第 51 卷 第 9 期 2002 年 9 月
1000-3290/2002/51(09)/1933-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.9, September, 2002

单极子荷电黑洞时空背景中有质量标量场的衰减*

朱云峰 余洪伟†

(湖南师范大学物理系,物理研究所,长沙 410081)

(2001 年 12 月 15 日收到;2002 年 1 月 20 日收到修改稿)

通过对在单极子荷电黑洞背景中有质量标量场后期演化的研究,发现振荡反幂函数的衰减方式支配了有质量标量场的后期衰减.有质量标量场在单极子荷电黑洞时空背景中的后期衰减比在无整体单极子的 Reissner-Nordström 时空度规下的后期衰减更快.

关键词:黑洞,整体单极子,有质量标量场,后期衰减

PACC:0420,0470

1. 引 言

在 20 世纪 70 年代早期,Wheeler 的"黑洞无毛"理论[1]阐明了经典黑洞都可由只有质量、电荷、角动量为物理参数的 Kerr-Newman 度规来描述,因此,研究黑洞外部物质场的衰减就显得很重要.在这方面,Price 研究了无质量中性场在引力塌缩中随时间衰减的物理机制[2],Hod 和 Piran 研究了无质量荷电标量场衰减的物理机制[3,4].

虽然以前的工作大多是研究无质量标量场的演化,但是有质量标量场的演化也很重要.在黑洞时空中,有质量标量场和无质量标量场有着不同的性质,可以引起许多与无质量情形本质上不同的现象,在这方面一个明显的例子是有质量标量场的真空量子极化[5].Hod 和 Piran 已经研究了在 Reissner-Nordström 度规下有质量标量场衰减的物理机制[6],Mazzitelli 和 Lousto 研究了在整体单极子时空下的真空极化效应[5],文献[7,8]研究了具有整体单极子黑洞的量子性质和热力学性质.本文研究在整体单极子黑洞背景下有质量标量场衰减的物理机制.具体描述物理系统,给出黑洞 Green 函数,以利用谱分解技术研究有质量标量场的衰减,并讨论在固定半径处的单极子黑洞背景下有质量标量场的衰减演化.

2. 单极子荷电黑洞时空背景中有质量标量场的衰减

2.1. 系统描述

我们考察单极子黑洞背景下有质量标量场的演化.描述质量为 M'、电荷为 Q' 的单极子黑洞度规由下式给出:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-8\pi\eta_0^2-2\frac{M'}{r'}+\frac{Q'^2}{r'^2}\right)\mathrm{d}t'^2\\&+\left(1-8\pi\eta_0^2-2\frac{M'}{r'}+\frac{Q'^2}{r'^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r'^2\\&+r'^2\mathrm{d}\Omega^2,\end{aligned}\qquad(1)$$

这里 η_0 为产生整体单极子时的对称性自发破缺标度,通常为大统一标度约为 10^{16} GeV[9],此时 $8\pi\eta_0^2$ 约为 10^{-3}.引入如下变换:

$$t'\to(1-8\pi\eta_0^2)^{-\frac{1}{2}}t,\ r'\to(1-8\pi\eta_0^2)^{\frac{1}{2}}r,$$
$$M'\to(1-8\pi\eta_0^2)^{\frac{3}{2}}M,\ Q'\to(1-8\pi\eta_0^2)Q,$$
$$b'\to(1-8\pi\eta_0^2),$$

度规(1)式变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-2\frac{M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2\\&+\left(1-2\frac{M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2b\mathrm{d}\Omega^2,\end{aligned}\qquad(2)$$

引入乌龟坐标 y,令 $\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}r}{\lambda^2}$,这里 $\lambda^2=$

* 国家自然科学基金(批准号:10075019)资助的课题.

† 通信作者.

$\left(1-2\frac{M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)$，则

$$ds^2 = \lambda^2(-dt^2+dy^2)+br^2d\Omega^2. \tag{3}$$

有质量标量场的波方程是

$$g^{\mu\nu}\Phi_{;\mu\nu}-m^2\Phi=0, \tag{4}$$

这里 m 代表标量场的质量. 令

$$\Phi=\sum_{l,m}\frac{\Psi_l(t,r)Y_l^m(\theta,\varphi)}{r},$$

得

$$\Psi_{,tt}-\Psi_{,yy}+V\Psi=0, \tag{5}$$

这里

$$V=\left(1-2\frac{M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\left[\frac{l(l+1)}{br^2}+2\frac{M}{r^3}-2\frac{Q^2}{r^4}+m^2\right]. \tag{6}$$

2.2. 黑洞 Green 函数

由谱分解方法知，有质量标量场随时间的演化由下式给出[6,10]：

$$\Psi(y,t)=\int[G(y,x,t)\Psi_t(x,0)+G_t(y,x,t)\Psi(x,0)]dx, \tag{7}$$

对于 $t>0$，推迟 Green 函数 $G(y,x,t)$ 满足方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V(r)\right]G(y,x,t)=\delta(t)\delta(y-x), \tag{8}$$

对于 $t<0$，$G(y,x,t)=0$. 利用 Fourier 变换，得

$$\tilde{G}(y,x,\omega)=\int_{0^-}^{\infty}G(y,x,t)e^{i\omega t}dt, \tag{9}$$

在 ω 的上半复平面，Fourier 变换 $\tilde{G}(y,x,\omega)$ 解析且满足

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2-V\right)\tilde{G}(y,x,\omega)=\delta(y-x). \tag{10}$$

$G(y,x,t)$ 可通过逆变换给出

$$G(y,x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic}\tilde{G}(y,x,\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{11}$$

这里 c 是正常数. 令 $\tilde{\Psi}_1(y,\omega)$ 和 $\tilde{\Psi}(y,\omega)$ 为如下齐次方程的两个线性无关解：

$$\left(\frac{d^2}{dy^2}+\omega^2-V\right)\tilde{\Psi}_i(y,\omega)=0, i=1,2. \tag{12}$$

则 Wronskian 为

$$W(\omega)=W(\tilde{\Psi}_1,\tilde{\Psi}_2)=\tilde{\Psi}_1\tilde{\Psi}_{2,y}-\tilde{\Psi}_2\tilde{\Psi}_{1,y}, \tag{13}$$

这里 $W(\omega)$ 与 y 无关. 使用 $\tilde{\Psi}_1$，$\tilde{\Psi}_2$，黑洞 Green 函数可表示为

$$\tilde{G}(y,x,t)=-\frac{1}{W(\omega)}\begin{cases}\tilde{\Psi}_1(y,\omega)\tilde{\Psi}_2(x,\omega), y<x,\\ \tilde{\Psi}_1(x,\omega)\tilde{\Psi}_2(y,\omega), y>x.\end{cases} \tag{14}$$

为了利用(11)式计算 $G(y,x,t)$，可以选取积分围道在 ω 的下半复平面闭合，这样有质量标量场的中后期衰减将由在 $-m$ 至 m 之间的分支线上的积分(用 G^c 表示)所决定[10]. 下面计算 $G^c(y,x,t)$.

2.3. 有质量标量场的衰减

假定观察者和初始条件定在远离黑洞处. 对有质标量场在黑洞背景中的波方程(12)按 $\frac{M}{e}$ 和 $\frac{Q}{r}$ 的级数展开，忽略掉 $\left[O\left(\frac{Mm}{r}\right)^2\right]$ 项和更高项，得到

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\omega^2-m^2+\frac{4M\omega^2-2Mm^2}{r}-\frac{l(l+1)}{br^2}\right]\xi=0, \tag{15}$$

其中 $\xi=\lambda\tilde{\Psi}$.

如果进一步假定 $M\ll r\ll\frac{M}{(Mm)^2}$，并考虑到标量场的中后期行为，此时 $r\ll t\ll\frac{M}{(Mm)^2}$，则(15)式可近似为

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\omega^2-m^2-\frac{l(l+1)}{br^2}\right]\xi=0. \tag{16}$$

将(16)式与文献[6]的(15)式比较，可以看出，对单纯的 Reissner-Nordström 黑洞，标量场的中后期衰减仅依赖于场参量，而与时空参量无关，但对于这里考虑的单极子荷电黑洞，标量场的中后期衰减不仅依赖场参量，而且依赖时空参量 b，因此，在此情况下，标量场的中后期衰减会受到渐近远区反射的影响. 这一点与无单极子的 Reissner-Nordström 黑洞是明显不同的. 引入辅助场 $\tilde{\Phi}$，

$$\xi=r^{\mu+\frac{1}{2}}e^{-\bar{\omega}r}\tilde{\Phi}(2\bar{\omega}r), \tag{17}$$

这里

$$\mu=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{b}}, z=2\bar{\omega}r, \bar{\omega}=m^2-\omega^2, \tag{18}$$

则 $\tilde{\Phi}(z)$ 满足合流超几何方程

$$z\frac{d^2\tilde{\Phi}}{dz^2}+(2\mu+1-z)\frac{d\tilde{\Phi}}{dz}-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\tilde{\Phi}=0, \tag{19}$$

该方程可以用来构成黑洞 Green 函数的两个基本解为

$$\widetilde{\Psi}_1 = Ar^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\tilde{\omega}r} M\left(\mu + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, 2\tilde{\omega}r\right) \tag{20}$$

和

$$\widetilde{\Psi}_2 = Br^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\tilde{\omega}r} U\left(\mu + \frac{1}{2}, 2\mu + 1, 2\tilde{\omega}r\right), \tag{21}$$

这里 A,B 是常数,$M(a,b,z)$和 $U(a,b,z)$是合流超几何方程(11)的两个标准解.

使用文献[11]的(13.6.3)式,(13.6.21)式可将解写为更简单的形式

$$\widetilde{\Psi}_1 = Ar^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\mu + 1)\left(\frac{\tilde{\omega}}{2}\right)^{-\mu} I_\mu(\tilde{\omega}r) \tag{22}$$

和

$$\widetilde{\Psi}_2 = \pi^{-\frac{1}{2}} Br^{\frac{1}{2}} (2\tilde{\omega})^{-\mu} K_\mu(\tilde{\omega}r). \tag{23}$$

这里 I_μ 和 K_μ 为修正 Bessel 函数.

使用(11)式,找到分支线对 Green 函数的贡献

$$G^c(y,x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-m}^{m} \widetilde{\Psi}_1(x,\tilde{\omega})\left[\frac{\widetilde{\Psi}_2(y,\tilde{\omega}e^{i\pi})}{W(\tilde{\omega}e^{i\pi})} - \frac{\widetilde{\Psi}_2(y,\tilde{\omega})}{W(\tilde{\omega})}\right] e^{-i\omega t} d\omega, \tag{24}$$

利用文献[11]的(9.3.30)式和(9.6.31)式,得

$$\widetilde{\Psi}_1(r,\tilde{\omega}e^{i\pi}) = \widetilde{\Psi}_1(r,\tilde{\omega}) \tag{25}$$

和

$$\widetilde{\Psi}_2(r,\tilde{\omega}e^{i\pi}) = e^{-2i\mu\pi}\widetilde{\Psi}_2(r,\tilde{\omega}) - \frac{B}{A}\frac{i\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2\mu} e^{-i\mu\pi} \widetilde{\Psi}_1(r,\tilde{\omega})}{\Gamma(\mu + 1)}. \tag{26}$$

利用(25)式和(26)式,有

$$W(\tilde{\omega}e^{i\pi}) = e^{-2i\mu\pi} W(\tilde{\omega}), \tag{27}$$

由以上,得

$$\frac{\widetilde{\Psi}_2(y,\tilde{\omega}e^{i\pi})}{W(\tilde{\omega}e^{i\pi})} - \frac{\widetilde{\Psi}_2(y,\tilde{\omega})}{W(\tilde{\omega})} = -\frac{B}{A}\frac{i\pi^{\frac{1}{2}} 2^{-2\mu} e^{-i\mu\pi} \widetilde{\Psi}_1(r,\tilde{\omega})}{\Gamma(\mu + 1) W(\tilde{\omega})}. \tag{28}$$

既然 $W(\tilde{\omega})$与 r 无关,当 $\tilde{\omega}r\to 0$ 时,用文献[11]的(9.6.7)式和(9.6.9)式作 Bessel 函数的渐近展开,得

$$W(\tilde{\omega}) = -\frac{AB\Gamma(\mu)}{\sqrt{\pi}\tilde{\omega}^{2\mu}}. \tag{29}$$

最后,将(28)式和(29)式代入(24)式,得

$$G^c(y,x,t) = \frac{1}{A^2}\frac{ie^{-2\mu-1+i\mu\pi}}{\mu\Gamma(\mu)\Gamma(\mu + 1)} \times \int_{-m}^{m} \widetilde{\Psi}_1(y,\tilde{\omega})\widetilde{\Psi}_2(x,\tilde{\omega})\tilde{\omega}^{2\mu} e^{-i\omega t} d\omega. \tag{30}$$

易验证在 t 较大的情况下,(30)式中对积分的有效作用来自于$|\omega| = O\left(m - \frac{1}{t}\right)$或$\tilde{\omega} = O\left(\sqrt{\frac{m}{t}}\right)$.这是因为快速振荡项导致被积函数正负部分相互抵消[6].为得到在固定半径(这里 $x, y\ll t$)场的衰减,考虑到 $\tilde{\omega}r\ll 1$.用文献[11]的(9.6.7)式,得

$$\widetilde{\Psi}_1(r,\tilde{\omega}) \approx \frac{1}{2}Ar^{l+1}, \tag{31}$$

所以有

$$G^c(y,x,t) = \frac{i\pi^{\frac{1}{2}} 2^{\mu+\frac{1}{2}} m^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-2\mu-1+i\mu\pi}}{\mu\Gamma(\mu)} \times t^{-\mu-\frac{1}{2}} (xy)^{\mu+\frac{1}{2}} J_{\mu+\frac{1}{2}}(mt). \tag{32}$$

当 $mt\gg 1$ 时,由文献[11]的(9.2.1)式,得

$$G^c(y,x,t) = \frac{i2^{\mu+1} m^\mu e^{-2\mu-1+i\mu\pi}}{\mu\Gamma(\mu)} \times t^{-\mu-1} (xy)^{\mu+\frac{1}{2}} \cos\left[mt - \frac{(m + 1)\pi}{2}\right]. \tag{33}$$

由此可见,有质标量场在固定半径处的中后期衰减是振荡反幂次型的.由于 $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{l(l+1)}{b}}$,且 $b < 1$,因此,$\mu + 1 > l + 3/2$.所以有质量标量场在整体单极子荷电黑洞背景中的衰减比单纯的 Reissner-Nordström 时空中要快[6].

3. 总　　结

本文利用谱分解技术与黑洞 Green 函数方法,研究了有质量标量场在整体单极子荷电黑洞时空背景中的中后期衰减.我们发现有质标量场的后期衰减比在单纯的 Reissner-Nordström 时空度规下的后期衰减更快.本文的结果还表明在单极子荷电黑洞背景中,标量场的中后期衰减不仅依赖场参量,而且依赖时空参量 b,在此情况下,标量场的中后期衰减会受到渐近远区反射的影响.

[1] Ruffini and Wheeler J A 1971 *Phys. Today.* **24** 30
Misner C W, Thorne K S and Wheeler J A 1997 *Gravitation* (Freeman, San Francisco)
[2] Price R H 1972 *Phys. Rev.* D **5** 2419
[3] Hod S and Piran T 1998 *Phys. Rev.* D **58** 024017
[4] Hod S and Piran T 1998 *Phys. Rev.* D **58** 024018
[5] Mazzitelli F D and Lousto C O 1991 *Phys. Rev.* D **43** 468
[6] Hod S and Piran T 1998 *Phys. Rev.* D **58** 044018
[7] Yu H 1994 *Nucl. Phys.* B **430** 427
[8] Yu H 1995 *Class. Quant. Gravit.* **2** 3077
[9] Barriola M and Vilenkin A 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 341
[10] Leaver E W 1986 *Phys. Rev.* D **34** 384
[11] 1870 *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M Abramowitz and I A Stegun (New York: Dover)

Decay of massive scalar field in the charged black-hole-global-monopole background

Zhu Yun-Feng Yu Hong-Wei†

(*Department of Physics, Institute of Physics, Hunan Normal University, Changsha* 410081, *China*)

(Received 15 December 2001; revised manuscript received 20 January 2002)

Abstract

By studying the late-time evolution of massive scalar fields in the charged black-hole-global-monopole background, we find that the asymptotic decay of these fields is dominated by an oscillatory inverse power-law tail, and the decay is faster in the case considered here than in that of the Reissner-Nordström metric without a global monopole.

Keywords: black hole, global-monopole, massive scalar field, the late-time evolution

PACC: 0420, 0470

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10075019).

† Corresponding Author