

# 光斑的形状因子及其在光纤定解问题中的应用

余 恬 王福勋

(山东大学信息科学与工程学院)

(2001 年 8 月 19 日收到 2001 年 11 月 29 日收到修改稿)

通过比较面光源与多极子点源两种辐射场,定义了光斑的形状因子,它决定于光斑上的源强分布,给出了形状因子的确定方法,求出了几种常见光斑的形状因子.把形状因子应用于光纤理论,补充了入射端面上的定解条件,完整地设定了定解问题.利用形状因子简单讨论了光纤端面的源强分布对光纤模式特性的影响.

关键词:光纤光学,多极子面光源,形状因子

PACC: 0260L, 0350D, 4110, 4281

## 1. 引 言

对于一端被外部光源照亮的光纤而言,由于端面上的受照区域有限而导致衍射(即使外来光束的直径大于纤芯直径,因纤芯面积有限,仍会引起衍射),使得场分量的连接条件在端面上无法应用,因而不能确定光纤中的电磁场分布<sup>[1]</sup>.文献[2]介绍了一种传输函数法.该方法的基本思想是利用本征函数系的完全性和正交性,由入射端内侧的波场推求光纤内部的波场.但该方法并未给出确定光纤入射端面内侧波场的方法,因此没能完整地设定光纤的定解问题.

文献[3]针对声波导提出了求解轴对称声源激发的场分布的形状因子方法.文献[4]在利用索末菲球面波公式的协变形式求解光纤定解问题时,沿用文献[3]的做法,引入了光纤端面光斑的形状因子,这实际上已经提出了求解光纤中场分布的形状因子法.但文献[4]的重点在于索末菲球面波公式的协变形式,所以未对光学中的形状因子法做出论证和分析说明.事实上,声波与电磁波的情况有一个重要的不同:基本声源是单极子,而基本光源却是偶极子.因此对于光源,形状因子应重新定义.本文给出了光斑形状因子的定义,导出了面光源形状因子的一般计算公式,并把形状因子应用于光纤问题,即可完整设定光纤的定解条件.作为进一步应用的例子,利用形状因子粗略考察光纤端面的源强分布对模式特性的影响.

如所周知,电磁场关于  $z$  轴的对称性质由因子

$e^{\pm i l \varphi}$  描写,其中  $l = 0, 1, 2, \dots$ . 激发这些不同对称性的场的基本单元是不同的多极点源,一定的  $l$  对应于一定的多极矩.多极点源的辐射本身具有一定的方向性,而光源的面分布也导致一定的辐射方向性.为将两种辐射方向性区分开来,以便给出形状因子的定义,须首先给出多极点源激发的场.

## 2. 多极点源的场

以  $r^0, \varphi^0, z^0$  分别表示柱坐标系  $(r, \varphi, z)$  中  $r, \varphi, z$  方向的单位矢.以  $\theta^0, \varphi^0$  分别表示球坐标系  $(R, \theta, \varphi)$  中  $\theta, \varphi$  方向的单位矢,这里  $\theta$  为矢径  $R$  与  $z$  轴间的夹角,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ .为简明,本文取电磁单位制使介质的磁导率  $\mu = 1$ ,取时空单位制使真空中的光速  $c = 1$ ,从而又有  $\epsilon_0 = 1$ .

### 2.1. $l = 0$ 的场

以  $E$  和  $H$  分别代表电场强度和磁场强度.在柱坐标系中,只要求得场的  $z$  分量  $E_z$  和  $H_z$ , 则其他各分量皆可求得.故只须导出  $z$  分量.先导出  $H_z$ . 设一磁偶极子位于原点,平行于  $z$  轴放置.取矢量势

$$A(r, z, t) = A(r, z) e^{-i\omega t} \varphi^0, \quad (1)$$

由  $H = \nabla \times A$  以及

$$i\omega H = \nabla \times E, \quad -i\omega n_1^2 E = \nabla \times H, \quad (2)$$

$n_1$  为介质的折射率,可知

$$A(r, z) = \frac{Q_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dq K_0(\mu_1 r) e^{iqz}, \quad (3)$$

式中  $\mu_1^2 = q^2 - k_1^2, k_1 = n_1 \omega, K_l(x)$  以及下文中的

$I_l(x), l=0, 1, 2, \dots$  为  $l$  阶虚宗量贝塞尔函数。 $4\pi Q_0$  为磁偶极矩。把 (3) 式代入  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$  得到

$$H_z^{(0)}(r, z) = \frac{Q_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \mu_1^2 K_0(\mu_1 r) e^{iqz}, \quad (4)$$

这里上标 (0) 表示  $l=0$ , 下同。

电场的  $z$  分量由平行于  $z$  轴的电偶极子引起, 但可由 (4) 式经电磁对偶变换  $\mathbf{H} \rightarrow n_1 \tilde{\mathbf{E}}, Q_0 \rightarrow \tilde{Q}_0$  得到 (这里  $\tilde{\mathbf{E}}$  以及下文的  $\tilde{\mathbf{H}}$  为电偶极子的场  $4\pi \tilde{Q}_0$  为电偶极矩):

$$\tilde{E}_z^{(0)}(r, z) = \frac{\tilde{Q}_0}{\pi n_1} \int_{-\infty}^{\infty} dq \mu_1^2 K_0(\mu_1 r) e^{iqz}. \quad (5)$$

下面导出辐射场的球坐标形式。利用索末菲球面波公式

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq K_0(\mu_1 r) e^{iqz} = \frac{1}{R} e^{ik_1 R} \equiv \psi(R), \quad (6)$$

则 (3) 式成为  $A(r, z) = Q_0 \partial \psi / \partial r$ 。以此代入  $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$  和 (2) 式, 注意到对辐射场有  $\partial \psi / \partial R = ik_1 \psi$ , 可得磁偶极子的辐射场

$$\mathbf{H}^{(0)}(R, \theta) = k_1^2 \sin \theta Q_0 \psi(R) \boldsymbol{\theta}^0, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}^{(0)}(R, \theta) = -\omega k_1 \sin \theta Q_0 \psi(R) \boldsymbol{\varphi}^0. \quad (8)$$

对 (7) 和 (8) 式做对偶变换  $\mathbf{E} \rightarrow -n_1 \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H} \rightarrow n_1 \tilde{\mathbf{E}}, Q_0 \rightarrow \tilde{Q}_0$ , 又得电偶极子的辐射场

$$\tilde{\mathbf{E}}^{(0)}(R, \theta) = \frac{1}{n_1} k_1^2 \sin \theta \tilde{Q}_0 \psi(R) \boldsymbol{\theta}^0, \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^{(0)}(R, \theta) = \frac{\omega}{n_1} k_1 \sin \theta \tilde{Q}_0 \psi(R) \boldsymbol{\varphi}^0. \quad (10)$$

以上结论是人们熟知的。

## 2.2. 多极矩的升降算符

多极点源的场可以通过对偶极点源场的微分得到。定义算符  $\hat{a}^+$  和  $\hat{a}^-$  为

$$\hat{a}^{\pm} = -e^{\pm i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \quad (11)$$

下面说明  $\hat{a}^+, \hat{a}^-$  是多极矩的升、降算符。

以  $\mathbf{W}$  统一地代表  $\mathbf{H}$  和  $\mathbf{E}$ 。在柱坐标系中, 多极点源的场  $\mathbf{W}^{(l)}$  可以写成  $\mathbf{W}^{(l)} = \mathbf{W}_r^{(l)} + \mathbf{W}_z^{(l)} \mathbf{z}^0$ , 其中  $\mathbf{W}_r^{(l)}$  为场的横向部分

$$\mathbf{W}_r^{(l)} = \mathbf{W}_r^{(l)} \mathbf{r}^0 + \mathbf{W}_\varphi^{(l)} \boldsymbol{\varphi}^0, \quad (12)$$

以  $\mathbf{W}^{(l)}(r, \varphi, iq)$  表示  $\mathbf{W}^{(l)}(r, \varphi, z)$  的傅里叶变换

$$\mathbf{W}^{(l)}(r, \varphi, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \mathbf{W}^{(l)}(r, \varphi, iq) e^{iqz}. \quad (13)$$

则  $\mathbf{W}_r^{(l)}(r, \varphi, iq)$  和  $\mathbf{W}_\varphi^{(l)}(r, \varphi, iq)$  满足熟知的耦合方

程组

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \mu_1^2 - \frac{1}{r^2} \right] \mathbf{W}_r^{(l)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{W}_\varphi^{(l)}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \mu_1^2 - \frac{1}{r^2} \right] \mathbf{W}_\varphi^{(l)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mathbf{W}_r^{(l)}}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

求解该方程组, 可得两组解 (以  $\pm$  号区别表示)

$$\mathbf{W}_r^{\pm(l)} = \frac{1}{2} \mu_1^l [\xi K_{l\pm 1}(\mu_1 r) + \eta K_{l\mp 1}(\mu_1 r)] \mathbf{e}^{\pm i l \varphi}, \quad (15)$$

$$\mathbf{W}_\varphi^{\pm(l)} = -\frac{i}{2} \mu_1^l [\xi K_{l\pm 1}(\mu_1 r) - \eta K_{l\mp 1}(\mu_1 r)] \mathbf{e}^{\pm i l \varphi}, \quad (16)$$

其中  $\xi, \eta$  与空间坐标无关, 但可以是  $q$  的函数。

以  $\hat{a}^+$  和  $\hat{a}^-$  分别作用于  $\mathbf{W}_r^{+(l)}$  和  $\mathbf{W}_r^{-(l)}$  则有

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_r^{\pm(l)} &= r^0 (\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_r^{\pm(l)}) + \mathbf{W}_r^{\pm(l)} (\hat{a}^{\pm} \mathbf{r}^0) \\ &+ \boldsymbol{\varphi}^0 (\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_\varphi^{\pm(l)}) + \mathbf{W}_\varphi^{\pm(l)} (\hat{a}^{\pm} \boldsymbol{\varphi}^0). \end{aligned} \quad (17)$$

由 (11) 式有

$$\hat{a}^{\pm} \mathbf{r}^0 = \mp \frac{i}{r} e^{\pm i\varphi} \boldsymbol{\varphi}^0, \hat{a}^{\pm} \boldsymbol{\varphi}^0 = \pm \frac{i}{r} e^{\pm i\varphi} \mathbf{r}^0. \quad (18)$$

由 (15) (16) 式, 根据递推公式  $\frac{dK_l(x)}{dx} = \frac{l}{x} K_l(x) - K_{l+1}(x)$ , 不难得到

$$\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_r^{\pm(l)} = \mp e^{\pm i\varphi} \frac{i}{r} \mathbf{W}_\varphi^{\pm(l)} + \mathbf{W}_r^{\pm(l+1)}, \quad (19)$$

$$\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_\varphi^{\pm(l)} = \pm e^{\pm i\varphi} \frac{i}{r} \mathbf{W}_r^{\pm(l)} + \mathbf{W}_\varphi^{\pm(l+1)}. \quad (20)$$

将 (18)–(20) 式代入 (17) 式, 即得

$$\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_r^{\pm(l)} = \mathbf{W}_r^{\pm(l+1)}.$$

至于  $\mathbf{W}_z^{(l)}(r, \varphi, iq) = \mathbf{W}_z^{(l)}(r, iq) e^{\pm i l \varphi}$ , 因其满足  $l$  阶虚宗量贝塞尔方程, 故可取

$$\mathbf{W}_z^{\pm(l)} = C \mu_1^l K_l(\mu_1 r) e^{\pm i l \varphi} \quad (C \text{ 是 } q \text{ 的函数}).$$

注意到

$$\hat{a}^{\pm} K_{l-1}(\mu_1 r) e^{\pm i(l-1)\varphi} = \mu_1 K_l(\mu_1 r) e^{\pm i l \varphi}, \quad (21)$$

可知  $\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}_z^{\pm(l)} = \mathbf{W}_z^{\pm(l+1)}$ 。又因  $\hat{a}^{\pm}$  对  $z^0$  无影响, 故综合以上, 即有  $\hat{a}^{\pm} \mathbf{W}^{\pm(l)} = \mathbf{W}^{\pm(l+1)}$ 。这就表明,  $\hat{a}^+, \hat{a}^-$  为多极矩的升、降算符。

## 2.3. $l > 0$ 的场

以上表明,  $l > 0$  的场可利用  $\hat{a}^{\pm}$  得到

$$\mathbf{W}^{\pm(l)} = (\hat{a}^{\pm})^l \mathbf{W}^{(0)}. \quad (22)$$

把  $\hat{a}^{\pm}$  变换到球坐标系中, 作用于 (7)–(10) 式, 略去  $1/k_1 R$  的高次项, 即得辐射场的表达式

$$\mathbf{H}^{\pm(l)}(R, \theta, \varphi) = i Q^{(l)} k_1 U_l(\theta) e^{\pm i l \varphi} \psi(R) \boldsymbol{\theta}^0, \quad (23)$$

$$E^{\pm l}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = -iQ^{(l)}\omega U_l(\theta)e^{\pm il\varphi}\psi(\mathbf{R})\boldsymbol{\rho}^0 \quad (24)$$

和

$$\tilde{E}^{\pm l}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = i\frac{\tilde{Q}^{(l)}}{n_1}k_1 U_l(\theta)e^{\pm il\varphi}\psi(\mathbf{R})\boldsymbol{\theta}^0, \quad (25)$$

$$\tilde{H}^{\pm l}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = i\frac{\tilde{Q}^{(l)}}{n_1}\omega U_l(\theta)e^{\pm il\varphi}\psi(\mathbf{R})\boldsymbol{\rho}^0, \quad (26)$$

其中  $U_l(\theta) = (-ik_1 \sin\theta)^{l+1}$  是多极点源本身的形状因子,  $Q^{(l)}$  和  $\tilde{Q}^{(l)}$  为常数, 可称之为多极点源的强度 (strength), 它们由点源的辐射功率给定.

为了光纤中的应用, 下面给出  $W_z^{\pm l}$  的傅氏积分形式. 按 (22) 式, 把  $(\hat{a}^\pm)^\dagger$  作用于 (4) 式和 (5) 式, 利用 (21) 式, 即有

$$H_z^{(l)}(r, \varphi, z) = \tilde{Q}^{(l)}e^{\pm il\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \Phi_l(r, q)e^{iqz} \quad (27)$$

$$\tilde{E}_z^{(l)}(r, \varphi, z) = \frac{\tilde{Q}^{(l)}}{\pi n_1}e^{\pm il\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} dq \Phi_l(r, q)e^{iqz} \quad (28)$$

其中

$$\Phi_l(r, q) = \mu_1^{l+2} K_l(\mu_1 r) / \pi. \quad (29)$$

### 3. 面光源的辐射场及形状因子

#### 3.1. 面光源的辐射场

考虑一圆形光斑,  $z$  轴垂直通过圆心. 该面光源激发的场总可表示为

$$\mathbf{W}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \sum_l \mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi)e^{\pm il\varphi}. \quad (30)$$

该式具有这样的意义: 面光源激发的场可看作光源上对应于各种  $l$  的多极子面源的场  $\mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi)e^{\pm il\varphi}$  的矢量和. 这里下标  $l$  表示对应于  $l$  的多极子面源的场, 以区别于用上标 ( $l$ ) 表示的多极点源的场.

下面考虑  $\mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi)$ . 以下提到的多极点源和面光源均对特定  $l$  而言, 不再重复. 设面光源的半径为  $b$ , 以  $(r', \varphi')$  表示光源面上的点,  $r' \leq b$ . 设  $(r', \varphi')$  处单位面积光源的强度为  $Q_l(r') = \eta_l(r') \times Q^{(l)}(\eta_l(r')$  无量纲) 则该处的子光源  $r' dr' d\varphi'$  发出的球面波为

$$d\mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \eta_l(r') r' dr' d\varphi' \mathbf{W}^{(l)}(r', \varphi'; \mathbf{R}, \theta, \varphi) \quad (31)$$

这里  $\mathbf{W}^{(l)}(r', \varphi'; \mathbf{R}, \theta, \varphi)$  表示  $(r', \varphi')$  处的点源在

$(\mathbf{R}, \theta, \varphi)$  处引起的场, 该点源与场点间的距离为  $R - r' \sin\theta \cos(\varphi - \varphi')$ , 由 (23) — (26) 式可知, 对辐射场有

$$\mathbf{W}^{(l)}(r', \varphi'; \mathbf{R}, \theta, \varphi) = \mathbf{W}^{(l)}(\mathbf{R}, \theta, \varphi) e^{-ik_1 r' \sin\theta \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (32)$$

于是 (31) 式对光斑面积的积分给出

$$\mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \bar{\eta}_l D_l(\theta) \mathbf{W}^{(l)}(\mathbf{R}, \theta, \varphi), \quad (33)$$

其中

$$D_l(\theta) = 2\pi \int_0^b \frac{\eta_l(r')}{\eta_l} J_0(k_1 r' \sin\theta) r' dr'. \quad (34)$$

这里已利用了公式  $\int_0^{2\pi} e^{-ix \cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x)$ ,  $J_0(x)$  为 0 阶贝塞尔函数,  $\bar{\eta}_l$  定义为

$$\bar{\eta}_l = 2\pi \int_0^b \eta_l(r') r' dr'. \quad (35)$$

#### 3.2. 面光源的形状因子

考虑面光源辐射场在柱坐标系中的表达式. 不妨假定  $H_z \neq 0$ . 因  $H_z$  满足  $l$  阶虚宗量贝塞尔方程, 故可写出

$$H_{lz}(r, \varphi, z) = \bar{\eta}_l Q^{(l)} e^{\pm il\varphi} \int_{-k_1}^{\infty} dq F_l(q) \Phi_l(r, q) e^{iqz}, \quad (36)$$

其中  $F_l(q)$  暂时待定, 沿用声学中的名称<sup>[3]</sup>, 称其为面光源的形状因子. 在 (36) 式中令  $\bar{\eta}_l = 1$ , 与 (27) 式比较, 可知  $F_l(q)$  是面源与相同强度的点源的场的相应傅里叶分波之比, 此即  $F_l(q)$  的定义.

可与文献 [3] 同样的证明,  $F_l(q)$  在  $q$  的整个复平面上解析, 因此它可展开为  $q$  的幂级数. 将其中的  $q$  以算符  $-(\partial/\partial z)$  代替, 则  $F_l(q)$  可从积分号中提出 (36) 式成为

$$H_{lz}(r, \varphi, z) = \bar{\eta}_l Q^{(l)} e^{\pm il\varphi} F_l\left(\frac{\partial}{i\partial z}\right) \int_{-k_1}^{k_1} dq \Phi_l(r, q) e^{iqz}, \quad (37)$$

与 (27) 式对照, 可知上式即

$$H_{lz}(r, \varphi, z) = \bar{\eta}_l F_l\left(\frac{\partial}{i\partial z}\right) H_z^{(l)}(r, \varphi, z). \quad (38)$$

可以类似地推知  $E_{lz}(r, \varphi, z)$  也正比于  $\bar{\eta}_l F_l(\partial/i\partial z)$ , 而其他各分量可由  $H_{lz}$  和  $E_{lz}$  对  $r$  和  $\varphi$  的线性运算求得, 故皆正比于  $\bar{\eta}_l F_l(\partial/i\partial z)$ , 于是有

$$\mathbf{W}_l(\mathbf{R}, \theta, \varphi) = \bar{\eta}_l F_l\left(\frac{\partial}{i\partial z}\right) \mathbf{W}^{(l)}(\mathbf{R}, \theta, \varphi). \quad (39)$$

为了解  $F_l(q)$  的物理意义, 让我们考虑辐射场. 把辐射场表达式 (23) (24) 式代入 (39) 式右边, 利用  $\partial/\partial z$  在球坐标系中的表达式, 并注意到  $(k_1 R)^{-1}$  和  $(k_1 R)^{-2}$  相对于 1 皆可忽略, 则可得到  $\partial W^{(l)}/\partial z = ik_1 \cos\theta W^{(l)}$ , 从而有

$$W_l = \bar{\eta}_l F_l(k_1 \cos\theta) W^{(l)}(R, \theta, \varphi). \quad (40)$$

前已指出, 多极点面源的辐射方向性来自两个方面, 一是由于多极点源辐射, 二是由于光源的面分布. 前者已被包含于  $W^{(l)}(R, \theta, \varphi)$  中, 故面光源的形状因子反映的只是后者. 此即形状因子的物理意义.

### 3.3. 形状因子的计算公式

比较 (33) 和 (40) 式, 有  $F_l(k_1 \cos\theta) = D_l(\theta)$ . 再利用  $q = k_1 \cos\theta$ , 并记  $p = \sqrt{k_1^2 - q^2}$  (34) 式即可写为

$$F_l(q) = 2\pi \int_0^b \frac{\eta_l(r')}{\eta_l} r' J_0(pr') dr'. \quad (41)$$

此即  $F_l(q)$  的计算公式. 该式表明  $F_l(q)$  只取决于面光源的相对强度分布. 对于一个位于原点, 强度为  $Q_0^{(l)}$  的多极点源, 有  $\eta_l(r') = \delta(r')/2\pi$ , 其中  $\delta(r')$  满足  $\int_0^\infty r' \delta(r') dr' = 1$ , 由 (35) 和 (41) 式, 可得  $F_l(q) \equiv 1$ .

利用  $J_0(pr)$  的级数展开式, 可将 (41) 式写为幂级数:

$$F_l(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p^{2n}}{(2^n n!)^2} \overline{r_l'^{2n}}, \quad (42)$$

其中

$$\overline{r_l'^{2n}} = \frac{2\pi}{\eta_l} \int_0^b \eta_l(r') r'^{2n} [r' dr']. \quad (43)$$

显然  $\overline{r_l'^{2n}}$  是  $r'^{2n}$  按源强分布的带权平均. 当源强主要集中在中央区域时,  $\overline{r_l'^{2n}}$  将甚小于 1, 在  $p$  不太大时, (42) 式的求和可近似地只取前几项.

下面给出几种常见源强分布的形状因子.

1. 均强光斑:  $\eta_l(r') = 1/\pi b^2$ . 代入 (41) 式, 可得

$$F_l(q) = 2J_1(pb) / pb, \quad (44)$$

其中  $J_1(x)$  为 1 阶贝塞尔函数.

2. 高斯分布光斑:  $\eta_l(r') = \alpha e^{-\alpha r'^2} / \pi(1 - e^{-\alpha})$ ,  $\alpha$  为已知常数,  $r' \leq 1$ . 由 (43) 式得

$$\overline{r_l'^{2n}} = \alpha \rho_n (1 - e^{-\alpha}). \quad (45)$$

$\rho_n$  服从递推公式

$$\rho_1 = [1 - (\alpha + 1)e^{-\alpha}] \alpha^2, \quad (46)$$

$$\rho_n = (n\rho_{n-1} - e^{-\alpha}) \alpha \quad (n > 1). \quad (47)$$

若光强集中在轴线附近, 不妨假定  $\alpha = 2$ , 由以上可得  $\overline{r_l'^2} = 0.32$ ,  $\overline{r_l'^4} = 0.083$ ,  $\overline{r_l'^6} = 0.016, \dots$  代入 (42) 式得

$$F_l(q) = 1 - 0.08p^2 + 1.3 \times 10^{-3} p^4 - 6.9 \times 10^{-6} p^6 \dots \quad (48)$$

对于光纤中的简正模式  $TE_{01}$ , 有  $2.40 < p < 3.83$ ,  $F_l(q)$  取前 3 项即可.

3. 平方分布光斑:  $\eta_l(r') = (1 - \alpha r'^2) / \pi(2 - \alpha)$ ,  $\alpha$  为已知常数,  $r' \leq 1$ . 代入 (41) 式得

$$F_l(q) = \frac{2}{2 - \alpha} \left\{ \left[ 1 + \alpha \left( \frac{4}{p^2} - 1 \right) \right] \frac{J_1(p)}{p} - 2\alpha \frac{J_0(p)}{p^2} \right\}. \quad (49)$$

若  $\alpha = 1$ , 即  $\eta_l(1) = 0$  则

$$F_l(q) = \frac{4}{p^2} \left[ 2 \frac{J_1(p)}{p} - J_0(p) \right]. \quad (50)$$

## 4. 形状因子在光纤理论中的应用

### 4.1. 阶跃光纤中的电磁场

取光纤轴线为  $z$  轴, 光纤系统位于  $z \geq 0$  区域, 纤芯半径  $a = 1$ . 纤芯和包层中介质的折射率分别为  $n_1$  和  $n_2$ . 光纤端面  $z = 0$  处被外来光照射. 照射光束截面上的光强分布决定了光纤端面内侧的光强分布. 由于  $n_1 > n_2$ , 故只有从纤芯端面发出的光能够被光纤引导而传向远方, 所以对光纤中的传播模式而言, 面光源就是指  $z = 0$  处半径  $r \leq 1$  的部分, 它向光纤内部发出的光对光纤中的场来说是入射光. 该入射光在纤芯内引起反射波, 在包层中引起折射波.

如前所述, 入射光的傅里叶分量等于  $F_l(q)$  乘以点源辐射场的相应分量, 因此反射波和折射波的傅里叶分量也应乘以  $F_l(q)$ . 又根据对 (6) 式协变性的讨论<sup>[4]</sup>, 可知有物理意义的入射波只存在于  $q$  实轴上  $-k_1 \leq q \leq k_1$  区间内. 因此, 对光纤中的磁场, 有

$$H_{1z}(r, \varphi, z) = e^{\pm i\varphi} \int_{-k_1}^{k_1} dq F_l(q) \phi_\nu(r, q) e^{iqz}, \quad (51)$$

其中下标  $\nu = 1, 2$  分别代表纤芯和包层. 入射波已见 (36) 式, 将其中待定常数  $\bar{\eta}_l Q^{(l)}$  简化为  $Q$ , 则满足  $r \rightarrow \infty$  处边界条件的解为

$$\phi_\nu(r, q) = \frac{Q}{\pi} \mu_1^{\nu+2} [K(\mu_1 r) + A(q)I(\mu_1 r)]$$

$$(r \leq 1), \tag{52}$$

$$\phi_2(r, q) = \frac{Q}{\pi} \mu_1^{l+2} B(q) K_l(\mu_2 r) \quad (r \geq 1), \tag{53}$$

$$\mu_\nu^2 = q^2 - k_\nu^2 \quad (k_\nu = \omega n_\nu), \tag{54}$$

$I_l(\mu_1 r)$  和  $K_l(\mu_2 r)$  分别为纤芯内的反射波和包层中的折射波.  $E_{\text{tot}}(r, \varphi, z)$  的表式可以类似地写出, 此处从略.

除  $r \rightarrow \infty$  处的边界条件外, 体系还应满足以下定解条件:

- 1) 在  $r = 1$  处场的切向分量连续;
- 2) 在端面上的源强分布  $Q(r')$  及  $\eta_l(r')$  已知.

由条件 1) 可确定  $A(q), B(q)$  以及  $E_{\text{tot}}(r, \varphi, z)$  中相应的两个常数; 由条件 2) 可确定  $F_l(q)$  和  $Q$ , 而条件 2) 本身由外来光绕轴的对称性质和相应的强度给定. 可见, 由于形状因子的引入, 使包含端面在内的光纤定解问题得到了完整的设定.

由 (51) 式可知, 解的模式取决于  $q$  实轴上的奇点.  $F_l(q)$  无奇点, 故源强的面分布不会改变光纤中的模式数目, 但可以影响模式的特性. 下面以  $l = 0$  的 TE 模为例, 讨论这种影响.

### 4.2. 源强分布对 TE<sub>0m</sub> 模功率特性的影响

简正受导模 TE<sub>0m</sub> 对应于  $\phi_\nu(r, q)$  在  $q$  实轴上极点  $q_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) 处的留数<sup>[4]</sup>, 因此其传输功率正比于  $|F_0(q_m)|^2$ . 在 (44) 式中取  $q = q_m$  即给出匀强光斑对该模式的形状因子  $F_0(q_m)$ , 它与波长  $\lambda$  和光斑半径  $b$  都有关. 特别地, 当  $b$  满足条件

$$\frac{\beta_l}{\beta_m} < b < \frac{\beta_l}{\alpha_m} \quad (l = 1, 2, \dots, m - 1) \tag{55}$$

(这里  $\alpha_m$  为  $J_0(\alpha) = 0$  的第  $m$  个根,  $\beta_l$  为  $J_l(\beta) = 0$  的第  $l$  个根) 时, 在某一波长处会有  $F_0(q_m) = 0$ . 这是因为, 极点  $q_m$  规定了 TE<sub>0m</sub> 模必须满足特征方程

$$p_m \frac{J_0(p_m)}{J_1(p_m)} = -\mu_{2m} \frac{K_0(\mu_{2m})}{K_1(\mu_{2m})}, \tag{56}$$

式中  $p_m = \sqrt{\omega^2 n_1^2 - q_m^2}$ ,  $\mu_{2m} = \sqrt{q_m^2 - \omega^2 n_2^2}$ . 满足 (56) 式的  $p_m$  取值范围为  $\alpha_m < p_m < \beta_m$ , 而当  $F_0(q_m) = 0$  时有  $p_{1m} = \beta_l/b$ , 故有不等式 (55). 又注意到  $b \leq 1, \beta_{m-1} < \alpha_m < \beta_m$ , 故应有  $l < m$ .

据此, 对于特定的 TE<sub>0m</sub> 模式, 如果  $b$  满足 (55) 式, 则受  $F_0(q_m)$  的影响, 该模式的功率将在某一波长处下降为 0. 这意味着 TE<sub>0m</sub> 模式的功率-波长曲线

在截止波长和上述零点波长之间存在极值. 这一现象完全来自光斑的衍射效应. 图 1 绘出了匀强光斑的  $|F_0(q_2)|^2$  随归一化波长  $\lambda$  的变化曲线, 计算中取  $n_1 = 1.5, n_2 = 1.4$ . 应当指出, 因  $b \leq 1$  (55) 式对 TE<sub>01</sub> 模不成立, 故  $F_0(q_1)$  不会导致 TE<sub>01</sub> 模的功率出现零点. 此外还应注意,  $b = 1$  不满足 (55) 式.

对于平方率光斑, 由 (49) 式不难证明, 仅当  $\alpha > 1$  时, 与  $F_0(q)$  的零点相对应的  $p$  才满足条件 (55) 式.  $\alpha > 1$  意味着在  $r' = \alpha^{-1/2}$  内外,  $\eta_0(r')$  反位相. 因此这表明, 各点同位相的面光源不会导致 TE<sub>0m</sub> 模的功率出现零点.

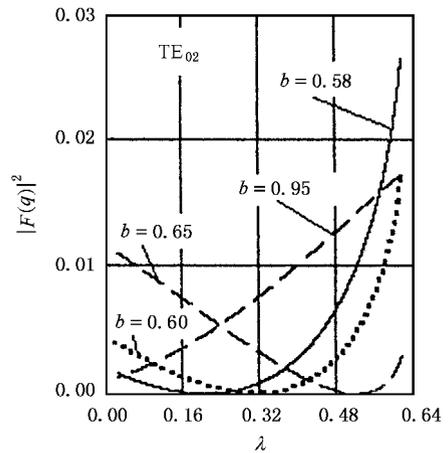


图 1 匀强光斑对 TE<sub>02</sub> 模的  $|F_0(q_2)|^2 - \lambda$  曲线

### 4.3. 源强分布对辐射模角分布的影响

由文献 [4] 可知, 辐射模的辐射强度按  $\theta$  角的分布正比于  $|F_0(k_1 \sin \theta)|^2$ . 对匀强光斑而言, 在  $F_0(q) = 0$  即  $\sin \theta = \beta_l/k_1 b$  的方向上, 由于  $\sin \theta \leq 1$ , 故有  $\beta_l \leq Vb/\sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$  (式中  $V = \omega \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  为归一化频率). 这表明, 乘积  $Vb$  的增大将使  $F_0(q)$  的零点数目增加, 从而辐射模的强度角分布曲线的副瓣数目也随之增多, 这对于弱导光纤 ( $n_2 \approx n_1$ ) 表现得尤为明显.

平方率分布光斑的  $F_0(q)$  也有一系列零点, 故会使角分布曲线的副瓣数目比点源的辐射场多, 使能量更集中于轴向. 图 2 中曲线 1, 2 依次为平方率 ((50) 式) 和匀强 ((37) 式,  $b = 1$ ) 两种光斑  $|F_0(q)|^2$  的角分布. 图形显示, 两种光斑的  $|F_0(q)|^2$  都随  $\theta$  的增大而迅速减小, 这表明面源可将能量集中于轴线方向, 使辐射模受到抑制.

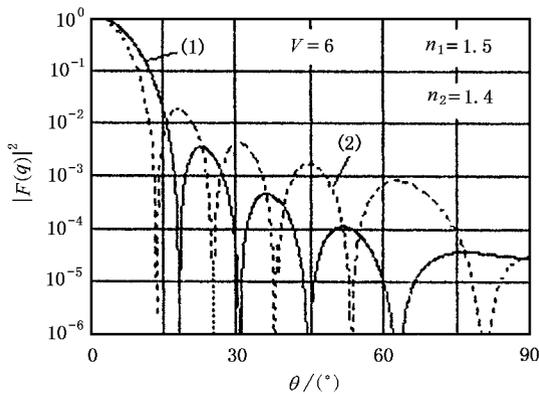


图2 两种光斑的 $|F_0(q)|^2-\theta$ 曲线

## 5. 结 论

本文给出了多极点源辐射场的升降算符及场的

表达式,把多极点源的辐射方向性从多极子面源的辐射方向性中区分出来,进而定义了面光源的形状因子,它与多极点源的辐射方向性无关.本文导出了形状因子的一般计算公式,它表明形状因子只取决于面光源的相对强度分布.本文还说明,把形状因子应用于光纤问题,就把光纤端面的源强分布包含到定解条件中,从而使光纤的定解问题得以完整设定.

本文给出了几种常见光斑的形状因子表达式,并以实例说明,借助于形状因子,可以讨论光纤端面的源强分布对光纤模式传播特性的影响.文献[5]对光纤中非轴对称模式的存在性进行了分析.利用形状因子,可以分析端面的源强分布对这些模式的影响.这一工作将在另文中完成.

承蒙山东大学物理系余寿绵教授通读全稿并提出宝贵意见,在此谨致以衷心的感谢.

- [1] Snyder A W and Love J D 1983 *Optical Waveguide Theory* (New York:Chapman and Hall) Chapt 20
- [2] Shi S Y 1989 *Principle of Optical Waveguide* (Beijing:Higher Education Publishing Co.) p86, p203 [in Chinese] 石守勇 1989 光波导原理(北京:高等教育出版社)第86,203页]

- [3] Yu S and Liu Y 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **93** 2592
- [4] Yu S M and Yu T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1097 [in Chinese] 余寿绵、余恬 2001 物理学报 **50** 1097]
- [5] Yu S M and Yu T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2179 [in Chinese] 余寿绵、余恬 2001 物理学报 **50** 2179]

# Form factor of a planar light source and its application in optical fiber

Yu Tian Wang Fu-Xun

(School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China)

(Received 19 August 2001; revised manuscript received 29 November 2001)

## Abstract

By comparing the radiation field excited by a multipole point source with that excited by a cylindrical planar light source, the form factor of the planar light source is defined. The form factor is determined by the distribution of the source strength on the plane. A general formula for form factor is obtained, and several examples of form factor are given. Introduction of form factor in fiber optics completes the formulation of the boundary value problem. The influences of the distribution of the source strength to the modes propagating in a fiber are discussed briefly by using the form factor.

**Keywords:** fiber optics, multipole planar light source, form factor

**PACC:** 0260L, 0350D, 4110, 4281