第 51 卷 第 8 期 2002 年 8 月
1000-3290/2002/51(08)/1901-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.8, August, 2002

一般球对称带电蒸发黑洞的熵*

宋太平　侯晨霞　黄金书

(南阳师范学院物理系，南阳　473061)

(2001 年 12 月 15 日收到；2002 年 2 月 4 日收到修改稿)

从一般球对称带电蒸发黑洞的时空线元和零曲面方程出发，得到了该黑洞的视界. 利用 Klein-Gordon 方程求得波数，进而采用 Wenzel-Kramers-Brillouin 近似方法和薄膜 brick-wall 模型，求出了一般球对称带电蒸发黑洞的熵，所得的熵正好与该黑洞的视界面积成正比.

关键词：黑洞，Klein-Gordon 方程，熵，薄膜 brick-wall 模型，视界

PACC：9760L，0420

1. 引　　言

自从 Bekenstein 和 Hawking 提出了黑洞的熵与它的视界面积成正比以来[1—3]，人们就一直致力于探求黑洞熵的统计起源，因而产生了许多计算黑洞熵的方法. 其中最为成功的方法，当属 1985 年由 'tHooft提出的计算黑洞熵的 brick-wall 模型[4]，这也是人们在计算黑洞熵的时候用得最多的一种方法. 'tHooft用这种方法研究了 Schwarzchild 黑洞背景下自由标量场的统计性质，得到 Schwarzchild 黑洞的熵与它的视界面积之间的一个表达式，由此表达式可以看出，黑洞的熵与它的视界面积成正比，在适当选取截断因子之后，黑洞的熵可以写成 $S = A_{\rm H}/4$ 的形式. 此后，人们就用 brick-wall 模型研究各种黑洞的熵，并取得许多有价值的成果[5—10]. 但是在研究中发现 'tHooft 的 brick-wall 模型只能适用处于热平衡态的黑洞，而对处于非热平衡态的黑洞就显得无能为力了，并且在用这种模型计算熵的过程中，一些项的取舍也常常令人困惑不解. 为了解决这些困难，李翔和赵峥在 2000 年提出了薄膜 brick-wall 模型[11,12]，这种模型认为，黑洞的熵来自于视界附近的一个薄层中量子场的贡献，因此薄膜 brick-wall 模型不仅能用于计算静态黑洞和稳态黑洞的熵，而且也可以用来计算处于非热平衡态的动态黑洞的熵.

本文中将尝试用文献[11,12]中的薄膜 brick-wall 模型计算一般球对称带电蒸发黑洞的熵，在适当地选择截断因子之后，得到了这种黑洞熵的表达式. 从表达式可以看出所得到的黑洞熵与其视界面积成正比. 同时从该黑洞的熵既可以返回一般球对称蒸发黑洞的结论，也可以回到球对称带电蒸发黑洞的结论.

2. 一般球对称带电蒸发黑洞的时空线元与视界

文献[13]给出了一般球对称带电蒸发黑洞的时空线元为

$$
{\rm d}s^2 = -{\rm e}^{2\psi}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right){\rm d}v^2 + 2{\rm e}^{\psi}{\rm d}v{\rm d}r + r^2{\rm d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta{\rm d}\varphi^2 , \qquad (1)
$$

式中 $\psi=\psi(r,v)$，v 为超前爱丁顿坐标，$M=M(r,v)$为黑洞的质量，$Q=Q(v)$为黑洞的电荷.

由(1)式可得该黑洞的度规行列式和不为零的逆变度规分量分别为

$$
g = -{\rm e}^{2\psi}r^4\sin^2\theta , \qquad (2)
$$

$$
g^{01}=g^{10}={\rm e}^{-\psi},\quad g^{11}=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2},
$$

$$
g^{22}=r^{-2},\quad g^{33}=(r\sin\theta)^{-2}. \qquad (3)
$$

零曲面应满足方程

$$
g^{\mu\nu}\frac{\partial D}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial D}{\partial x^{\nu}} = 0. \qquad (4)
$$

考虑到一般球对称带电蒸发黑洞的时空具有球

* 国家自然科学基金(批准号：10073002)、河南省教育厅自然科学基金(批准号：98160001)资助的课题.

对称性,零曲面方程可以简化为

$$2g^{01}\frac{\partial D}{\partial v}\frac{\partial D}{\partial r}+g^{11}\left(\frac{\partial D}{\partial r}\right)^2=0. \tag{5}$$

由于其事件视界表面方程可以写成

$$D(r,v)=0 \text{ 或 } r=r(v), \tag{6}$$

所以

$$\frac{\partial D}{\partial r}=-\frac{\partial D}{\partial v}\bigg/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}=-\frac{1}{\dot{r}}\frac{\partial D}{\partial v}, \tag{7}$$

式中

$$\dot{r}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}v}. \tag{8}$$

把(3)和(7)式代入(5)式即可得到视界方程

$$(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})r_{\mathrm{H}}^2-2Mr_{\mathrm{H}}+Q^2=0, \tag{9}$$

解之得

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{M\pm\sqrt{M^2-(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})Q^2}}{1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}}. \tag{10}$$

由于只有外视界是事件视界,所以

$$r_{\mathrm{H}}=\frac{M+\sqrt{M^2-(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})Q^2}}{1-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}}, \tag{11}$$

式中

$$M=M(r=r_{\mathrm{H}},v),\quad \psi=\psi(r=r_{\mathrm{H}},v). \tag{12}$$

3. Wenzel-Kramers-Brillouin(缩写为 WKB)近似求波数

做如下的坐标变换[14]:

$$R=r-r_{\mathrm{H}}(v), \tag{13}$$

$$\mathrm{d}R=\mathrm{d}r-\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{d}v, \tag{14}$$

代入(1)式得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\mathrm{e}^{2\psi}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)\mathrm{d}v^2\\&\quad+2\mathrm{e}^{\psi}\mathrm{d}v\mathrm{d}R+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\\&=\hat{g}_{00}\mathrm{d}v^2+2\hat{g}_{01}\mathrm{d}v\mathrm{d}R+\hat{g}_{22}\mathrm{d}\theta^2+\hat{g}_{33}\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned} \tag{15}$$

式中

$$\begin{gathered}\hat{g}_{00}=-\mathrm{e}^{2\psi}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right),\\ \hat{g}_{01}=\hat{g}_{10}=\mathrm{e}^{\psi},\\ \hat{g}_{22}=r^2,\quad \hat{g}_{33}=r^2\sin^2\theta.\end{gathered} \tag{16}$$

可以证明(15)式中

$$\hat{g}_{00}=-\mathrm{e}^{2\psi}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)=0 \tag{17}$$

正好为视界方程(9).

由时空线元(15)式可得该时空的度规行列式和逆变度规各分量分别为

$$\hat{g}=-\mathrm{e}^{2\psi}r^4\sin^2\theta, \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\hat{g}^{01}=\hat{g}^{10}=\mathrm{e}^{-\psi},\quad \hat{g}^{11}=1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi},\\ \hat{g}^{22}=r^{-2},\quad \hat{g}^{33}=(r\sin\theta)^{-2}.\end{gathered} \tag{19}$$

把(18)和(19)式代入带电粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-\mathrm{i}eA_{\mu}\right)\left[\sqrt{-\hat{g}}\hat{g}^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-\mathrm{i}eA_{\mu}\right)\right]\Phi-\mu_0^2\Phi=0. \tag{20}$$

把(20)式展开,并考虑到时空的球对称性

$$A_{\mu}=(A_0,A_1,A_2,A_3)=\left(-\frac{Q}{r},0,0,0\right), \tag{21}$$

(20)式可以转化为

$$\begin{aligned}&2\mathrm{e}^{-\psi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v\partial R}+\frac{2}{r}\mathrm{e}^{-\psi}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2}+\left[\left(\frac{2\mathrm{i}eQ}{r}-\dot{\psi}-\psi'\right)\mathrm{e}^{-\psi}+\frac{2}{r^2}\left(r-M-M'r\right.\right.\\&\left.\left.-2\dot{r}_{\mathrm{H}}r\mathrm{e}^{-\psi}+\dot{r}_{\mathrm{H}}r^2\psi'\mathrm{e}^{-\psi}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial R}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}-\left(\mu_0^2-\frac{\mathrm{i}eQ}{r^2}\mathrm{e}^{-\psi}+\frac{\mathrm{i}eQ}{r}\psi'\mathrm{e}^{-\psi}\right)\Phi=0,\end{aligned} \tag{22}$$

式中

$$\dot{\psi}=\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \psi'=\frac{\partial\psi}{\partial R},\quad M'=\frac{\partial M}{\partial R}. \tag{23}$$

由于一般球对称带电蒸发黑洞的时空是动态时空,利用 't Hooft 的 brick-wall 模型来计算黑洞的熵时,将会遇到无法克服的困难.因此可用改进后的薄膜 brick-wall 模型来计算黑洞的熵.这种模型认为,对黑洞的熵有贡献的是黑洞视界附近的一个薄层中的粒子,所以在求黑洞的熵时,只用在视界附近的一个薄层内求解,即在 $r_{\mathrm{H}}+\varepsilon<r<r_{\mathrm{H}}+\varepsilon+\delta$ 的范围内计算黑洞的熵,其中 ε 和 δ 都远远小于 r_{H}.虽然整个时空是动态时空,但是可以认为在该薄层内,系统处于平衡状态,因而可以按下式分离变量:

$$\Phi=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ev}f(R)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi), \tag{24}$$

式中

$$f(R) = e^{iS(R)}. \tag{25}$$

把(24)式代入(22)式可得径向方程为

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H e^{-\psi}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \left[2i\left(\frac{eQ}{r} - E\right)e^{-\psi} - (\dot{\psi} + \psi')e^{-\psi} + \frac{2}{r^2}(r - M - M'r - 2r\dot{r}_H e^{-\psi}\right.$$

$$\left. + \dot{r}_H r^2 \psi' e^{-\psi})\right]\frac{\partial f}{\partial R} + \frac{i}{r^2}(eQ - eQr\psi' - 2Er)e^{-\psi} f - \left[\mu_0^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right]f = 0. \tag{26}$$

由(25)式得到

$$\frac{\partial f}{\partial R} = i e^{iS(R)}\frac{dS}{dR} = i k_r e^{iS(R)}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial R^2} = i\frac{dk_r}{dR}e^{iS(R)} - k_r^2 e^{iS(R)}, \tag{28}$$

式中

$$k_r = \frac{dS}{dR}, \tag{29}$$

k_r 叫做径向波数.把(27)和(28)式代入(26)式,并采用 WKB 近似,即可得到波数 k_r 满足的方程

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - 2\dot{r}_H e^{-\psi}\right)k_r^2 - 2\left(E - \frac{eQ}{r}\right)e^{-\psi}k_r + \left[\mu_0^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}\right] = 0, \tag{30}$$

解之得径向波数

$$k_r^{\pm} = \frac{(E - eQ/r)e^{-\psi} \pm \{(E - eQ/r)^2 e^{-2\psi} - (1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi})[\mu_0^2 + l(l+1)/r^2]\}^{1/2}}{1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi}}. \tag{31}$$

4. 一般球对称带电蒸发黑洞的熵

由于在计算熵时只用计算黑洞事件视界附近的一个薄层内的粒子的贡献,即只在 $r_H + \varepsilon < r < r_H + \varepsilon + \delta$ 的范围内计算黑洞的熵,其中 ε 和 δ 都远远小于 r_H.根据半经典量子化条件[12]

$$2n\pi = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} k_r^+ dR + \int_{\varepsilon+\delta}^{\varepsilon} k_r^- dR = 2\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} K_r dR, \tag{32}$$

式中

$$K_r = \frac{\{(E - eQ/r)^2 e^{-2\psi} - (1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi})[\mu_0^2 + l(l+1)/r^2]\}^{1/2}}{1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi}}. \tag{33}$$

令

$$E' = E - \frac{eQ}{r}, \tag{34}$$

则(32)式可以转化为

$$n = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta} \frac{\{E'^2 e^{-2\psi} - (1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi})[\mu_0^2 + l(l+1)/r^2]\}^{1/2}}{1 - 2M/r + Q^2/r^2 - 2\dot{r}_H e^{-\psi}}dR. \tag{35}$$

根据统计物理可知,系统的自由能满足

$$\beta F = \sum_{n,l,m} \ln(1 - e^{-\beta E'}). \tag{36}$$

把系统的能态视为连续分布,则上式的求和可改为积分

$$\begin{aligned}\beta F &= \int_0^{\infty} dE' g(E') \ln(1 - e^{-\beta E'}) \\ &= \int_0^{\infty} d\Gamma(E') \ln(1 - e^{-\beta E'}),\end{aligned}$$

分部积分求得

$$\beta F = -\beta\int_0^\infty \frac{\Gamma(E')\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'}-1}, \tag{37}$$

式中 $\Gamma(E')$ 为系统的能量小于 E' 的微观状态数，$g(E') = \mathrm{d}\Gamma(E')/\mathrm{d}E'$ 为态密度.

$$\Gamma(E') = \int_l (2l+1)\mathrm{d}l \frac{1}{\pi}\int_R K_r \mathrm{d}R. \tag{38}$$

把(38)式代入(37)式得到

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}E'\int_R \mathrm{d}R\int_l (2l+1)\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E'}-1}\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)^{-1}\Big\{E'^2\mathrm{e}^{-2\psi} \\ &\quad -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)\left[\mu_0^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\Big\}^{1/2}\mathrm{d}l \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'}-1}\int_R\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)^{-1/2}\mathrm{d}R\int_l\Big\{\Big(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2} \\ &\quad -2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\Big)^{-1}(E'\mathrm{e}^{-\psi})^2-\left[\mu_0^2+\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\Big\}^{1/2}(2l+1)\mathrm{d}l. \end{aligned} \tag{39}$$

在计算(39)式中对 l 的积分时，积分下限为 0，上限 l' 就是使得上式中的根号有意义时 l 的取值. 即

$$\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)^{-1}(E'\mathrm{e}^{-\psi})^2-\mu_0^2-\frac{l'(l'+1)}{r^2} = 0. \tag{40}$$

因此(39)式的积分可化为

$$F = -\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'}-1}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} r^2\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)^{-2}\left[(E'\mathrm{e}^{-\psi})^2-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\right)\mu_0^2\right]^{3/2}\mathrm{d}R. \tag{41}$$

应用定积分中的中值定理得到

$$\begin{aligned} F &= -\frac{2}{3\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{e}^{\beta E'}-1}\left[(E'\mathrm{e}^{-\psi})^2-\left(1-\frac{2M}{r+\eta}+\frac{Q^2}{(r+\eta)^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right)\mu_0^2\right]^{3/2}\frac{(r_{\mathrm{H}}+\eta)^2\delta}{\left[1-\dfrac{2M}{r_{\mathrm{H}}+\eta}+\dfrac{Q^2}{(r+\eta)^2}-2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\right]^2} \\ &= -\frac{2\pi^3}{45}\frac{\mathrm{e}^{-3\psi}}{\beta^4}\frac{r_{\mathrm{H}}^6\delta}{4\eta^2(r_{\mathrm{H}}-M-2\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})^2}, \end{aligned} \tag{42}$$

式中 $\varepsilon<\eta<\varepsilon+\delta$，$\psi=\psi(r_{\mathrm{H}},v)$，$M=M(r_{\mathrm{H}},v)$. 且在上面的计算过程中也利用了(9)式.

由系综理论可知，系统的熵为

$$S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta} = \frac{2\pi^3}{45}\frac{r_{\mathrm{H}}^6\delta}{\eta^2(r_{\mathrm{H}}-M-2\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})^2}\frac{\mathrm{e}^{-3\psi}}{\beta^3}. \tag{43}$$

适当地选取 δ 和 η 的取值，使得

$$\frac{\delta}{\eta^2} = 90\beta, \tag{44}$$

则(43)式可化为

$$S = 4\pi^3\frac{r_{\mathrm{H}}^6\mathrm{e}^{-3\psi}}{(r_{\mathrm{H}}-M-2\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi})^2}\frac{1}{\beta^2}. \tag{45}$$

由文献[15]中得到的结论

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} = T^2 = \frac{\kappa^2}{(2\pi)^2} &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{[\psi'(r_{\mathrm{H}}^2-2Mr_{\mathrm{H}}+Q^2)+2(r_{\mathrm{H}}-M-M'r_{\mathrm{H}})-4\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}]^2}{[4Mr_{\mathrm{H}}+2r_{\mathrm{H}}^2(\mathrm{e}^{-\psi}-1)-2Q^2]^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\frac{[r_{\mathrm{H}}-M-M'r_{\mathrm{H}}-\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}(2-\psi'r_{\mathrm{H}})]^2}{4r_{\mathrm{H}}^4\mathrm{e}^{-2\psi}(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}, \end{aligned} \tag{46}$$

代入(45)式即可得到一般球对称带电蒸发黑洞的熵

$$S = \frac{4\pi^3}{4\pi^2}\frac{r_{\mathrm{H}}^6\mathrm{e}^{-3\psi}}{(r_{\mathrm{H}}-M-2r_{\mathrm{H}}\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}\frac{[r_{\mathrm{H}}-M-M'r_{\mathrm{H}}-\dot{r}_{\mathrm{H}}r_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}(2-\psi'r_{\mathrm{H}})]^2}{4r_{\mathrm{H}}^4\mathrm{e}^{-2\psi}(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}$$

$$= \frac{1}{4}A_{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{e}^{-\psi}}{(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}\left[1-\frac{M'r_{\mathrm{H}}-r_{\mathrm{H}}^2\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}\psi'}{r_{\mathrm{H}}-M-2r_{\mathrm{H}}\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{e}^{-\psi}}\right]^2, \tag{47}$$

式中 $A_{\mathrm{H}}=4\pi r_{\mathrm{H}}^2$ 为黑洞视界的面积.在最后一步利用了(9)式.

5.讨　　论

1.由(47)式可见,一般球对称带电蒸发黑洞的熵与其视界面积成正比.这与 Bekenstein 和 Hawking 的理论一致.在本文的推导过程中,无需采用小质量近似,而是在(42)式中直接利用了视界方程(9)之后,含有粒子质量 μ_0 的项就会自动消去,避免了人为引入小质量近似的问题,计算过程比较简单,计算结果也比较准确.

2.当 $Q=0,\psi=\psi(r,v),M=M(r,v)$ 时,(47)式可以化为

$$S=\frac{1}{4}A_{\mathrm{H}}\frac{\mathrm{e}^{-\psi}}{(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}, \tag{48}$$

这与一般球对称蒸发黑洞的熵[16]一致.

3.当 $\psi=0,M=M(v)$ 时,(47)式可以化为

$$S=\frac{1}{4}A_{\mathrm{H}}\frac{1}{(1-2\dot{r}_{\mathrm{H}})^2}, \tag{49}$$

这与球对称带电蒸发黑洞的熵[17]一致.

感谢赵　峥教授对本文的悉心指导.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[2] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[3] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752

[4] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727

[5] Luo Z J and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese)[罗智坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]

[6] Liu W B, Zhu J Y and Zhao Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 581 (in Chinese)[刘文彪、朱建阳、赵　峥 2000 物理学报 **49** 581]

[7] Zhao Z and Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558 (in Chinese)[赵　峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]

[8] Lin H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1413 (in Chinese)[林　海 2000 物理学报 **49** 1413]

[9] Li C A 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 986 (in Chinese)[李传安 2001 物理学报 **50** 986]

[10] Zhao R and Zhang L C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1015 (in Chinese)[赵　仁、张丽春 2001 物理学报 **50** 1015]

[11] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310

[12] Li X and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 463

[13] Wang B B and Huang C G 2001 *Phys. Rev.* D **63** 124014

[14] Li Z H and Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273 (in Chinese)[黎忠恒、赵　峥 1997 物理学报 **46** 1273]

[15] Song T P and Yao G Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1144 (in Chinese)[宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]

[16] Liu X Y 2001 *J. Beijing Normal University* (Nature Science) **37** 344 (in Chinese)[刘兴业 2001 北京师范大学学报(自然科学版) **37** 344]

[17] Song T P, Hou C X and Shi W L 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1398 (in Chinese)[宋太平、侯晨霞、史旺林 2002 物理学报 **51** 1398]

Entropy of a general spherically symmetric and charged evaporating black hole*

Song Tai-Ping Hou Chen-Xia Huang Jin-Shu

(*Department of Physics*, *Nanyang Teachers College*, *Nanyang* 473061, *China*)

(Received 15 December 2001; revised manuscript received 4 February 2002)

Abstract

Starting from the null surface equation, we obtain the event horizon of a general spherically symmetric and charged evaporating black hole. Using Klein-Gordon equation, thin film brick-wall model and WKB approximation, we obtain the entropy of a general spherically symmetric and charged evaporating black hole. This entropy is proportional to the area of event horizon.

Keywords: black hole, entropy, thin film brick-wall model, event horizon

PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10073002) and by the Natural Science Foundation of Education Bureau of Henan Province, China (Grant No. 98160001).