

BGK 方法在三维非结构网格上的初步应用^{*}

孙喜明 姚朝晖 杨京龙

(清华大学工程力学系,北京 100084)

(2001 年 12 月 12 日收到 2002 年 2 月 20 日收到修改稿)

将 BGK 计算方法从二维拓展到三维并且应用于三维非结构网格,具有重要的理论价值和实用价值.采用旋转局部座标的方法,发展了一种针对三维非结构网格的 BGK 计算方法.在计算过程中,将最小二乘法应用于三维非结构网格的导数计算.对三维激波管和三维欠膨胀垂直冲击射流等两个算例进行了细致分析.这两个算例的计算结果表明,该方法在三维非结构网格上的初步应用是成功的.

关键词:气动 BGK 方法,三维,非结构网格

PACC:0540,0340

1. 引言

BGK(Bhatnagar-Gross-Krook)模型^[1]是针对 Boltzmann 方程碰撞项的一种简化. BGK 方法是基于 BGK 模型的一种数值计算方法.目前基于 BGK 模型的数值计算方法主要有三种:1)格子气 BGK 方法^[2-5];2)离散速度坐标 BGK 方法^[6];3)Gas-Kinetic BGK 方法^[7].本文发展的三维计算方法属于 3)的范畴. Gas-Kinetic BGK 方法满足熵增条件,不会产生膨胀激波和负的密度值等非物理现象,不仅适用于连续介质气体运动,还可用于稀薄或超稀薄气体运动的数值模拟.对于边界形状复杂的三维流动问题,采用 Delaunay 方法生成四面体非结构网格^[8-10]可以大大降低数值模拟的难度.本文将 Gas-Kinetic BGK 方法从二维^[7,11-14]推广到三维,并且应用于三维非结构网格,这是非常有理论价值和实用价值的工作.本文采用有限体积法,在每一时间步的计算过程中,为了计算每个四面体网格单元各面上的通量,对坐标轴进行旋转,使旋转后的局部坐标轴垂直于网格单元的各面,计算出各面的通量,然后将局部坐标轴再旋转回原始状态,用各面上的通量之和计算出该时间步上各物理量的值,并依此推进时间步.在计算过程中,将最小二乘法应用于三维非结构网格的导数计算.通过对三维激波管和三维欠膨胀垂直冲击射流

等两个算例的计算结果表明,该方法在三维非结构网格上的初步应用是成功的.本文以四面体网格单元为例说明该方法的应用.从理论上讲,本文的方法可以适用于任何一种形式的非结构网格(即任何一种或几种多面体单元组成的非结构网格).

2. 三维 BGK 模型

三维 BGK 模型可以表示为如下的微分方程^[1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{g - f}{\tau}, \quad (1)$$

其中 g 是 Maxwell 平衡态气体速度分布函数; f 是 t 时刻气体瞬态速度分布函数; τ 为气体分子平均碰撞周期,与气体黏性和热传导系数有关; u , v 和 w 分别为 x 方向、 y 方向和 z 方向的气体分子运动速度. g 的表达式为^[1]

$$g = \rho \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{(K+3)/2} e^{-\lambda[(u-U)^2 + (v-V)^2 + (w-W)^2 + \xi^2]}, \quad (2)$$

其中 K 是分子内部自由度,对于三维问题, $K = N = \frac{-3\gamma + 5}{\gamma - 1} = 2$. U , V , W 分别是 x , y 方向和 z 方向的气体宏观速度; ξ 是分子内部的 K 维速度矢量,即 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_K)$. 在平衡状态下, $\xi^2 = \sum_{i=1}^K \xi_i^2$; ρ 是密度,对于三维问题^[1,7],

$$\lambda = \frac{K+3}{4} \frac{1}{\epsilon - U^2/2 - V^2/2 - W^2/2}, \quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号:19902009)资助的资助.

其中 ϵ 是气体单位体积上的总能^[7] ,

$$\rho \epsilon = \frac{1}{2} \rho (U^2 + V^2 + W^2) + \frac{P}{\gamma - 1}. \quad (4)$$

宏观物理量 $\rho, \rho U, \rho V, \rho W$ 和 $\rho \epsilon$ 与气体分布函数 f 的关系为^[7]

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ \rho V \\ \rho W \\ \rho \epsilon \end{pmatrix} = \int \psi_\alpha f d\Xi, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (5)$$

其中 $d\Xi = du dv dw d\xi$, ψ_α 的表达式为^[7]

$$\psi_\alpha = \left(1 - u - v - w, \frac{u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2}{2} \right)^T. \quad (6)$$

方程 (1) 的相容性条件为^[7]

$$\int \frac{g - f}{\tau} \psi_\alpha du dv dw d\xi = 0. \quad (7)$$

方程 (1) 的一般形式的解为^[7]

$$\begin{aligned} & f(x, y, z, t, u, v, w, \xi) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^t g(x', y', z', t', u, v, w, \xi) e^{-(t-t')/\tau} dt' \\ &+ e^{-t/\tau} f_0(x - ut, y - vt, z - wt), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $x' = x_{i+1/2} - u(t - t')$, $y' = y_j - v(t - t')$ 和 $z' = z_k - w(t - t')$ 表示分子运动轨迹; f_0 是 $t = 0$ 时刻的气体分布函数.

3. 应用于三维非结构网格的 BGK 方法

3.1. 空间离散

采用最小二乘法来计算四面体单元中心处物理

量 ρ, U, V, W, ϵ 和 P 的偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = & \sum_{j=1}^4 \{ (x_j - x_i) r_{22} r_{33} - (y_j - y_i) r_{13} r_{23} \\ & - (z_j - z_i) r_{12} r_{23} \} (\varphi_j - \varphi_i) \\ & (r_{11} r_{22} r_{33} - r_{12} r_{13} r_{23}), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = & \sum_{j=1}^4 \{ (y_j - y_i) r_{11} r_{33} - (x_j - x_i) r_{23} r_{13} \\ & - (z_j - z_i) r_{12} r_{23} \} (\varphi_j - \varphi_i) \\ & (r_{11} r_{22} r_{33} - r_{12} r_{13} r_{23}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = & \sum_{j=1}^4 \{ (z_j - z_i) r_{11} r_{22} - (x_j - x_i) r_{12} r_{23} \\ & - (y_j - y_i) r_{12} r_{13} \} (\varphi_j - \varphi_i) \\ & (r_{11} r_{22} r_{33} - r_{12} r_{13} r_{23}), \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{11} &= \sum_{j=1}^4 (x_j - x_i)^2, \\ r_{12} &= \sum_{j=1}^4 (x_j - x_i)(y_j - y_i), \\ r_{13} &= \sum_{j=1}^4 (x_j - x_i)(z_j - z_i), \\ r_{23} &= \sum_{j=1}^4 (y_j - y_i)(z_j - z_i), \\ r_{22} &= \sum_{j=1}^4 (y_j - y_i)^2, \\ r_{33} &= \sum_{j=1}^4 (z_j - z_i)^2. \end{aligned}$$

φ_i 表示第 i 个四面体单元重心处的物理量, φ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 表示第 j 个四面体单元的四个相邻四面体单元重心处的物理量.

3.2. 坐标轴旋转

以计算图 1 中 IJM 面的通量为例, 需要旋转坐标轴 XYZ , 使新的局部坐标 $X'Y'Z'$ 的 X' 轴垂直于 IJM 面, Y' 轴和 Z' 轴在 IJM 面上.

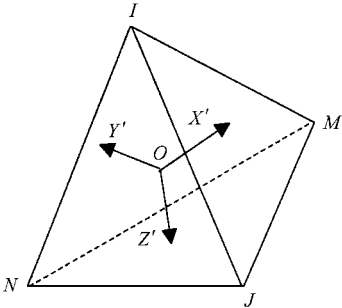


图 1 四面体网格单元(控制单元)

三维坐标变换的公式如下:

$$\begin{cases} x' = l_1 x + m_1 y + n_1 z, \\ y' = l_2 x + m_2 y + n_2 z, \\ z' = l_3 x + m_3 y + n_3 z, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} x = l_1 x' + l_2 y' + l_3 z', \\ y = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ z = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z'. \end{cases}$$

xyz 与 $x'y'z'$ 坐标系的原点相同, 而 $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2, l_3, m_3, n_3$ 分别是 x', y', z' 轴相对于 x, y, z 轴的方向余弦.

在每一时间步的计算过程中, 最重要的就是获

得网格单元各面上的气体分布函数 f . 由 (8) 式可知, 要想得到 IJM 面上的气体分布函数 f , 就必须得到初始气体分布函数 f_0 和平衡态气体分布函数 g .

3.3. 初始气体分布函数

由于 y' , z' 方向上的速度分量对于通量的贡献较小, 为了减少计算量, 忽略 y' 和 z' 方向上的速度分量. 经过简化的初始气体分布函数可以表示为^[14]

$$f_0(x', y', \rho) = \begin{cases} g_l(1 + a_l x') - \tau(a_l u' + A_l) & x' < 0 \\ g_r(1 + a_r x') - \tau(a_r u' + A_r) & x' \geq 0 \end{cases} \\ = g_l(1 + a_l x' - \tau(a_l u' + A_l))H(x') \\ + g_r(1 + a_r x' - \tau(a_r u' + A_r))H(x'), \quad (12)$$

其中下标 l 和 r 分别表示交界面的左边和右边, 这里的界面就是指要计算通量的单元 $IJMN$ 的 IJM 面. Heaviside 函数定义为^[14]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0, \end{cases} \quad (13)$$

式中系数 a_l, a_r, A_l, A_r 的表达式为

$$a_m = a_{1m} + a_{2m}u + a_{3m}v + a_{4m}w$$

$$+ a_{5m} \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2), \quad (14)$$

$$A_m = A_{1m} + A_{2m}u + A_{3m}v + A_{4m}w \\ + A_{5m} \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2), \quad (15)$$

式中下标 m 表示 (左边) 或者 (右边).

3.3.1. 系数 a_l 和 a_r 的计算

宏观物理量与初始气体分布函数 f_0 在三维情况下, 可推导得到

$$\int f_0 \bar{a}_m \phi_a d\Xi = \frac{1}{\rho_m} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho U}{\partial x} \right)_m, \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \rho V}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho W}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} \right)_m \right)^T, \quad (16)$$

即

$$M_m(a_{1m}, a_{2m}, a_{3m}, a_{4m}, a_{5m})^T \\ = \frac{1}{\rho_m} \left(\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho U}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho V}{\partial x} \right)_m, \right. \\ \left. \left(\frac{\partial \rho W}{\partial x} \right)_m, \left(\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x} \right)_m \right)^T, \quad (17)$$

其中

$$M_m = \begin{bmatrix} 1 & U_m & V_m & W_m & B_{1m} \\ U_m & U_m^2 + \frac{1}{2\lambda_m} & U_m V_m & U_m W_m & B_{2m} \\ V_m & U_m V_m & V_m^2 + \frac{1}{2\lambda_m} & V_m W_m & B_{3m} \\ W_m & U_m W_m & V_m W_m & W_m^2 + \frac{1}{2\lambda_m} & B_{4m} \\ B_{1m} & B_{2m} & B_{3m} & B_{4m} & B_{5m} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B_{1m} = \frac{1}{2} \left[U_m^2 + V_m^2 + W_m^2 + \frac{K+3}{2\lambda_m} \right], \quad (19)$$

$$B_{2m} = \frac{1}{2} \left[U_m(U_m^2 + V_m^2 + W_m^2) + \frac{U_m(K+5)}{2\lambda_m} \right], \quad (20)$$

$$B_{3m} = \frac{1}{2} \left[V_m(U_m^2 + V_m^2 + W_m^2) + \frac{V_m(K+5)}{2\lambda_m} \right], \quad (21)$$

$$B_{4m} = \frac{1}{2} \left[W_m(U_m^2 + V_m^2 + W_m^2) + \frac{W_m(K+5)}{2\lambda_m} \right], \quad (22)$$

$$B_{5m} = \frac{1}{4} (U_m^2 + V_m^2 + W_m^2)$$

$$+ \frac{(K+5)(U_m^2 + V_m^2 + W_m^2)}{\lambda} \\ + \frac{K^2 + 8K + 15}{4\lambda^2}. \quad (23)$$

于是 a_m 可以表示为

$$a_{1m} = \frac{1}{\rho_m} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - U_m a_{2m} - V_m a_{3m} - W_m a_{4m} \\ - \frac{1}{2} \left(U_m^2 + V_m^2 + W_m^2 + \frac{K+3}{2\lambda_m} \right) a_{5m}, \\ a_{2m} = 2\lambda_m \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m - \frac{U_m}{2\lambda_m} a_{5m} \right], \\ a_{3m} = 2\lambda_m \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_m - \frac{V_m}{2\lambda_m} a_{5m} \right],$$

$$a_{4m} = 2\lambda_m \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_m - \frac{W_m}{2\lambda_m} a_{5m} \right],$$

$$a_{5m} = \frac{4\lambda_m^2}{K+3} \left[2 \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right)_m - 2U_m \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m - 2V_m \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_m - 2W_m \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_m \right]. \quad (24)$$

3.3.2. 系数 A_l 和 A_r 的计算

由下面的公式可以得到 A_l 和 A_r [14]

$$\int (a_l u + A_l) \phi g_l d\xi = 0, \quad (25)$$

$$\int (a_r u + A_r) \phi g_r d\xi = 0. \quad (26)$$

3.4. 平衡态气体分布函数 g

界面 IJM 近平衡态气体分布函数 g 可表示为 [14]

$$g(x, y, z, t) = g_0 \{ 1 + \bar{a}_l x (1 - H(x)) + \bar{a}_r x H(x) + \bar{A} t \}, \quad (27)$$

其中 g_0 是界面 IJM 重心处的平衡态气体分布函数. 系数 \bar{a}_l, \bar{a}_r 的形式由 (14) 式给出. \bar{A} 的形式由 (15) 式给出.

系数 \bar{a}_l, \bar{a}_r 的计算方法同前面介绍的系数 a_l, a_r 的计算方法.

系数 \bar{A} 可以下面的公式计算得到

$$\int g_0 \{ \bar{a}_l x (1 - H(x)) + \bar{a}_r x H(x) + \bar{A} t \} d\xi = 0. \quad (28)$$

g_0 的计算:

g_0 的计算与界面 IJM 上的气体宏观物理量 ρ_0, U_0, V_0, W_0 和 E_0 有关. 这些宏观物理量在三维情况下可推导得到

$$W_0 = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \rho_0 U_0 \\ \rho_0 V_0 \\ \rho_0 W_0 \\ \rho_0 E_0 \end{bmatrix} = \rho_l \begin{bmatrix} u^0 >0 \\ u^1 v^0 >0 \\ u^0 v^1 >0 \\ u^0 w^1 >0 \\ \frac{1}{2} (u^2 v^0 >0 + u^0 v^2 >0 + u^0 w^2 >0 + u^0 v^0 w^0 \xi^2 >0) \end{bmatrix} + \rho_r \begin{bmatrix} u^0 <0 \\ u^1 v^0 <0 \\ u^0 v^1 <0 \\ u^0 w^1 <0 \\ \frac{1}{2} (u^2 v^0 <0 + u^0 v^2 <0 + u^0 w^2 <0 + u^0 v^0 w^0 \xi^2 <0) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中 [14]

$$u^0 >0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(-\sqrt{\lambda} U),$$

$$u >0 = U u^0 >0 + \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda U^2}}{\sqrt{\pi \lambda}},$$

$$u^{n+2} >0 = U u^{n+1} >0 + \frac{n+1}{2\lambda} u^n >0,$$

$$u^0 <0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\lambda} U),$$

$$u <0 = U u^0 <0 - \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda U^2}}{\sqrt{\pi \lambda}},$$

$$u^{n+2} <0 = U u^{n+1} <0 + \frac{n+1}{2\lambda} u^n <0,$$

$$\xi^2 = \frac{K}{2\lambda}, \quad \xi^4 = \frac{K(K+2)}{4\lambda^2},$$

$$u^l v^m w^n \xi^p = u^l v^m w^n \xi^p.$$

3.5. 气体分子平均碰撞周期 τ

迄今为止 (8) 式中只有气体分子平均碰撞周期 τ 是未知量.

对于黏性流动计算, τ 与气体真实黏性系数 ν 有关 [14],

$$\tau = \frac{\nu \rho}{P} + \frac{|\rho_l/\lambda_l - \rho_r/\lambda_r|}{|\rho_l/\lambda_l + \rho_r/\lambda_r|} \Delta t. \quad (30)$$

对于非黏性流动计算 [14],

$$\tau = C_1 \Delta t + \Delta t \min(1, C), \tag{31}$$

其中

$$C = C_2 \frac{|\rho_l/\lambda_l - \rho_r/\lambda_r|}{|\rho_l/\lambda_l + \rho_r/\lambda_r|}. \tag{32}$$

一般来说,取 $C_1 = 0.05$ 和 $C_2 = 5$; Δt 是 CFL 时间步长,由下式计算得出

$$\Delta t = \frac{1 - \delta}{\left(\sqrt{3\max(u^2, v^2, w^2)} + \sqrt{\frac{\gamma}{2\lambda}}\right)\Big|_{\max} + \delta} \frac{V_{IJMN}}{S_{IJMN}}\Big|_{\min}, \tag{33}$$

其中 δ 是松弛系数,取值从 0.1 到 0.4;对于双原子结构的分子来说, γ 取 1.4; V_{IJMN} 和 S_{IJMN} 分别是四面体 $IJMN$ 的体积和四个面的面积之和; $|_{\max}$ 和 $|_{\min}$ 分别表示某物理量在所有四面体单元重心处的最大值和最小值.

3.6. 四面体控制单元 $IJMN$ 的通量

IJM 面的通量可由下式计算得到

$$\mathbf{F}'_{IJM} = \begin{bmatrix} F_\rho \\ F_{\rho U} \\ F_{\rho V} \\ F_{\rho W} \\ F_{\rho E} \end{bmatrix} = \int u \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2 + \xi^2) \end{bmatrix} fd\Xi. \tag{34}$$

IJN 面的通量 \mathbf{F}'_{IJN} , JMN 面的通量 \mathbf{F}'_{JMN} 和 JMN 面的通量 \mathbf{F}'_{JMN} 都可以按照 3.1—3.5 所述的过程得到.按照下式可以计算得到下一时间步的宏观物理量

$$\mathbf{W}_j^{n+1} = \mathbf{W}_j^n + \frac{\Delta t}{V_{IJMN}} (R(\mathbf{F}'_{IJM}S_{IJM}) + R(\mathbf{F}'_{IJN}S_{IJN}) + R(\mathbf{F}'_{JMN}S_{JMN}) + R(\mathbf{F}'_{JMN}S_{JMN})), \tag{35}$$

其中 $\mathbf{W}_j = [\rho_j, \rho_j U_j, \rho_j V_j, \rho_j W_j, \rho_j E_j]^T$; S_{IJM} , S_{IJN} , S_{JMN} 和 S_{JMN} 分别是四面体 $IJMN$ 四个面的面积; V_{IJMN} 是四面体 $IJMN$ 的体积; Δt 是 CFL 时间步长,如 (33) 式所示. $R(\mathbf{F}')$ 是旋转算子,将通量 \mathbf{F}' 从局部坐标系 $X'Y'Z'$ 旋转到原始坐标 XYZ ^[15].

4. 算 例

4.1. 三维激波管

如图 2 所示,在 $t < 0$ 时刻,激波管的 $X = 0$ 截面两侧分别充满着两种气体,其物理状态如表 1 所示;

在 $t = 0$ 时刻,两种气体之间的薄膜破裂;在 $t > 0$ 的时间内,在 $X < 0$ 的区域内,会产生向上游($X < 0$ 的方向)传播的膨胀波;同时,在 $X > 0$ 的区域内,随着压缩波向下游传播,形成两个间断面,一处是接触间断面,另一处是激波间断面.

从图 3 可以观察到左边倾斜的线段代表膨胀波,正在向上游传播,数值结果与精确解符合得很好.右边 $X > 0$ 的区域内,第一处间断面是接触间断面,正在向下游传播,数值结果与精确解符合得较好;第二处间断面是激波间断面,以比接触间断面更高的速度向下游传播,由图中可以看出,数值结果的激波传播速度要略大于精确解,这是由计算误差引起的.

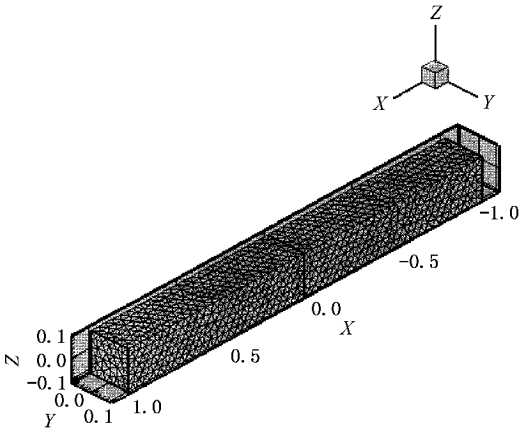


图 2 本算例的表面网络结构示意图(四面体网格单元总数 11613 个)

表 1 初始值

| | P | ρ |
|---------|-----|--------|
| $X < 0$ | 1.0 | 1.0 |
| $X > 0$ | 0.1 | 0.125 |

综上所述,虽然本算例采用的网格数目较少,但是 BGK 方法还是能清晰地分辨出接触间断面和激波间断面.

4.2. 三维欠膨胀垂直冲击射流(NPR = 3)

图 4 是本算例的结构示意图.喷嘴直径 $D = 6\text{mm}$,喷嘴总压 P_0 与环境压力(NPR = Nozzle Pressure Ratio)之比为 3,出口距冲击平板 $2D$,计算域为 $2D \times 10D \times 10D$.

图 5 显示的是 $Y = 0$ 对称面上的密度分布,上半部分是数值模拟的结果,上半部分是阴影仪的实

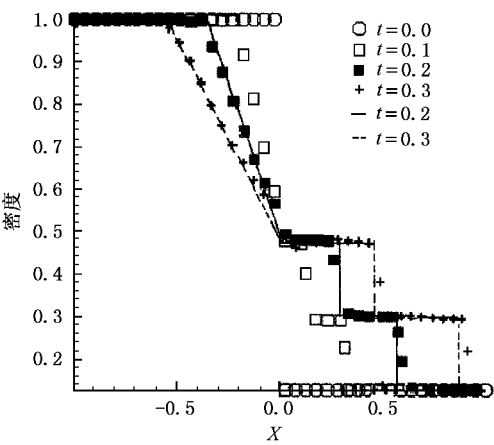


图3 $Y=0,Z=0$ 直线上(即中心轴线上)的密度分布

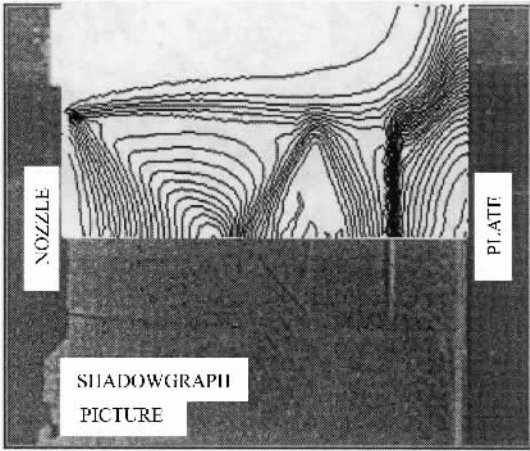


图5 密度等值线分布

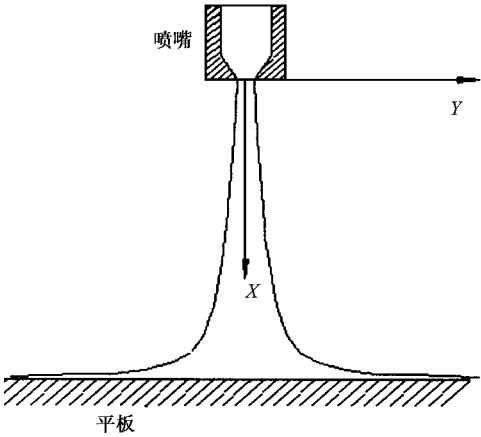


图4 垂直冲击射流的结构示意图

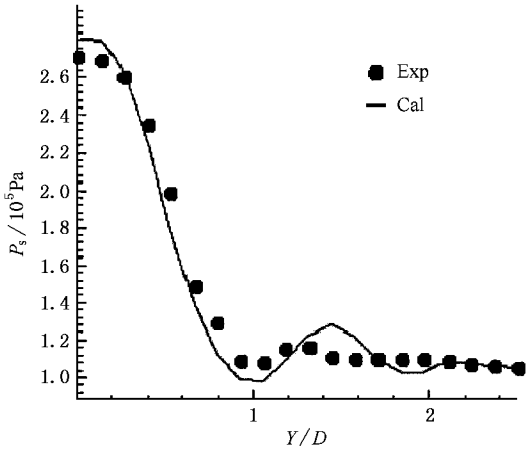


图6 冲击平板上的静压分布

验结果.从图中可以看出,由于喷嘴出口的静压大于环境压力,因此在喷嘴出口附近气体要继续膨胀,形成膨胀波,膨胀波在射流边界上反射为压缩波.在冲击平板附近有一道非常明显的板前驻激波,驻激波的位置位于第二个波系结构的膨胀波区域,驻激波与平板之间形成了一个滞止区.

从图5中的比较可以看到,数值模拟显示的激波结构、板前驻激波的位置与实验结果符合较好.

图6显示的是冲击平板上的静压分布.在冲击平板上,静压的最大值出现在冲击点处.随着射流沿着平板方向向外发展,平板上的静压逐渐减小.在距平板冲击中心1.2D处,压力分布出现了波动,这是由于板前驻激波的反射波与冲击平板之间相互作用形成的.从图6中的比较可以看到,计算值与实验值有一些差异,这是由于未考虑喷嘴内部流动,使得喷嘴出口处的边界条件与实验情况不完全符合.

5. 结论和展望

本文发展地应用于非结构网格的BGK方法属于有限体积法.在计算重构阶段(reconstruction step),采用最小二乘法计算偏导数.在计算发展阶段(gas evolution step),采用旋转局部坐标的方法计算控制单元的通量.由本文上述内容可以知道,本文发展的方法是一种适用于复杂结构的高精度计算方法.通过两个典型算例的计算结果表明本文的方法在非结构网格上的初步应用是成功的.

本文发展地应用于三维非结构网格的BGK方法有一个不足之处,那就是计算量很大.由于计算过程中涉及到局部坐标系的多次旋转,每次局部坐标系旋转之后所有的物理量及其偏导数都要进行相应旋转,因此,相同网格数目情况下,计算量比二维情

况下多了数倍.因此,如何优化、减少网格数目,提高计算效率成了我们日后的工作重点之一.

本文的工作得到了沈孟育教授、徐昆教授和汤华中教授的指导,在这里,对他们表示衷心的感谢.

[1] Bhatnagar P , Gross E P and Krook M K 1954 *Phys . Rev .* **94** 511

[2] He X Y , Chen S Y and Zhang R Y 1999 *J . Comput . Phys .* **152** 642

[3] Li H B and Huang P H 2001 *Acta Phys . Sin .* **50** 837(in Chinese)
[李华兵、黄乒花 2001 物理学报 **5** 837]

[4] Lu X Y and Li H B 2001 *Acta Phys . Sin .* **50** 422(in Chinese) 吕
晓阳、李华兵 2001 物理学报 **3** 422]

[5] Feng S D ,Mao J Y and Zhang Q 2001 *Chin . Phys .* **10** 1103

[6] Yang J Y and Huang J C 1995 *J . Comput . Phys .* **120** 323

[7] Xu K 2000 *J Comput . Phys .* **158** 1

[8] Joe B 1991 *Int . J . Num . Meth . Eng .* **31** 987

[9] Su M D and Zhu F L 1996 *Chinese Journal of Computational Physics*
15 6(in Chinese) 苏铭德、朱方林 1996 计算物理 **15** 6]

[10] Su M D and Sun X M 2000 *Chinese Journal of Computational Physics*
17 227(in Chinese) 苏铭德、孙喜明 2000 计算物理 **17** 227]

[11] Xu K 1998 VKI report ,1998-03

[12] Chae D ,Kim C and Rho O H 2000 *J . Comput . Phys .* **158** 27

[13] Xu K 2001 *Int . J . Numer . Methods in Fluids* **37** 1

[14] Xu K 2001 *J . Comput . Phys .* **171** 289

[15] Hussaini M Y and Leer B V 1997 *Upwind & High-Resolution
Schemes*(New York :Springer-Verlag)

The application of Bhatnagar-Gross-Krook scheme on 3D unstructured mesh^{*}

Sun Xi-Ming Yao Zhao-Hui Yang Jing-Long
(*Dynamic Engineering Department ,Tsinghua University ,Beijing 100084 ,China*)
(Received 12 December 2002 ; revised manuscript received 20 February 2002)

Abstract

It is very meaningful to extend the gas kinetic Bhatnagar-Gross-Krook scheme from 2D to 3D ,and is very useful to apply it on unstructured mesh .In this paper ,a gas kinetic BGK scheme for 3D adaptive unstructured mesh has been developed .A practical method for 3D unstructured meshes based on least-squares is developed to obtain the derivatives .Some test cases validate the capability of the current numerical approach to provide a highly accurate solution in complex geometry .

Keywords : gas kinetic BGK scheme , 3D , unstructured mesh
PACC : 0540 , 0340

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 19902009) .