

# 混沌动力学方法在等离子体尾迹流场研究中的应用\*

李俊峰 曹金祥† 张传宝 宋法伦

(中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230027)

(2001 年 10 月 8 日收到, 2001 年 12 月 3 日收到修改稿)

用混沌动力学方法对多道扫描静电探针的离子饱和电流信号进行分析, 研究了等离子体尾迹流场. 通过对相关维、Renyi 熵和最大 Lyapunov 指数的分析, 得到了近尾流场的分层结构. 利用最大 Lyapunov 指数, 观测到了在  $x > 10D$  以后的远尾流场与自由流场相似. 结合探针信号的自相关函数, 研究流场湍流结构, 发现近尾可能存在大涡拟序结构, 而在远尾则没有湍流. 观察到了流场具有一定的间歇特征, 认为这种间歇性与湍流有关. 结果还表明, 混沌动力学的分析方法对信号中非周期成分十分敏感, 在研究等离子体尾迹流场这一类非线性系统时, 它具有明显的优越性.

关键词: 混沌动力学, 尾迹, 等离子体湍流, 静电探针

PACC: 4752, 4725R, 5235R, 5270

## 1. 引 言

高速飞行器在再入大气层的时候, 其后会形成等离子体尾迹. 由于等离子体尾迹对于飞行器的气动热、气动力特性以及目标识别和提高飞行器的生存能力都有很大的影响, 对于等离子体尾迹特性的研究近年来已经受到重视. 早期的对于尾迹的实验工作主要是对于远尾特性的描述. 最早的近尾实验数据是 Chevray 用热线法测量得到的<sup>[1]</sup>. 从那以后, Hyun 和 Patel 研究了有螺旋桨和没有螺旋桨的尾迹<sup>[2,3]</sup>. 近年来, Sirviente 和 Patel 测量了轴对称的尾迹近尾湍流<sup>[4]</sup>. Williams 和 Gessner 研究了超音速的环形尾迹流场的特性<sup>[5]</sup>. Bearman 研究了二维和三维钝体尾迹近尾流场<sup>[6]</sup>. 张涵信等人利用混沌动力学对尾迹流场从分岔的角度进行了理论研究<sup>[7]</sup>, 数值模拟了高超声速层流<sup>[8]</sup>, 得到了近尾流场内存在主激波、膨胀波区、尾激波、回流区和自由剪切层的结构. 曹金祥等人利用电子密度和 Kolmogorov 熵极小值的方法, 得到了高超声速尾迹流场中主激波的位置<sup>[9-11]</sup>, 并对静电探针数据做了小波分析<sup>[12]</sup>. 董宇飞等人用烟线技术也研究了尾迹流场的特性<sup>[13]</sup>. 静电探针作为一种简单而有效的等离子体诊断方法被广泛地运用<sup>[14,15]</sup>. 本文通过多道扫描静电探针, 利用

混沌动力学的分析方法, 从实验上对等离子体尾迹流场进行了研究. 为了证实混沌量的分布与实际物理参数分布有一定的联系, 本文考察流场的分层结构, 并与其他方法得到的结果<sup>[8,9]</sup>进行了对比, 同时还比较了近尾流场与远尾流场, 以说明最大 Lyapunov 指数在刻画流动无序性方面的作用. 与文献 [10] 的工作相比, 本文在相空间重构技术和混沌量的选择上用最大 Lyapunov 指数代替整个 Lyapunov 指数谱, 并用 Renyi 熵代替由 Lyapunov 指数谱所得到的 Kolmogorov 熵, 使得由于数据量少所导致的计算误差变小, 这种方法显著提高了本文计算结果的可信度. 此外, 本文对流场结构和湍流特征作了更进一步的研究, 得到了一些有意义的结果.

## 2. 实 验

实验是在电弧风洞上进行的, 该风洞的参数为: 弧室起始压力为 50.7kPa, 结束压力为 355kPa; 总比焓为 300—1990cal/g; 来流马赫数为 5—12. 流场中等离子体参数采用阵列静电探针得到. 探针阵列如图 1 所示, 探针材料选用金属铱, 长径比为 40, 插在绝缘衬套中, 8 个探针沿流场半径方向以 15mm 的间距固定在一个可以沿流场轴向运动的支架上. 探针及支架都采用高压水冷.

\* 中国科学院院长基金(批准号 577)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jxcao@ustc.edu.cn

我们在风洞喷管出口处安置钝头玻璃钢模型. 其底部直径为 25mm, 长为 70mm, 半锥角为  $3^\circ$ , 头部是直径为 20mm 的半球. 探针阵列从远尾逆流场沿

$x$  轴方向扫描, 最近的一个采样截面距模型底部 140mm(记模型直径为  $D$ ,  $140\text{mm} = 5.6D$ ). 其几何位置关系如图 1 所示.

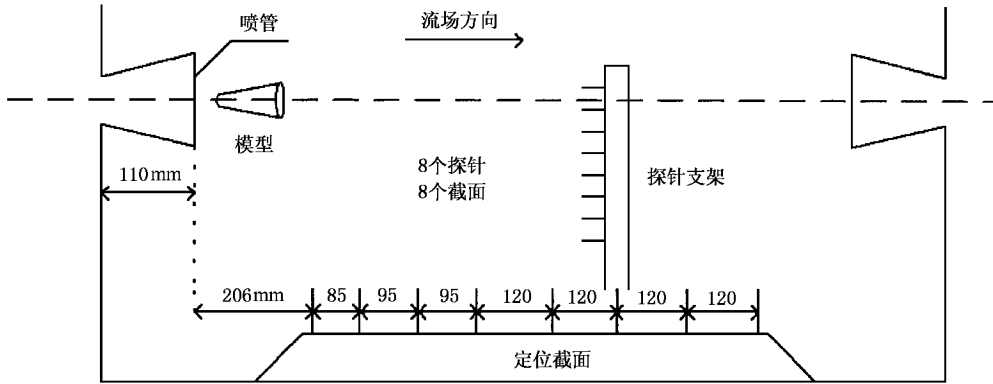


图 1 实验安排示意图

### 3. 实验结果与分析

#### 3.1. 数据分析方法

数据采用探针偏压保持在  $-25\text{V}$  的离子饱和电流. 每个探针在每个采样位置上的数据量为 1024. 分析方法采用混沌动力学关于时间序列的分析方法, 即对于一个时间序列, 首先利用延迟重构得到它在相空间中的吸引子, 然后通过重构的吸引子计算系统的相关维、Renyi 熵和最大 Lyapunov 指数.

##### 3.1.1. 相空间重构

非线性耗散系统的混沌运动表现为相空间中的奇怪吸引子. 为了对吸引子进行统计描述, 混沌动力学引入了广义维数、广义熵和 Lyapunov 指数. 在实际应用中, 对时间序列进行分析必须先从时间序列把吸引子恢复出来, 这一步骤叫做重构. 本文采用的是延迟重构法, 即对于时间序列  $x(t_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ), 有

$$X_m(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), x(t_i + 2\tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)\} \\ (i = 1, 2, \dots, (m-1)\tau),$$

式中  $m$  称为嵌入维,  $\tau$  称为延时参数. 本文采用  $4 \frac{\alpha(x)}{\alpha(dx/dt)}$  估计时间窗  $\tau_w$ , 利用 RSS 分析<sup>[16]</sup> 确定最佳延时参数  $\tau$ , 然后通过  $\tau_w = \tau(m-1)$  确定嵌入维  $m$ , 从而确定整个重构.

##### 3.1.2. 相关维 $D_2$ 、Renyi 熵 $K_2$ 和最大 Lyapunov 指数

的计算

广义维数描述了吸引子在相空间中的几何结构, 其中最常用的一种是相关维, 其定义如下:

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\ln C^m(r)}{\ln r},$$

式中  $C^m(r)$  为关联函数, 定义为

$$\alpha(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \Theta(r - |X_i - X_j|),$$

式中

$$\Theta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0, \\ 0 & \alpha \leq 0. \end{cases}$$

熵是描述耗散系统信息流变化速率的一个量, 由于信息量刻划的是系统的不确定程度, 信息量越大, 作出正确预测的困难就越大, 因此熵值的大小实际上也代表了系统未来状态的可预测时间长度. 最常用的就是 Renyi 熵, 定义如下:

$$K_2 = \frac{1}{\Delta t} \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln \frac{C^m(r)}{C^{m+1}(r)}.$$

Lyapunov 指数是系统对初值依赖的敏感性的一个定量度量, 它描述了相空间中轨道的发散性. 其中最大的 Lyapunov 指数表示了初始误差向量的指数增长率, 是区分流体运动的一个重要指标.

计算最大 Lyapunov 指数的时候, 我们采用的基本上是文献 [17] 的算法, 该算法的主要思想是运用轨道跟踪时, 每次都在最大的方向上估计最大 Lyapunov 指数, 然后再对所有估计做平均, 从而求取总的最大 Lyapunov 指数. 该算法在传统的轨道跟踪法的基础上考虑了吸引子的收缩效应, 而且由于算法

中引进了了一定的随机成分,因而受噪声影响较小,同时该算法还有稳定性好、较节省计算空间等优点.

### 3.2. 流场结构

研究尾迹流场结构及特征,对于解释尾迹中的各种现象,对于高速飞行器的目标特征识别,以及研究飞行器底部的气动热和气动力等问题都有重要意义.

图 2 为在放电电弧电流为 1000A,电压为 1200V,流场焓值为 809cal/g,采样频率为 10kHz 时,得到的一组典型实验数据所绘制的离子饱和电流涨落的三维分布图.图 3 为它的等值线图(本文中各图中  $x$  为流场轴线方向, $r$  为流场半径方向).从空气动力学的角度来考虑,在钝头模型头部形成脱体激波,脱体激波内有较为明显的激波结构,随流场发展激波结构衰减,在大于  $10D$  之后,流场已经近似于脱体激波前的自由来流场<sup>[18]</sup>.本文的实验也观测到这一结果.从图 3 可以看到,在近尾区和靠近轴线的地方,涨落幅度相对较大,在这些地方涨落幅度出现明显的峰值.

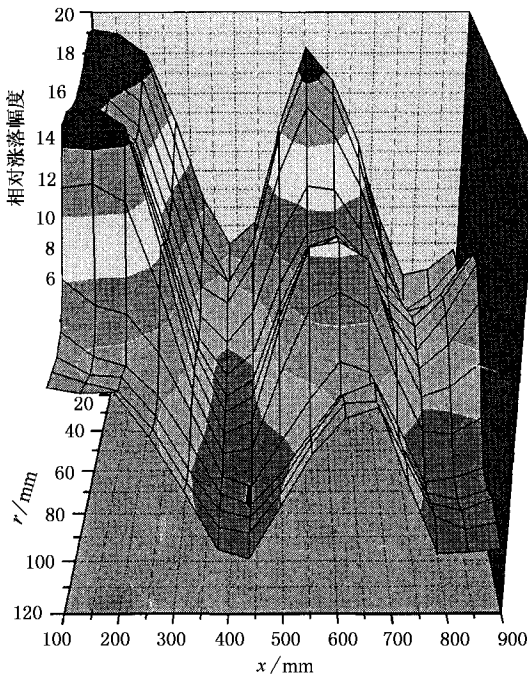


图 2 离子饱和电流涨落的空间分布

图 4 为根据全流场离子饱和电流所计算的最大 Lyapunov 指数的三维分布图.与图 2 相比较,可以看出,在  $x = 140\text{mm}$  和  $x = 650\text{mm}$  左右的地方,二者都出现峰值,但在图 4 中,第二个峰值幅度较第一个峰

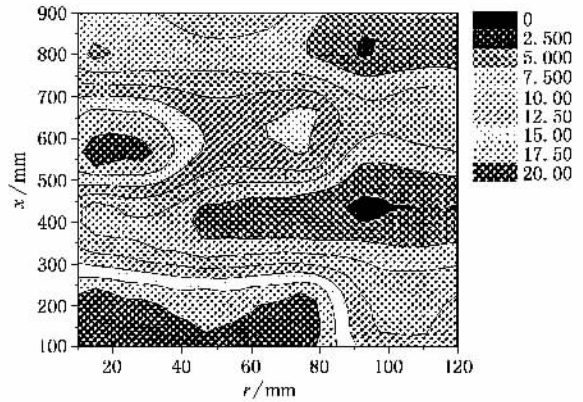


图 3 离子饱和电流涨落的等值线图

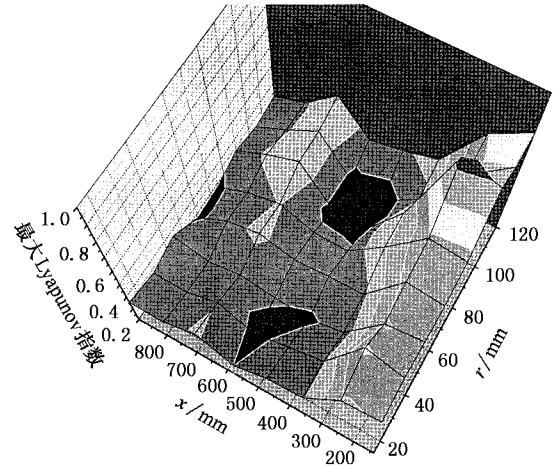


图 4 最大 Lyapunov 指数的空间分布

值要小得多,而在图 2 中两个峰值的幅度差别不明显.为了进一步研究这一实验现象,我们单独研究 6 号探针数据随  $x$  的分布,并做了对比(如图 4 所示).从图 5 可以看出,相对涨落在第二个峰值处幅度基本没有变化,而最大 Lyapunov 指数的第二个峰有了明显的衰减.从位置上来看,第二个峰已经处于远尾区(约  $22.6D$ ),其流动应该接近于没有模型时的自由流场.从物理上考虑,如果远尾区的流场近似于自由流场,由于自由流场流动较之有模型时流场流动要有序得多,最大 Lyapunov 指数应该比近尾区要小.在本文的实验结果中,最大 Lyapunov 指数在第二个峰值处明显小于第一个峰值,这恰好说明了远尾区流动已经趋于有序,与远尾区流场近似于自由流场的结论相符合.对这些位置的原始时间序列作快速傅里叶变换(FFT)分析可以看出(见图 6),第一个峰值处零频率的幅度明显要比第二个峰值处要大,这

表明第一个峰值处信号的非周期成分要多些,亦即在第一个峰值处的流动要比第二个峰值处更加无序.由此可见,最大 Lyapunov 指数对于信号中的非周期成分十分敏感,的确能够反映流动的无序程度.由上面的讨论可以看到,最大 Lyapunov 指数的分布可以体现在远尾流动和近尾流动存在差异,由于它可以反映流动的无序程度,因而它比涨落谱更好地刻画了流场特性.

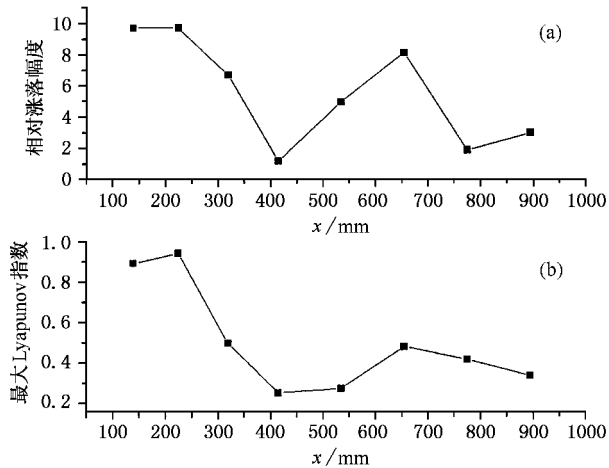


图5 涨落和最大 Lyapunov 指数对比(6号探针) (a)为相对涨落分布 (b)为最大 Lyapunov 指数分布

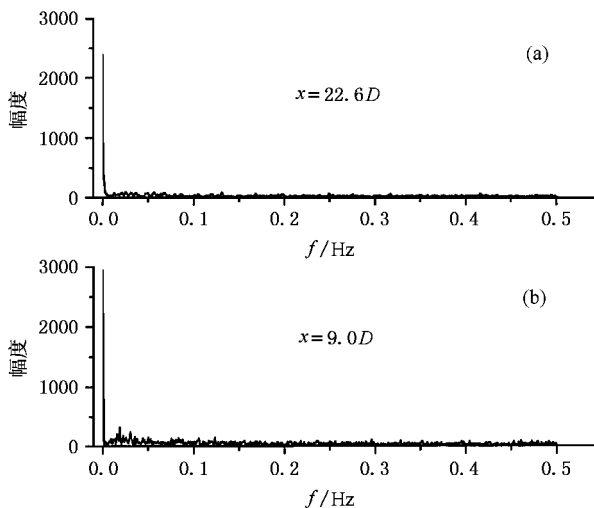


图6 探针信号在两个峰值处的 FFT 分析(6号探针)

下面着重考察  $x < 300\text{mm}$  的区域,即近尾区的流场特性.实验中,前两个采样截面处于这一区域.由图 7 可以看到,在  $r = 30\text{mm}$  附近和  $r = 90\text{mm}$  附近相关维、Renyi 熵和最大 Lyapunov 指数都出现了跃变,这表明在这些地方流场的空间几何结构发生了

变化.在文献 8 的计算结果中,在近尾区,存在一个流动较为有序的回流区,随  $r$  的逐渐增大,将依次经过尾激波、自由剪切层、膨胀波和主激波.与图 8 对照,也可以看到 Renyi 熵和最大 Lyapunov 指数的分布与图 7 相似,均经过了上述几个变化区域,这说明我们利用混沌动力学的分析方法验证了这一数值计算结果.这一结果与文献 9 中用电子密度方法得到的结果一致,这说明混沌量的变化的确可以在一定程度上反映出流场的变化情况.从我们得到的涨落谱看,这些结构并不明显.其原因我们认为是涨落仅仅能够反映物理量偏离平均值的程度,因而涨落不能区分周期信号和非周期信号,这就决定了涨落谱无法很好地描述流场结构.

文献 10 采用的方法是先计算整个 Lyapunov 指数谱,然后通过 Lyapunov 指数谱来计算 Kolmogorov 熵.由于数据量的限制,得到的 Lyapunov 指数谱并不稳定,仅有 Kolmogorov 熵是稳定的. Lyapunov 指数谱作为中间变量,并未充分利用,因此文献 10 只得到了主激波的位置和湍流的大致分布情况.本文利用最大 Lyapunov 指数代替 Lyapunov 指数谱,利用可以和相关维同时得到的 Renyi 熵代替 Kolmogorov 熵.由于在本文实验条件下,数据量不足以计算整个 Lyapunov 指数谱,但对于计算最大 Lyapunov 指数而言,这些数据已足够.这就使得我们得到的流场信息实际上是增加了,因而获得了更加详细的流场结构.

### 3.3. 流场中的湍流

图 9 为离子饱和流的等值线图(与图 3 不同,图 3 为离子饱和流相对涨落的等值线图),图中  $x$  方向的总尺度约为  $20\text{mm}$ .从图 9 可以看出,离子饱和流的等值线在  $x = 5.6D$  附近是由一些大大小小的闭合曲线组成的,这种闭合曲线对应的流动方式是涡旋运动.而到了  $x = 29.4D$ (对应于远尾区),涡旋已经不那么明显,这说明涡旋已经扩散.这意味着在流场中出现了湍流,并且随  $x$  的增大,湍流逐渐扩散,实际上,在  $x = 29.4D$  附近,流动已经不能说是一种湍流运动,而是和自由流场相似的有序流动.从图 4 也可以看出,最大 Lyapunov 指数随  $x$  的增大逐渐变小,这也说明流动到了远尾变得有序.同时还可以看出,流动的无序程度在空间分布上是间歇的.从  $x$  的变化趋势来看,在近尾区流动无序程度很高,到了  $x = 20D$  附近,流动变得有序,而到了  $x = 25D$  的地方,流动重新变得无序,但无序程度比近尾区要低.

此外,当  $x$  不同时,其最大 Lyapunov 指数随  $r$  的变化趋势也不同,这充分说明了流场中有序和无序交

替出现,这种有序流动和无序流动之间的转化,我们认为与湍流理论中的内间歇性一致.

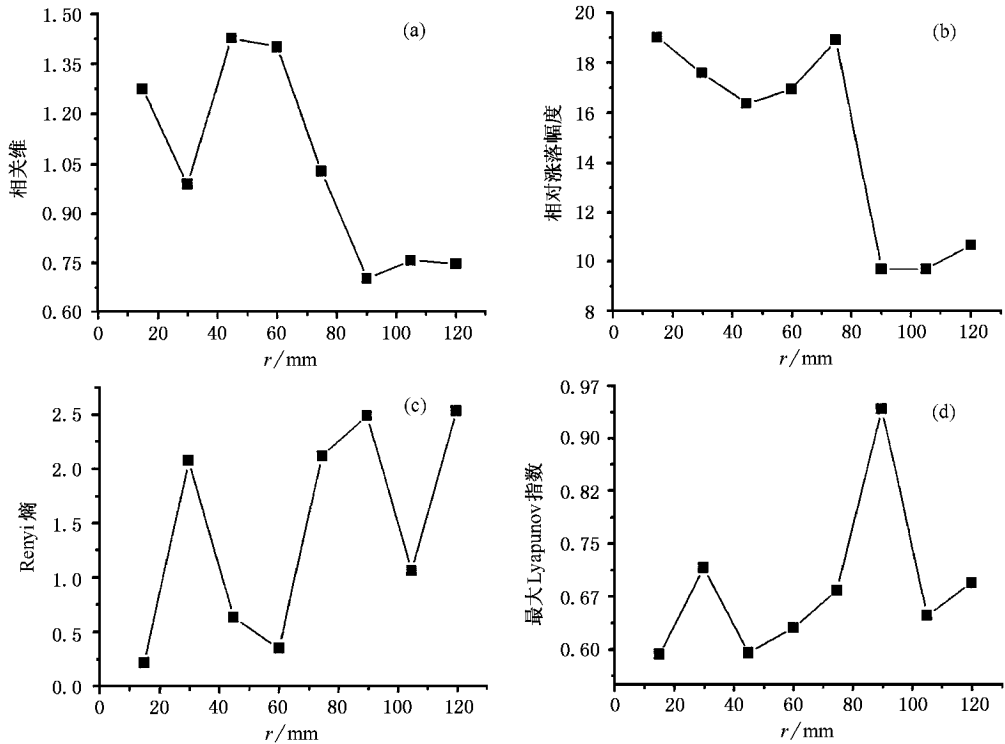


图 7  $x = 5.6D$  时的各参数在  $r$  方向上的分布

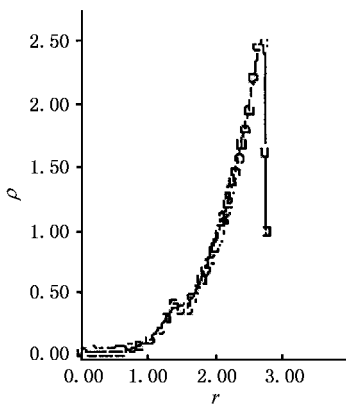


图 8 钝尾锥径向气体密度分布<sup>[8]</sup> ( $x = 6D$ )

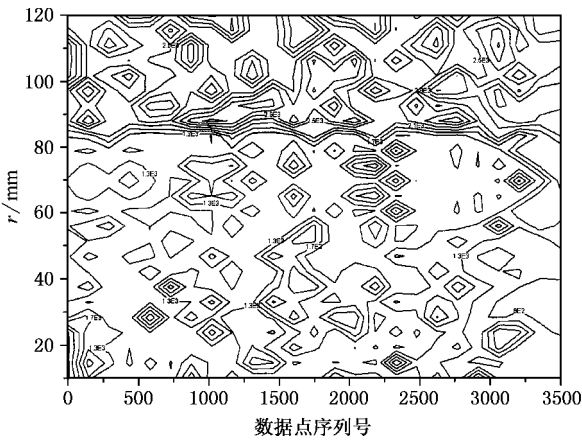
图 10 为 6 号探针前 4 个截面上离子饱和流自相关函数的谱函数.图 10(a)(b)(c)(d)距模型底部的距离依次为  $5.6D$   $9.6D$   $12.4D$  和  $15.8D$ .从图 10 可以看到,距离模型底部最近的一个截面上,谱函数有两个明显的孤立峰值,这种孤立峰值代表了流场内的大涡拟序结构<sup>[19]</sup>,随  $x$  的增大,峰逐渐向零点靠近,到了  $x = 15.8D$  的地方,谱函数已经变成没有明显峰值的结构.这表明随  $x$  的增大,这种拟

序结构逐渐消失,亦即涡旋逐渐向小尺度转化.

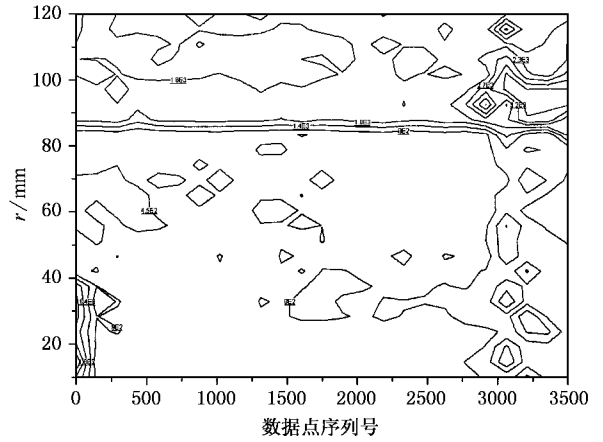
综上所述,在本文所研究的流场中观测到了湍流.随  $x$  的增大,湍流逐渐扩散,涡旋逐渐向小尺度转化.到了远尾区,湍流特征消失,流动变得与自由流场相似.这与利用最大 Lyapunov 指数分析得到的结果一致.

### 4. 结 论

本文用阵列静电探针扫描方法,通过饱和离子流信号分析处理,对等离子体尾迹的流场特性进行了研究.利用混沌动力学对于时间序列的分析方法,得到了等离子体尾迹的分层结构和一些有意义的物理结果.实验结果表明,流场混沌量的变化的确反映出了实际物理参数的变化.通过研究最大 Lyapunov 指数的分布,观察到了远尾流动和自由流场相似,在  $x > 10D$  以后,流动的有序程度大大高于近尾区域,这与数值计算结果一致.在流场湍流的研究中,由探针信号的自相关函数,观测到在近尾区可能存在大涡拟序结构,且随  $x$  的增大,湍流逐渐扩散,到了远尾区,湍流特征消失.最大 Lyapunov 指数的分布反

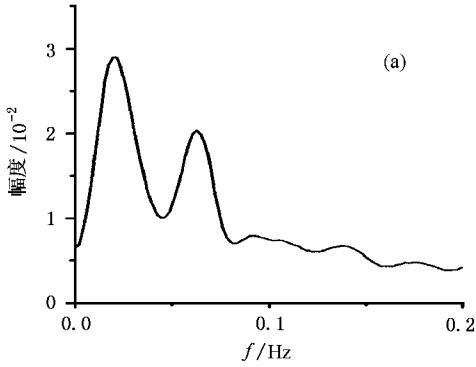


(a)  $x = 5.6D$

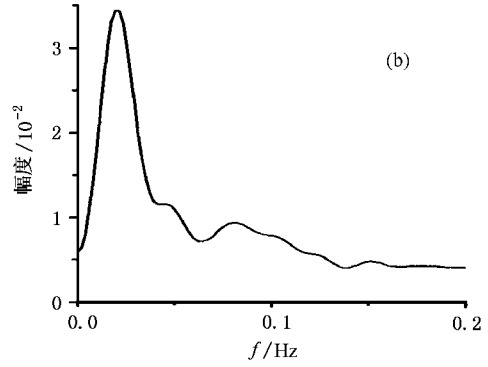


(b)  $x = 29.4D$

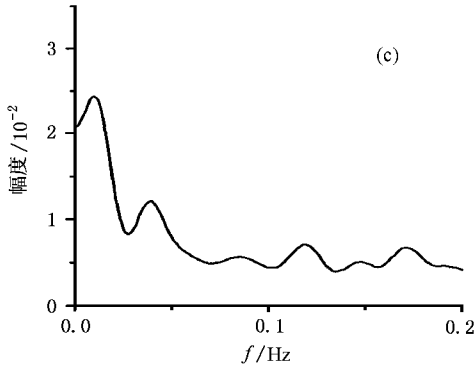
图 9 离子饱和流的等值线图



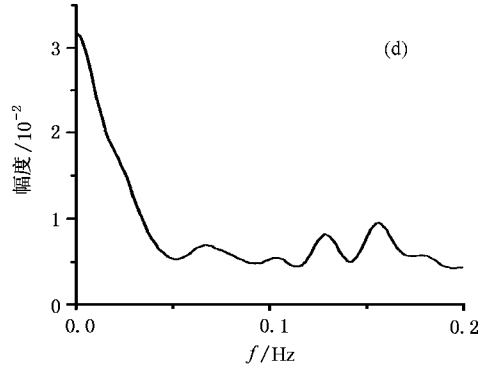
(a)



(b)



(c)



(d)

图 10 6号探针前4个截面上探针信号自相关函数的谱函数

映出在空间分布上流场呈现出一定的间歇特征,即流场中有序流动和无序流动交替出现,我们认为,这种间歇性可能与湍流运动有关.以上这些结果同时也充分说明,非线性动力学的分析方法具有能够很

好地提取信号中非周期成分信息的能力,它在等离子体尾迹流场特征的研究中,将会起到非常重要的作用.

[1] Chervary R 1968 *J. Basic Engineer.* **90** 275

[2] Hyun B S and Patel V C 1991 *Exper. Fluids* **11** 33

- [ 3 ] Hyun B S and Patel V C 1991 *Exper. Fluids* **11** 105
- [ 4 ] Sirviente A I and Patel V C 1999 *AIAA J* **37** 1670
- [ 5 ] Williams K E and Gessner F B 1998 *Exper. Thermal Fluid Sci.* **17** 156
- [ 6 ] Bearman P W 1997 *J. Wind Engineer. Indus. Aerodyn.* **69** 33
- [ 7 ] Ran Z and Zhang H X 1999 *Acta Aerodyn. Sin.* **17** 212 (in Chinese)  
[ 冉 政、张涵信 1999 空气动力学学报 **17** 212 ]
- [ 8 ] Zhang H X and Li Z W 1992 *Acta Mech. Sin.* **24** 389 (in Chinese)  
[ 张涵信、黎作武 1992 力学学报 **24** 389 ]
- [ 9 ] Cao J X *et al* 1999 *J. Univ. Sci. Technol. China* **29** 458 (in Chinese)  
[ 曹金祥等 1999 中国科学技术大学学报 **29** 458 ]
- [ 10 ] Cao J X *et al* 1999 *Acta Aerodyn. Sin.* **17** 449 (in Chinese)  
[ 曹金祥等 1999 空气动力学学报 **17** 449 ]
- [ 11 ] Cao J X *et al* 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 889
- [ 12 ] Yang H B *et al* 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 190
- [ 13 ] Dong Y F *et al* 1999 *Acta Mech. Sin.* **31** 682 (in Chinese)  
[ 董宇飞等 1999 力学学报 **31** 682 ]
- [ 14 ] Yao R H *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 922 (in Chinese)  
[ 姚若河等 2000 物理学报 **49** 922 ]
- [ 15 ] Chi L F *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1313 (in Chinese)  
[ 池凌飞等 2001 物理学报 **50** 1313 ]
- [ 16 ] Yuan J *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1290 (in Chinese)  
[ 袁 坚等 1997 物理学报 **46** 1290 ]
- [ 17 ] Yang S Q *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 (in Chinese)  
[ 杨绍清等 2000 物理学报 **49** 636 ]
- [ 18 ] He Z H *et al* 1999 *J. Harbin Inst. Technol.* **31** 100 (in Chinese)  
[ 贺志宏等 1999 哈尔滨工业大学学报 **31** 100 ]
- [ 19 ] Shi X G 1994 *Turbulence* (Tianjin :Tianjin University Press) (in Chinese)  
[ 是勋刚 1994 湍流 (天津 :天津大学出版社) ]

## Application of chaos dynamics to the research on plasma wakes<sup>\*</sup>

Li Jun-Feng Cao Jin-Xiang Zhang Chuan-Bao Song Fa-Lun

( Department of Modern Physics ,University of Science and Technology of China ,Hefei 230027 ,China )

( Received 8 October 2001 ; revised manuscript received 3 December 2001 )

### Abstract

A plasma wake flow field is studied by analyzing the saturated ionic current of multiple scanning probes with the method of chaos dynamics. The laminated structure of near-wake is verified by analyzing the correlation dimension, the Renyi entropy and the largest Lyapunov exponent. It is observed that when  $x > 10D$ , the far-wake flow field is similar to the free flow field. By studying the autocorrelation function of the probe signal, it is found that the large eddy quasi-ordering structure likely exists in near-wake, but there is no turbulence in far-wake. The intermittent character of the flow field can be discovered, and it seems to produce a certain relationship between the intermittent character and the turbulence. All the results show that the analytic method of chaos dynamics is sensitive to the non-periodic signal, so it is useful in studying the plasma wake.

**Keywords** : chaos dynamics , wakes , plasma turbulence , static probe

**PACC** : 4752 , 4725R , 5235R , 5270

<sup>\*</sup> Project supported by the Presidential Foundation of the Chinese Academy of Sciences ( Grant No. 577 ).