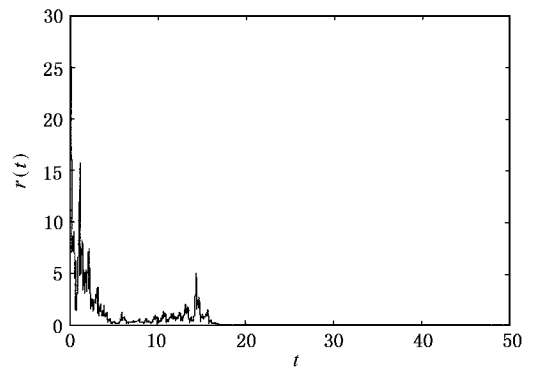


图 2 $\alpha = 1$ 时线性反馈同步误差图

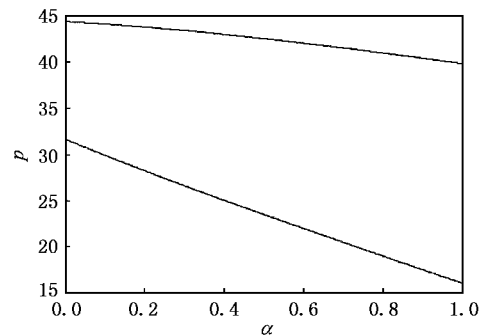


图 3 控制参数 p 和系统参数 α 的关系图

$$q = \sqrt{\frac{(25\alpha + 10\gamma)(8 + \alpha)}{3}}$$

$$r(t) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

图 5 和图 6 分别示出广义同步条件下 $\alpha = 0.8$ 和 $\alpha = 1$ 时的响应系统与驱动系统误差, 其中

$$r(t) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

4. 结 论

由于统一系统(1)仅用一个参数 α 连接了 Lorenz 和 Chen 两个重要的混沌系统, 它提供了研究混沌系统的一个重要而简明方便的模型. 本文应用线性、非线性和广义同步三种反馈方法研究了统一系统的同步问题, 导出了控制参数 p, q 与系统参数 α 的关系, 并且还发现了控制参数 k 的下确界与驱动系统最大 Lyapunov 指数 λ 正相关性. 数值仿真表明了上述方法简单、易于操作、收敛速度快. 对这一新的混沌系统有许多问题尚待深入研究.

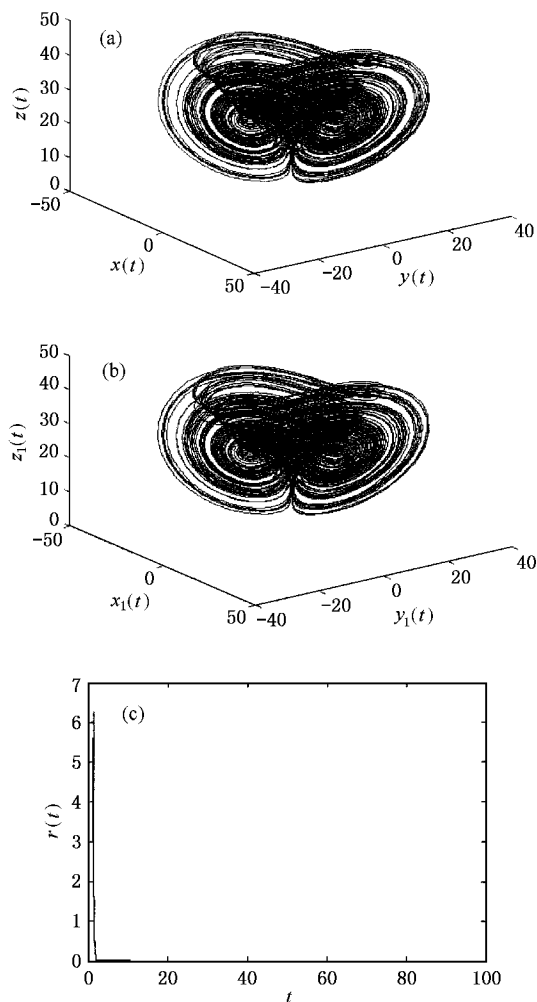


图 4 驱动系统吸引子 (a) 和响应系统吸引子 (b) 及响应系统与驱动系统误差 (c)

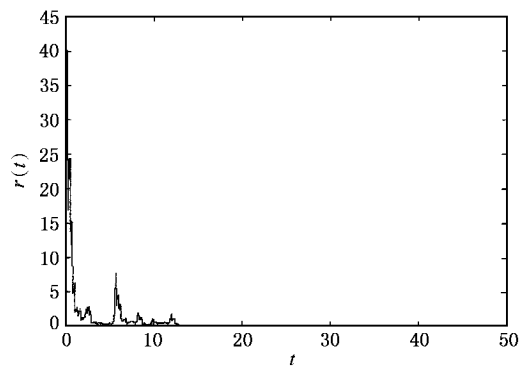


图 5 $\alpha = 0.8$ 时广义同步误差图

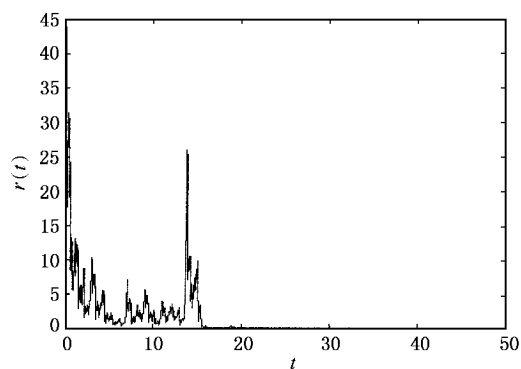


图 6 $\alpha = 1$ 时广义同步误差图

- [1] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Hu G, Xiao J H and Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡刚、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制 (上海: 上海科技教育出版社)]
- [3] Wang G R, Yu X L and Chen S G 2001 *Chaos Control, Synchronization and Its Application* (Beijing: National Defense Industry Publishing House) (in Chinese) [王光瑞、于熙岭、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用 (北京: 国防工业出版社)]
- [4] Lü J H, Lu J A and Chen S H 2002 *Chaos Time Series Analysis and Its Application* (Wuhan: Wuhan University Press) (in Chinese) [吕金虎、陆君安、陈士华 2002 混沌时间序列分析及其应用 (武汉: 武汉大学出版社)]
- [5] Chen G R and Dong X N 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore: World Scientific)
- [6] Lü J H and Zhang S C 2001 *Phys. Lett. A* **286** 145
- [7] Tang G N, Luo X S and Kong L J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 31 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙、孔令江 2000 物理学报 **49** 31]
- [8] Lü J H, Zhou T S and Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12
- [9] Guan X P, Peng H P, Li L X and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 (in Chinese) [关新平、彭海朋、李丽香、王益群 2001 物理学报 **50** 26]
- [10] Chen S H, Xie J, Lu J A and Liu J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 749 (in Chinese) [陈士华、谢进、陆君安、刘杰 2002 物理学报 **51** 749]
- [11] Chen S H, Liu J, Xie J and Lu J A 2002 *Chin. Phys.* **11** 233
- [12] Lu J A, Lü J H and Chen S H 2002 *Control Theor. Appl.* **19** 308 (in Chinese) [陆君安、吕金虎、陈士华 2002 控制理论与应用 **19** 308]
- [13] Lu J A, Lü J H, Xie J and Chen G R 2002 *Comput. Math. Appl.*

- accepted
- [14] Lu J A , Xie J , Lü J H and Chen S H 2002 *Appl. Math. Mech.* accepted
- [15] Chen G and Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
- [16] Vaněček A and Čelikovský S 1996 *Control Systems : From Linear Analysis to Synthesis of Chaos* (London : Prentice-Hall)
- [17] Lü J H and Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
- [18] Lü J H , Chen G R and Zhang S C 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* accepted
- [19] Lü J H , Chen G R , Zhang S C and Čelikovský S 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* accepted
- [20] Lu J A , Tao C H , Lü J H and Liu M 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 632

The feedback synchronization of a unified chaotic system *

Tao Chao-Hai¹⁾ Lu Jun-An¹⁾ Lü Jin-Hu²⁾

¹⁾*School of Mathematics and Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China)*

²⁾*Institute of Applied Mathematics , Academy of Mathematics and System Sciences , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China)*

(Received 4 December 2001 ; revised manuscript received 28 December 2001)

Abstract

The feedback synchronization of a unified chaotic system with a single parameter has been investigated by using linear , non-linear and generalized synchronization methods. Theoretical analysis and numerical simulation show that the infimums of the control parameter k of the linear and generalized synchronizations correlate with the maximum Lyapunov exponent of the system. Furthermore , the relationship between the control parameters p , q of the nonlinear feedback synchronization and parameter α of the unified system is deduced. Numerical simulation shows the effectiveness and applicability of these methods.

Keywords : unified chaotic system , feedback synchronization , control , maximum Lyapunov exponent

PACC : 0545

* Project supported by the Bureau of Research and Support of Hong Kong ,China (Grant No.1112/99E) , and the Scientific and Social Practice for Graduate Students from Chinese Academy of Sciences for Innovation Research Projects.