第 51 卷 第 8 期 2002 年 8 月
1000-3290/2002/51(08)/1671-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.8, August, 2002

色散长波方程和变形色散水波方程特殊形状的多孤子解*

那仁满都拉

(吉林大学物理科学学院, 长春 130023)

(内蒙古民族大学理工学院物理系, 通辽 028043)

(2001 年 12 月 14 日收到; 2002 年 1 月 26 日收到修改稿)

进一步拓广使用齐次平衡法并对关键的操作步骤进行了改进, 从而简便地求出了色散长波方程和变形色散水波方程的一种新的特殊形状的多孤子解。而张解放等得到的多孤子解是本文结果的特殊情况.

关键词: 齐次平衡法, 特殊形状的多孤子解, 色散长波方程, 变形色散水波方程

PACC: 0340K, 0290

1. 引 言

在许多领域内的很多科学问题的研究最终可用非线性演化方程(组)来描述, 然而如何求解它们、特别是如何更简便地求解它们, 一直是物理学家和数学家研究的重要课题. 到目前人们已提出了许多求解非线性演化方程(组)的有效方法, 如反散射方法、Backlund 变换法、Hirota 方法以及齐次平衡法等. 其中齐次平衡法[1—3]是近年来发展的求非线性演化方程(组)孤波解的一种十分有效的新方法, 该方法在求解非线性方程的过程中得到了广泛的应用[4—11]. 如在文献[9—11]中拓广了该方法的应用, 求出了长水波近似方程、色散长波方程以及变形色散水波方程等重要方程的一种多孤子解. 本文进一步拓广使用齐次平衡法并对关键的操作步骤进行了改进, 从而简便地求出了色散长波方程和变形色散水波方程的一种新的特殊形状的多孤子解. 而张解放等得到的多孤子解是本文结果的特殊情况.

2. 非线性演化方程的多孤子解

2.1. 色散长波方程的多孤子解

文献[10]中给出的色散长波方程为

$$u_t + \eta_x + uu_x = 0, \tag{1}$$

$$\eta_t + (u\eta + u + u_{xx})_x = 0, \tag{2}$$

依齐次平衡法的基本思想, 我们可以设方程(1)和(2)具有如下形式的解:

$$u(x,t) = f'(\varphi)\varphi_x + a, \tag{3}$$

$$\eta(x,t) = \lambda(f''(\varphi)\varphi_x^2 + f'(\varphi)\varphi_{xx}) + b \quad (\lambda \neq 0), \tag{4}$$

式中 $f(\varphi)$, $\varphi(x,t)$ 为待定函数, λ, a, b 为待定常数. 按照齐次平衡法的基本操作步骤[1—3], 下面就应该把(3)和(4)代入(1)和(2)式进行推算, 得出关于 $f(\varphi)$ 的常微分方程. 但在这里我们改进这一操作步骤, 因为这样的操作很繁琐. 其实, 我们仔细观察(3)和(4)式就不难发现 $u(x,t)$ 与 $\eta(x,t)$ 之间存在一种简单的变换关系, 即

$$\eta = \lambda u_x + b. \tag{5}$$

因此利用变换关系(5)式, 由方程(1)和(2)可得到

$$u_t + uu_x + \lambda u_{xx} = 0, \tag{6}$$

$$\left(u_t + uu_x + \frac{b+1}{\lambda}u + \frac{1}{\lambda}u_{xx}\right)_x = 0. \tag{7}$$

如果 $\lambda = \pm 1$, $b = -1$ 那么(6)和(7)式就变成关于 u 的 Burgers 方程

$$u_t + uu_x \pm u_{xx} = 0. \tag{8}$$

这样下面的问题就是求解简单的 Burgers 方程(8)的问题. 我们将(3)式代入(8)式整理后可得到

* 内蒙古自治区自然科学基金(批准号: 199702)资助的课题.

$$u_t + uu_x \pm u_{xx} = (f''f' \pm f''')\varphi_x^3 + (f''\varphi_x\varphi_t + af''\varphi_x^2 + f'^2\varphi_{xx}\varphi_x \pm 3f''\varphi_{xx}\varphi_x) + (\varphi_{xt} + a\varphi_{xx} \pm \varphi_{xxx})f' = 0. \tag{9}$$

令上式中 φ_x^3 项的系数为零,可得到

$$f''f' \pm f''' = 0. \tag{10}$$

解之得到

$$f = \pm 2\ln\varphi. \tag{11}$$

从而

$$f'^2 = \mp 2f''. \tag{12}$$

将(12)式代入(9)式,并利用(10)式,得到

$$u_t + uu_x \pm u_{xx} = (\varphi_x\varphi_t + a\varphi_x^2 \pm \varphi_{xx}\varphi_x)f'' + (\varphi_{xt} + a\varphi_{xx} \pm \varphi_{xxx})f' = 0. \tag{13}$$

令 f'',f'项的系数为零,可得到

$$\varphi_x(\varphi_t + a\varphi_x \pm \varphi_{xx}) = 0, \tag{14}$$

$$(\varphi_t + a\varphi_x \pm \varphi_{xx})_x = 0. \tag{15}$$

根据文献[12],我们可设方程(14)和(15)具有如下形式的解:

$$\varphi(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_ix + N_it)\exp(k_ix + l_it), \tag{16}$$

式中 M_i,N_i,k_i 及 l_i 为待定常数.

把(16)式代入(14)和(15)式计算可得到

$$N_i = -(a \pm 2k_i)M_i, \tag{17}$$

$$M_i = \pm\sqrt{\mp(l_i + ak_i \pm k_i^2)}, \tag{18}$$

式中 a,k_i,l_i 为任意常数.

所以由(3)和(11)式以及(16)式,我们就得到方程(8)的特殊形状的多孤子解

$$u = \pm 2\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i\mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} + a, \tag{19}$$

式中

$$M_i = \pm\sqrt{\mp(l_i + ak_i \pm k_i^2)},$$

$$\zeta_i = x - (a \pm 2k_i)t, \qquad \xi_i = k_ix + l_it.$$

利用变换关系(5)式及解(19)式直接可得色散长波方程(1)和(2)的一种特殊形状的多孤子解

$$u = \pm 2\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i\mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} + a, \tag{20}$$

$$\eta = 2\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i^2\mathrm{ch}(M_i\zeta_i) + 2M_ik_i\mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i^2\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} - 2\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}[M_i\mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)\right\}^2}{[1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)]^2} - 1, \tag{21}$$

式中

$$M_i = \pm\sqrt{\mp(l_i + ak_i \pm k_i^2)},$$

$$\zeta_i = x - (a \pm 2k_i)t, \qquad \xi_i = k_ix + l_it.$$

这是本文给出的该方程新的一种特殊形状的多孤子解.当 $M_i = 0$ 即 $l_i = -(ak_i \pm k_i^2)$ 时,这解(20)和(21)式就变成文献[10]中得到的多孤子解.所以张解放得到的多孤子解是本文结果的特殊情况.

2.2. 变形色散水波方程的多孤子解

文献[11]中给出的变形色散水波方程为

$$u_t + \frac{1}{4}v_{xx} - \frac{1}{2}(uv)_x = 0, \tag{22}$$

$$v_t + u_{xx} + 2uu_x - \frac{3}{2}vv_x = 0. \tag{23}$$

依齐次平衡法,可设方程(22)和(23)的解具有如下形式:

$$u = f'(\varphi)\varphi_x + a, \tag{24}$$

$$v = \lambda f'(\varphi)\varphi_x + b \quad (\lambda \neq 0), \tag{25}$$

式中 $f(\varphi)$,$\varphi(x,t)$ 为待定函数,λ,a,b 为待定常数.

同样,从(24)和(25)式我们可以得出如下变换:

$$v = \lambda u + b - \lambda a. \tag{26}$$

把(26)式代入方程(22)和(23)可得到

$$u_t + \frac{\lambda}{4}u_{xx} - \lambda u u_x - \frac{1}{2}(b - \lambda a)u_x = 0, \tag{27}$$

$$u_t + \frac{1}{\lambda}u_{xx} + \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{3}{2}\lambda\right)uu_x - \frac{3}{2}(b - \lambda a)u_x = 0. \tag{28}$$

如果 $\lambda = \pm 2$,$b = \lambda a$,那么(27)和(28)式就变成关于 u 的 Burgers 方程

$$u_t \mp 2uu_x \pm \frac{1}{2}u_{xx} = 0. \tag{29}$$

与方程(8)一样求解方程(29),就不难得到它的一种特殊形状的多孤子解

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i \mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i \mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} + a, \tag{30}$$

式中

$$M_i = \pm\sqrt{2\left(\mp l_i + 2ak_i - \frac{1}{2}k_i^2\right)},$$

$$\zeta_i = x \pm (2a - k_i)t, \qquad \xi_i = k_i x + l_i t.$$

所以变形色散水波方程(22)和(23)的一种特殊形状的多孤子解为

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i \mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i \mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} + a, \tag{31}$$

$$u = \mp\frac{\sum_{i=1}^{n}[M_i \mathrm{sh}(M_i\zeta_i) + k_i \mathrm{ch}(M_i\zeta_i)]\exp(\xi_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{ch}(M_i\zeta_i)\exp(\xi_i)} \pm 2a, \tag{32}$$

式中

$$M_i = \pm\sqrt{2\left(\mp l_i + 2ak_i - \frac{1}{2}k_i^2\right)},$$

$$\zeta_i = x \pm (2a - k_i)t, \qquad \xi_i = k_i x + l_i t.$$

当 $M_i = 0$ 即 $l_i = \pm\left(2ak_i - \frac{1}{2}k_i^2\right)$ 时,解(31)和(32)式同样能变成文献[11]中得到的多孤子解.

另外,对于方程(14)和(15)的解,我们也可以设为

$$\varphi(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\cos(M_i x + N_i t)\exp(k_i x + l_i t)$$

或

$$\varphi(x,t) = 1 + \sum_{i=1}^{n}\sin(M_i x + N_i t)\exp(k_i x + l_i t). \tag{33}$$

这时我们通过与以上同样的操作过程,能够得到色散长波方程和变形色散水波方程的其他特殊形状的多孤子解.这里我们不作详细计算.

3. 结　　语

我们通过对齐次平衡法的一些关键步骤进行改进,简便地求出了色散长波方程和变形色散水波方程的一种新的特殊形状的多孤子解,而且这种解比文献[10,11]中得到的解更具有一般性.实践证明我们这种方法同样适用于求解其他非线性耦合方程,如长水波近似方程、变更 Boussinesq 方程、Kupershmidt 方程以及 Whitham-Broer-Kaup 浅水波方程等等,这些在另文详细讨论.

[1] Wang M L 1995 *Phys*. *Lett*. A **199** 169

[2] Fan E G and Zhang H Q 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 1254(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1254]

[3] Fan E G and Zhang H Q 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 353(in Chinese)[范恩贵、张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[4] Xu B Z *et al* 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1946(in Chinese)[徐炳振等 1998 物理学报 **47** 1946]

[5] Fan E G 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1409(in Chinese)[范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[6] Li Z B and Pan S Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 402(in Chinese)[李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]

[7] Zhang J F 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 893

[8] Bai C L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 1091

[9] Zhang J F 1998 *Acta Phys*. *Sin*. **47** 1416(in Chinese)[张解放 1998 物理学报 **47** 1416]

[10] Zhang J F 1999 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **16** 4

[11] Yan Z Y and Zhang H Q 2000 *Acta Math*. *Phys*. **20** 210(in Chinese)[闫振亚、张鸿庆 2000 数学物理学报 **20** 210]

[12] Wang L Y and Lou S Y 2000 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **33** 683

A special type of multisoliton solutions for the dispersive long-wave equations and the modified dispersive water-wave equations*

Naranmandula
(College of Physical Science, Jilin University, Changchun 130023, China)
(Department of Physics, College of Science and Engineering, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao 028043, China)

(Received 14 December 2001; revised manuscript received 26 January 2002)

Abstract

By improving some procedure of the homogeneous balance method, we obtain a special type of multisoliton solutions for the dispersive long-wave equations and the modified dispersive water-wave equations. The Zhang Jie-Fang's results are special cases of our results.

Keywords: homogeneous balance method, special type of multisoliton solutions, dispersive long-wave equations, modified dispersive water waves equations

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 199702).