

Brans-Dicke 理论中静态球对称引力场的 de Broglie-Bohm 量子化*

王波波^{1)✉} 刘 辽^{2)††}

¹⁾ 北方交通大学物理系, 北京 100044)

²⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2001 年 2 月 19 日收到 2001 年 11 月 12 日收到修改稿)

将量子力学的 de Broglie-Bohm(dBB)解释引入 Brans-Dicke(BD)理论中. 在小超空间近似下, 求出了 Brans 类型-1 量子黑洞的波函数. 利用 dBB 解释求得 Brans 类型-1 的量子轨迹和量子势. 在量子黑洞背景几何上, 研究了径向光的行为. 发现 Brans 类型-1 量子化后的黑洞“温度”是奇异的. 另外, 由于 BD 引力理论在 BD 参数 ω 趋于无穷大时应与广义相对论等价, 因而 Schwarzschild 黑洞在 dBB 量子化后“温度”也是奇异的. 这似乎意味着 dBB 量子化不能应用于黑洞.

关键词: de Broglie-Bohm 解释, Brans-Dicke 引力理论, 量子轨迹, 小超空间近似

PACC: 9760L, 0365

1. 引 言

在引力理论和宇宙学领域, 量子引力理论是最有吸引力的课题之一. 人们提出了许多引力量子化的方法, 其中引力的正则量子化方法就是著名的方法之一, 它首先由 Arnowitt, Deser 和 Misner(ADM)^[1] 提出, 后由狄拉克(Dirac)^[2] 所发展. 在这个方案中, 引力场的动力学量被当作约束, 从而组成完备的约束系统. 引入量子化后, 这些约束又被当成作用在量子态上的算符, 其中的哈密顿约束给出 Wheeler-DeWitt(WD)方程^[3,4]. 引力正则量子化的主要工作就是求解 WD 方程, 人们对此做了大量的研究. WD 方程是关于 3 维空间度规 h_{ij} 的泛函方程, 当时空非均匀时, 很难求解这个无穷维自由度的泛函方程. 利用时空的某种对称性, 可以将 WD 方程由无穷维变成有限维, 则 WD 方程将会变得易于求解, 这种方法称为小超空间近似或小超空间模型. 特别地, 人们对相对论引力场球对称情况下的 WD 方程进行了广泛的研究^[5-7].

Kuchar^[6]研究了 Schwarzschild 黑洞的几何动力学, 发现黑洞的质量应当看成相空间的动力学变量. Nakamura 等人^[8]应用正则量子化方法于 Schwarzschild 黑洞的视界内部, 将 Kuchar 提出的黑洞质量函数作为黑洞系统的动力学变量, 量子化后进而得到黑洞质量算符. 将质量算符的本征方程与 WD 方程联立, 求解出波函数的精确解. 随后, Kenmoku 等人将 de Broglie-Bohm(dBB)解释引入了 Schwarzschild 黑洞^[9]和 Reissner-Nordström(R-N)黑洞^[10]的研究.

在量子理论中, 有两种著名的波函数解释方案. 一种是哥本哈根(Copenhagen)学派的解释, 另一种就是 dBB 解释^[11,12]. 哥本哈根解释就是人们最为熟悉的波函数概率解释. 粒子的位置不能确定, 波函数只能给出粒子在某一位置出现的概率. 因而, 按照哥本哈根学派的解释, 粒子的运动是无法用轨道来描述的.

dBB 解释则把波函数“经典化”, 给出一个量子轨道(quantum trajectory)或称 dBB 轨道. 对于一个量子动力学系统, 人们能够用“轨道”来描述系统的量子演化情况. 在量子效应可以忽略的地方, 量子轨道自然与经典轨迹一致. 在 dBB 解释中, 量子效应是

* 国家自然科学基金(批准号:19473005)资助的课题.

✉ E-mail: bbwang@center.njtu.edu.cn

†† E-mail: liuliao1928@yahoo.com.cn

由一个叫量子势的物理量描述的,当量子势很小可以忽略时,量子演化就回到了经典情形。dBB 解释在量子宇宙学的研究中也得到了广泛的应用^[13-16]。

Brans-Dicke (BD) 引力理论^[17]也许是最有可能取代爱因斯坦相对论的理论,它符合马赫原理和狄拉克的大数假设。当 BD 参数 ω 趋于无穷大时, BD 引力理论回到爱因斯坦引力理论。BD 理论中除了有一个描述时空的度规外,还有一个描述引力的标量场。时空度规与标量场作为一个整体描述了时空的引力效应。该理论提出不久, Brans 就求得了 4 个静态球对称解^[18]。

约 30 年前, Hawking 证明^[19], 一个 BD 理论的稳态黑洞解, 如果满足弱能条件, 则它必定等同于一个爱因斯坦相对论的稳态黑洞解。具体到球对称情况, Hawking 定理是说球对称的稳态 BD 黑洞解一定是 Schwarzschild 解。最近, Campanelli 和 Lousto^[20]指出, 与 Schwarzschild 解不同的(非平庸的)BD 理论的球对称黑洞是存在的。例如 Brans 类型-1 解中就有非平庸的 BD 理论的球对称黑洞解。Brans 类型-1 解是一族解, 可用参数 Q 和 χ 表示(见下节)。当 $Q=1, \chi=0$ 时, 该解就是 Schwarzschild 解。而当 $Q \neq 1, \chi \neq 0$ 时的 Brans 类型-1 解就是非平庸的 BD 理论的球对称黑洞解。Kim^[21]指出, 这个非平庸的 BD 理论的球对称黑洞解的存在并不与 Hawking 定理相矛盾, 因为这些非平庸 Brans 类型-1 黑洞解违反弱能条件。如果认为物理世界一定满足弱能条件, 则这些非平庸的 BD 黑洞解就是非物理的。Kim^[21]还用路径积分方法研究了非平庸的 BD 经典黑洞解的热力学性质, 发现它们的热力学性质也是奇异的。

本文用 dBB 量子化方法研究 Brans 类型-1 的黑洞解(其中包括一个 Schwarzschild 黑洞解)。在小超空间模型下给出一个 BD 理论的正则形式, 进而求得相应的经典解(Brans 类型-1)和量子解(量子 Brans 类型-1), 得到波函数的精确解。将 dBB 解释用于 BD 理论, 求得 Brans 类型-1 解的量子轨迹和量子势, 并研究了量子视界的性质。考察了在量子背景几何上径向光的性质, 求得量子黑洞 Brans 类型-1 的表面重力加速度, 发现 Brans 类型-1 量子黑洞(包括 Schwarzschild 黑洞)视界的表面重力是奇异的。

2. BD 理论的正则形式

真空 BD 理论的作用量为

$$I = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \omega g^{\mu\nu} \frac{\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi}{\Phi} \right), \quad (1)$$

其中 $g^{\mu\nu}$ 为度规, g 为度规的行列式, R 为时空的曲率标量, ω 为 BD 理论的参数, Φ 为 BD 理论的标量重力场。相应的场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} k = \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \Phi \nabla^\alpha \Phi \right), \quad (2)$$

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha \Phi = 0.$$

Brans 类型-1 黑洞解为

$$d^2s = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{Q-\chi} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-Q} dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1-Q} d^2\Omega, \quad (3)$$

$$\Phi = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{\chi/2},$$

其中 m 为该黑洞的质量(文献 21 中的 $2r_0$)。 $d^2\Omega = d^2\theta + \sin^2\theta d^2\varphi$ 为单位 2 球面的线元, 数字 Q 和 χ 满足下列约束:

$$Q^2 + \left(1 + \frac{\omega}{2} \right) \chi^2 - Q\chi - 1 = 0. \quad (4)$$

该解在 $r=0$ 处有一个曲率奇点。在 Q 和 χ 满足条件

$$2Q - \chi > 1 \quad \text{和} \quad Q \geq 2 \quad (5)$$

时, 该解代表一个非平庸的 BD 黑洞, 非平庸是指它与 Schwarzschild 黑洞不同。当 ω 趋于无穷大时, 由(4)式知 $Q=1, \chi=0$, 这时 Brans 类型-1 解就是 Schwarzschild 解。

如果先给出一个 BD 解的形式, 将它代入(1)式, 得到一个小超空间模型的拉氏(Lagrangian)量, 有可能从这个 Lagrangian 量出发, 得到经典解和量子解。我们发现, 从下面给出的解的形式正好可以得到一个经典 Brans 类型-1 解, 以及一个与之对应的量子 Brans 类型-1 解。设待求的 BD 理论的解有如下形式:

$$ds^2 = - \alpha^2(T) U^{-Q}(T) dt^2 + U^{Q-\chi}(T) dR^2 + V^{1-Q}(T) d\Omega^2, \quad (6)$$

$$\Phi = U^{\chi/2}(T),$$

且 Q 和 χ 满足(4)式, 其中 $\alpha(T)$ 为时移函数, $U(T)$ 和 $V(T)$ 为两个待求函数。在小超空间模型下, 将(6)式代入(1)式, 作用量可写为

$$I = \int dT \int dR \left[- \frac{1}{4\alpha} \left(\dot{U} V + \frac{1}{2} \frac{U}{V} \dot{V}^2 \right) + \frac{\alpha}{2} \right] \quad (7)$$

其中符号上的“·”表示 $\partial/\partial T$. 利用时空的 3+1 分解, 作用量可以进一步表为

$$I = \int dT \int dRL, \quad (8)$$

其中 L 为系统的 Lagrangian 函数

$$L = -\frac{1}{4\alpha} \left(\dot{U} V + \frac{1}{2} \frac{U}{V} \dot{V}^2 \right) + \frac{\alpha}{2}. \quad (9)$$

2.1. 经典解

将 (9) 式代入 Euler-Lagrang 方程, 可求得下列经典解:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \\ U &= -\left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right), \\ V^{1/2} &= T, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 m 为积分常数. 若假设 Q 为整数, 将 (10) 式代入 (6) 式, 并作变换

$$R \rightarrow (-1)^{Q/2} t, \quad T \rightarrow r, \quad (11)$$

则得到 (3) 式¹⁾, 这是一个黑洞解, m 为黑洞的质量. 用这种方法得到经典 Brans 类型-1 解要比通常的方法简单得多.

2.2. 量子解

另一方面, 用正则量子化方法可以从 Lagrangian 量 (9) 式得到 BD 引力理论的量子黑洞解. 由于 BD Lagrangian 量形式上与 Kenmoku 等人^[9] 给出的 Schwarzschild 黑洞的 Lagrangian 量一样, BD 量子化与 Schwarzschild 黑洞的量子化过程相同. 不过两者的物理实质不同. 特别要指出, 在 Lagrangian 量中已经包含了标量重力场 ϕ 的贡献, 在系统量子化后, 标量重力场也将自动量子化. 下面简要给出 BD 量子化的方法及结果.

定义两个新变量

$$\begin{aligned} z_+ &= UV^{1/2}, \\ z_- &= V^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $U = U(T), V = V(T)$ 仍为待求函数. 系统的哈密顿量和质量函数分别为

$$H = -2\Pi_+ \Pi_- - \frac{1}{2}, \quad (13)$$

$$M = 2\Pi_+ z_+ \Pi_+ + \frac{1}{2} z_-, \quad (14)$$

其中 Π_+, Π_- 为分别对应于 z_+ 和 z_- 的共轲动量.

在薛定谔表象中, 共轲动量变为算符

$$\hat{\Pi}_+ = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z_+}, \quad (15)$$

$$\hat{\Pi}_- = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z_-}, \quad (16)$$

相应地, 哈密顿量和质量函数也分别变成哈密顿算符 \hat{H} 和质量算符 \hat{M} , 它们作用到波函数上, 得

$$\begin{aligned} \hat{H}\Psi(z_+, z_-) &= \left(-2\hat{\Pi}_+ \hat{\Pi}_- - \frac{1}{2}\right) \Psi(z_+, z_-) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}\Psi(z_+, z_-) &= \left(2\hat{\Pi}_+ z_+ \hat{\Pi}_+ + \frac{1}{2} z_-\right) \Psi(z_+, z_-) \\ &= m\Psi(z_+, z_-). \end{aligned} \quad (18)$$

以上两式是两个本征方程, Ψ 为 \hat{H} 和 \hat{M} 的共同本征函数, 其本征值分别为 0 和 m . (17) 式就是著名的 Wheeler-DeWitt 方程在我们所取的小超空间中的形式. 求解本征方程 (17) (18), 可求得波函数的精确解

$$\begin{aligned} \Psi &= c H_0^{(2)}(z), \\ z &= \hbar^{-1} \sqrt{-z_+ (z_- - 2m)} \\ &= \hbar^{-1} \sqrt{-UV^{1/2} (V^{1/2} - 2m)}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 c 为积分常数, $H_0^{(2)}$ 为第二类汉克尔 (Hankel) 函数. 应当指出, 第一类汉克尔函数也是方程 (17), (18) 的解, 但由于它的经典对应与我们求得的经典解不同, 所以舍弃. 对应于 (经典) Brans 类型-1 解, 我们求得的量子解被称之为量子 Brans 类型-1 解. 此波函数解虽与文献 [9] 的解在形式上相同, 但由于度规的形式不同, 因此物理实质不同, 这可由下节 (第 3 节) 的讨论看出.

第二类汉克尔 $H_0^{(2)}(Z)$ 具有如下渐近性质: 当 Z 趋于零时, 有

$$|H_0^{(2)}(Z)|^2 \approx \frac{4}{\pi^2} \left(\ln \left(\frac{Z}{2} \right) \right)^2 \quad (Z \approx 0); \quad (20)$$

当 Z 很大时 ($Z \gg 0$), 有

¹⁾ 将 (10) 式代入 (5) 式, 并作 (11) 式的变换, 得 $ds^2 = (-1)^{Q/2} (-1 - 2m/r)^{Q-2} dt^2 + (1 - 2m/r)^Q dr^2 + r^2 (1 - 2m/r)^{-Q} d\Omega^2$ 和 $\phi = (-1)^{Q/2} (1 - 2m/r)^{Q/2}$. 从 ϕ 所满足的方程 (2) 可以看出, ϕ 与 $(-1)^{Q/2} \phi$ 表示的是同一个标量重力场. 当 Q 是整数时, ds^2 与 $(-1)^{Q-1} ds^2$ 相同.

$$|H_0^2(Z)|^2 \approx \frac{2}{\pi Z} \quad (Z \gg 1). \quad (21)$$

3. dBB 解释与量子视界的性质

3.1. 量子力学的 dBB 解释

一个一维运动的非相对论的单粒子体系, 它的哈密顿量是 $H = P^2/(2m) + V(x)$, 其中 P 为粒子的动量, m 为粒子的质量, $V(x)$ 为势函数. 这样的粒子运动演化遵循薛定谔方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t), \quad (22)$$

其中 $\Psi(x, t)$ 为波函数. 按哥本哈根学派的解释, $|\Psi(x, t)|^2$ 是在时空点 (x, t) 发现粒子的概率. 波函数可以写为

$$\Psi(x, t) = A(x, t) \exp\left(\frac{iS(x, t)}{\hbar}\right), \quad (23)$$

其中 $A(x, t)$ 和 $S(x, t)$ 为两个实函数. 在哥本哈根学派看来, $A(x, t)$ 为概率幅, 而 $S(x, t)$ 为没有观测意义的位相. 将 (23) 式代入 (22) 式, 可以将复数形式的微分方程 (22) 分解成两个实数形式的微分方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(A^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0. \quad (25)$$

(25) 式为关于概率幅 A^2 的连续性方程, 其中 $A^2 \frac{\nabla S}{m}$

为概率流, 可见 $\frac{\nabla S(x, t)}{m}$ 为概率流的速度场. (24)

式为关于位相 S 的方程, 在哥本哈根解释中没有意义.

dBB 重新考察 (24) 和 (25) 两式, 给出了他们对波函数的解释. 如果方程 (24) 中不出现 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ 项, 它正好就是经典粒子运动演化满足的 Hamilton-Jacobi 方程 (24) 和 (25) 式描述一个单粒子在势场 V 中的运动演化情况. dBB 指出, 当 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ 项存在时, 仍然可以把 (24) 式作为描述粒子运动演化的 Hamilton-Jacobi 方程. 与经典情况比较, 因为方程中多了 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ 项, 说明该方程给出的粒子轨道已不再是经典轨道, 而称其为量子轨道或 dBB 轨道. 量子力学的 dBB 解释正是基于 (24) 和 (25) 式, 而不

是像哥本哈根解释那样认为 (24) 式没有意义. 用 dBB 观点来看, 粒子运动的量子轨道是由一个新的势函数场决定的. 量子粒子处在一个新的外势中, 这个外势就是经典场 V 加上 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ 项. 于是, 很自

然地, dBB 解释中把 $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$ 称为量子势, 并记为 $V_q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A}$. 显然, 如果从薛定谔方程中解出波函数 Ψ (也就得到了 A), 直接从定义式就可以求出量子势 V_q .

前面讲过, 连续性方程中的 $\frac{\nabla S}{m}$ 为概率流的速度, 于是可得量子粒子的动量 $P = m\dot{x} = \nabla S(x, t)$, 其中 x 上的一点表示对时间求导. 所以一旦从薛定谔方程中解出波函数 Ψ (也就得到了 S), 积分上式就得到量子轨迹 $x(t)$.

3.2. BD 引力理论的 dBB 解释

在引力理论中薛定谔方程对应于 WD 方程, 波函数处于能量为零的定态. 类似于 (23) 式, 把求得的波函数 (19) 式分解为

$$\Psi(z_+, z_-) = R(z_+, z_-) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(z_+, z_-)\right), \quad (26)$$

其中波幅 $R(z_+, z_-)$ 和位相 $S(z_+, z_-)$ 为两个实函数. 将此式代入 WD 方程 (17), 可分别得其实部和虚部的方程

$$2 \frac{\partial S}{\partial z_+} \frac{\partial S}{\partial z_-} + \frac{1}{2} + V_q = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_-} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial z_+} \right) + \frac{\partial}{\partial z_+} \left(R^2 \frac{\partial S}{\partial z_-} \right) = 0, \quad (28)$$

其中函数 V_q 即为量子势, 它代表了量子效应的大小, 其定义为

$$V_q = -\frac{2\hbar^2}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial z_+ \partial z_-}. \quad (29)$$

将求得的波函数 (19) 式代入 (29) 式, 直接计算可得

$$V_q = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{\pi^2 Z^2 |H_0^2(Z)|^4} \right), \quad (30)$$

$$Z = \hbar^{-1} |V^{1/2} - 2m|.$$

当 $Z \gg 1$ 时, 将 (21) 式代入 (30) 式, 得 $V_q = 0$, 即离视界 ($V^{1/2} = 2m$) 很远的渐近平直区域, 量子效应趋于零, 这是合理的.

从 dBB 解释的观点看, 在量子情况下系统仍然

沿“轨道”运动,这样的“轨道”称为量子轨道.假设系统的量子轨道由 $z_+(T) = Z_+(T)$ 和 $z_-(T) = Z_-(T)$ 来描述,则按 dBB 的观点,系统的动量可定义为

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= -\frac{1}{2}\dot{Z}_- = \left. \frac{\partial S}{\partial z_+} \right|_{z_+ = Z_+, z_- = Z_-}, \\ \Pi_- &= -\frac{1}{2}\dot{Z}_+ = \left. \frac{\partial S}{\partial z_-} \right|_{z_+ = Z_+, z_- = Z_-}, \end{aligned} \quad (31)$$

其中符号上的“ \cdot ”表示 $\partial/\partial T$.通过求解方程(31),就能得到量子轨迹.将波函数(19)式代入上式,可以求得量子轨迹为

$$U = -\left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi}{2} \int Z |H_0^2(\chi(Z))|^2 dV^{1/2}, \\ Z &= \hbar^{-1} |V^{1/2} - 2m|. \end{aligned} \quad (33)$$

(32)式中的积分常数取为 -1 ,以便在量子效应可以忽略的区域量子轨迹能与经典轨迹符合.事实上,量子轨迹(32)式与经典轨迹(10)式中的第2式完全一致.将汉克尔函数的渐近表示式(21)代入(33)式,可以看出在 $Z \gg 1$ 区域, $T = V^{1/2}$,这正是经典表示式(10)中的第3式.

从 BD 解的一般形式(6)式可以看出,事件视界在 $U = 0$ 处.由于经典轨迹(10)式中的第2式和量子轨迹(32)式完全相同,所以对经典视界和量子视界处均有 $V^{1/2} = 2m$.

下面研究径向光在经典与量子几何背景上的行为.这里把光本身当成几何背景上的经典测试粒子.从径向光的类光条件 $ds^2 = 0$ 得到

$$\frac{dR}{dT} = \pm U^{-Q+\chi/2}. \quad (34)$$

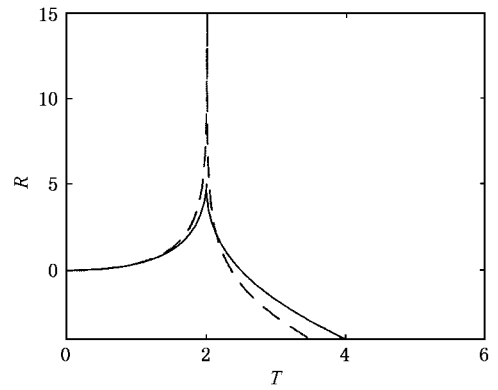
在视界内, $V^{1/2} < 2m$, R 为空间坐标, T 为时间坐标.在视界外, $V^{1/2} > 2m$, T 为空间坐标, R 为时间坐标.在经典情形下, $T = V^{1/2}$ (34)式变为

$$R - R_0 = \pm \int \left(1 - \frac{2m}{T}\right)^{-Q+\chi/2} dT. \quad (35)$$

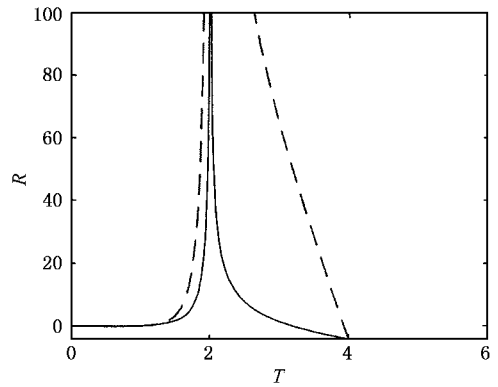
在量子情形下(34)式变为

$$\begin{aligned} R - R_0 &= \mp \int \frac{\pi}{2\hbar} (V^{1/2})^{Q-\chi/2} |2m - V^{1/2}|^{1-Q+\chi/2} \\ &\quad \times |H_0^2(\chi(Z))|^2 dV^{1/2}, \\ Z &= \hbar^{-1} |2m - V^{1/2}|, \end{aligned} \quad (36)$$

其中 R_0 为积分常数.当 $Z \gg 1$ 时(36)与(35)式一致.作为例子,图1示出某些 Q, χ 取值对应的 $R-T$ 关系图.



(a) $Q - \chi/2 = 1$



(b) $Q - \chi/2 = 2$

图1 径向光的 $R-T$ 关系图. -----对应经典黑洞背景, ——对应量子黑洞背景.单位制为 $c = \hbar = G = 1$,且 $m = 1$

4. 量子视界的表面重力加速度

量子黑洞解由(6)(32)和(33)式构成.在视界外, $V^{1/2} > 2m$, $U = -(1 - 2m/V^{1/2}) < 0$,此时 R 为时间, T 为空间.为了表示方便,可作变换 $R \rightarrow (-1)^{\chi/2} t, T \rightarrow r$,则外部量子黑洞解变为

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{Q-\chi} dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{-Q} dr^2 \\ &\quad + \mathcal{K}(r) \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{1-Q} d\Omega^2, \\ \Phi &= \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{\chi/2}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $V = \mathcal{K}(r)$ 由(33)式确定(注意(33)式中的 T 现在为 r).视界上的表面重力 κ 定义为^[22]

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_a \xi^a) (\nabla_b \xi^b)$$

$$= -\frac{1}{2} g^{ab} g_{cd} \Gamma_{ae}^c \xi^e \Gamma_{bf}^d \xi^f, \quad (38)$$

其中 $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$ 为黑洞的类时 Killing 场, 上式等号右边在视界上取值. 直接计算得

$$\kappa = (Q - \chi) \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{Q-\chi/2-1} \frac{2m}{V} \frac{\partial V^{1/2}}{\partial r}. \quad (39)$$

将(33)式代入, 得

$$\kappa = 4m\hbar(Q - \chi)V^{-3/2} \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{Q-\chi/2-2} \times |H_0^{(2)}(Z)|^{-2}. \quad (40)$$

由于上式在视界上取值, 可将第 2 类汉克尔的渐近形式(20)式代入, 得

$$\kappa = \frac{\hbar m}{2\pi} (Q - \chi) V^{-3/2} \left(1 - \frac{2m}{V^{1/2}}\right)^{Q-\chi/2-2} \times \left(\ln\left(\frac{1}{2\hbar}(V^{1/2} - 2m)\right)\right)^{-2}. \quad (41)$$

(41)式在视界 $V^{1/2} = 2m$ 处取值. 当 $Q - \chi/2 - 2 \geq 0$ 时(41)式给出 $\kappa = 0$; 当 $Q - \chi/2 - 2 \leq 0$ 时, $\kappa \rightarrow \infty$. 表面重力加速度总是奇异的. 特别地, 当 $Q = 1, \chi = 0$ 时, BD 黑洞就是 Schwarzschild 黑洞, 此时的 dBB 量子 Schwarzschild 黑洞的表面重力加速度也是奇异的.

5. 结果与讨论

从(30)式以及(20)(21)两式, 可以看出, 量子效应在视界处最大, 在很远的渐近平直区域为零.

无论是在经典几何背景还是量子几何背景上, 径向光的行为都与数 Q 和 χ 有关. 作为例子, 图 1 中仅示出 $Q - \chi/2 = 1$ 和 $Q - \chi/2 = 2$ 两种情况下径向光的行为. 从图 1(a) ($Q - \chi/2 = 1$) 可看出, 在经典情况下, 无穷远观察者会看到光在视界处发生无限红移, 而量子情况下, 不会看到量子视界处发生无限红移. Schwarzschild 黑洞 ($Q = 1, \chi = 0$) 就属于这一类. 图 1(b) 表明, 在 $Q - \chi/2 = 2$ 时, 不论经典情况还是量子情况, 无穷远观察者都能看到光在视界处的无限红移.

黑洞热力学把视界表面重力加速度当作温度. Hawking 效应^[23] 指出黑洞的确有热辐射, 其温度对应于事件视界的表面重力加速度. 对黑洞的热辐射问题人们作了大量的研究, 不仅研究了 Schwarzschild 等静态黑洞, 还研究了动态黑洞的热辐射, 不仅研究了黑洞中标量场的热辐射, 还研究了狄拉克场的热辐射, 例如, 可参阅文献[24—27].

本文发现, dBB 量子化 Brans 类型-1 黑洞的表面重力是奇异的, 这说明该 dBB 量子黑洞的温度是奇异的, 没有热力学性质. 特别在 Schwarzschild 黑洞的情形时 ($\omega \rightarrow \infty$ 即 $Q = 1, \chi = 0$), dBB 量子 Schwarzschild 黑洞的“温度”为无穷大. 但是人们普遍认为, 量子化黑洞应该有热力学性质, 所以看来用 dBB 量子化来讨论黑洞的热力学性质可能不适宜.

- [1] Arnowitt R, Deser S and Misner C W 1962 *In Gravitation: An Introduction to Current Research* ed by L Witten (New York: Wiley)
- [2] Dirac P A M 1964 *Lectures on Quantum Mechanics* (New York: Yeshiva University)
- [3] Wheeler J A 1968 *In Batelle Rencontres: 1967 Lectures in Mathematics and Physics* ed by C DeWitt and J A Wheeler (New York: Benjamin)
- [4] DeWitt B S 1967 *Phys. Rev.* **160** 1113
- [5] Fischler W, Morgan D and Polchinski J 1990 *Phys. Rev. D* **42** 4042
- [6] Kuchar K V 1994 *Phys. Rev. D* **50** 3961
- [7] Berger B K, Chitre D M, Moncrief V E and Nutku Y 1972 *Phys. Rev. D* **5** 2467
- Lund F 1973 *Phys. Rev. D* **8** 3247
- Kastrup H A and Thiemann T 1994 *Nucl. Phys. B* **425** 665
- Thiemann T 1995 *Nucl. Phys. B* **436** 681

- Louko J and Winters-Hilt S N 1996 *Phys. Rev. D* **54** 2647
- Makela J and Repo P 1998 *Phys. Rev. D* **57** 4899
- [8] Nakamura K, Konno S, Oshiro Y and Tomimatsu A 1993 *Prog. Theor. Phys.* **90** 861
- [9] Kenmoku M, Kubotani H, Takasugi E and Yamazaki Y 1998 *Phys. Rev. D* **57** 4925
- [10] Kenmoku M, Kubotani H, Takasugi E and Yamazaki Y 1999 *gr-qc/9906056*
- [11] de Broglie L 1956 *Tentative D'Interpretation Causale et Nonlineaire de la Mecanique Ondulaire* (Paris: Gauthier-Villars)
- [12] Bohm D 1952 *Phys. Rev.* **85** 160
- Bohm D 1952 *Phys. Rev.* **85** 180
- [13] Wink J C 1992 *Nucl. Phys. B* **369** 707
- [14] Horiguchi T 1994 *Mod. Phys. Lett. A* **9** 1429
- [15] Alwis S P and MacIntire D A 1994 *Phys. Rev. D* **50** 5164
- [16] Kenmoku M, Otsuki K, Shigemoto K and Uehara K 1996 *Class. Quantum Grav.* **13** 1751

- [17] Brans C and Dicke R H 1961 *Phys. Rev.* **124** 925
- [18] Brans C 1962 *Phys. Rev.* **125** 2194
- [19] Hawking S W 1972 *Commun. Math. Phys.* **25** 167
- [20] Campanelli M and Lousto C O 1993 *Int. J. Mod. Phys. D* **2** 451
- [21] Kim H 1997 *Nuovo Cim. B* **112** 329
- [22] Wald R M 1984 *General Relativity* (Chicago :Chicago University Press)
- [23] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [24] Dai X X and Zao Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 869 (in Chinese) [戴宪新、赵 崢 1992 物理学报 **41** 869]
- [25] Luo Z Q and Zao Z 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 506 (in Chinese) [罗志强、赵 崢 1993 物理学报 **42** 506]
- [26] Ma Y and Yang S Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2280 (in Chinese) [马 勇、杨树政 1997 物理学报 **46** 2280]
- [27] Zao Z , Liu W B and Jiang Y L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 586 (in Chinese) [赵 崢、刘文彪、蒋亚铃 2000 物理学报 **49** 586]

de Broglie-Bohm interpretation for the wave function of the static spherical symmetric black holes in Brans-Dicke gravity^{*}

Wang Bo-Bo^{1,2)} Liu Liao²⁾

¹⁾ Department of Physics , Northern Jiaotong University , Beijing 100044 , China)

²⁾ Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China)

(Received 19 February 2001 ; revised manuscript received 12 November 2001)

Abstract

The de Broglie-Bohm (dBB) interpretation is introduced into the Brans-Dicke (BD) gravity, where the wave function of the Brans type 1 quantum black holes is obtained in minisuperspace model. The quantum trajectory and potential of the Brans type 1 are also given. On the quantum background geometry, the behaviour of a null ray is investigated. We find that the temperature of the quantum black hole of the Brans type 1 is singular. However the BD theory should reduce to the Einstein gravity when the parameter ω of the BD theory approaches infinity. It seems that the dBB interpretation cannot apply to the black hole.

Keywords : de Broglie-Bohm interpretation , Brans-Dicke gravity , quantum trajectory , minisuperspace model

PACC : 9760L , 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19473005).