第 52 卷 第 1 期 2003 年 1 月
1000-3290/2003/52(01)/0005-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.1,January,2003


# 一类 S-mKdV 方程族及其扩展可积模型*

张玉峰[1)2)] 闫庆友[3)] 张鸿庆[4)]

1)(山东科技大学信息学院,泰安 271019)
2)(中国科学院计算数学与科学工程计算研究所,北京 100080)
3)(大连理工大学机械学院,大连 116024)
4)(大连大学先进设计技术中心,大连 116622)

(2002 年 4 月 14 日收到;2002 年 6 月 2 日收到修改稿)

由 loop 代数 $\tilde{A}_1$ 的一个子代数出发,构造了一个线性等谱问题,再利用屠格式计算出了一类 Liouvelle 意义下的可积系统及其双 Hamilton 结构,作为该可积系统的约化,得到了著名的 Schrödinger 方程和 mKdV 方程,因此称该系统为 S-mKdV 方程族.根据已构造的 $\tilde{A}_1$ 的子代数,又构造了维数为 5 的 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个新的子代数 $\tilde{G}$,由此出发设计了一个线性等谱形式,再利用屠格式求得了 S-mKdV 方程族的一类扩展可积模型.利用这种方法还可以求 BPT 方程族、TB 方程族等谱系的扩展可积模型.因此本方法具有普遍应用价值.最后作为特例,求得了著名的 Schrödinger 方程和 mKdV 方程的可积耦合系统.

**关键词**:loop 代数,Hamilton 结构,扩展可积模型,Schrödinger 方程,mKdV 方程
**PACC**:0340K,0220,0365G

## 1. 引 言

由于孤立子理论在场论、凝聚态物理、流体物理、等离子体物理、光学等物理学各分支的广泛应用,可积系统的研究引起了许多数学家和物理学家的极大兴趣[1].文献[1]通过建立一种不可逆形变关系系统计算出了高维可积模型.文献[2,3]研究了具有广义 Virasoro 对称的(3+1)维潘勒韦(Painlevé)可积模型.文献[4—7]研究了具有物理背景的高维 Painlevé 可积模型.文献[8—11]通过构造一类抽象的 loop 代数 $\tilde{G}$ 求得了 TD 方程族,Levi 方程族,KN 方程族等谱系的可积耦合系统.文献[12]通过构造一个具体的 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数 $\tilde{G}$ 求得了著名的 AKNS 方程族的一类扩展可积模型,即可积耦合系统.作为特例,计算出了 KdV 方程的可积耦合系统.我们发现文献[8—12]有一个共性,即都是从 loop 代数 $\tilde{A}_1$

$$h(n)=\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & -\lambda^n\end{pmatrix},e(n)=\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$f(n)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \lambda^n & 0\end{pmatrix},$$

$$[h(m),e(n)]=2e(m+n),$$

$$[h(m),f(n)]=-2f(m+n),$$

$$[e(m),f(n)]=h(m+n),$$

$$\deg h(n)=\deg e(n)=\deg f(n)=n \qquad (1)$$

出发构造出 loop 代数 $\tilde{G}$:

$$[e_1,e_2]=2e_2,[e_1,e_3]=-2e_3,[e_1,e_4]=e_4,$$

$$[e_1,e_5]=-e_5,[e_2,e_3]=e_1,[e_2,e_4]=0,$$

$$[e_2,e_5]=e_4,[e_3,e_4]=e_5,[e_3,e_5]=0,$$

$$[e_4,e_5]=0,$$

$$e_i(n)=e_i\lambda^n,[e_i(m),e_j(n)]=[e_i,e_j]\lambda^{m+n},$$

$$\deg e_i(n)=n \qquad i,j=1,2,3,4,5. \qquad (2)$$

由此构造出一个恰当的线性等谱问题,再利用屠格式来求可积耦合系统的,易发现(2)式是根据(1)式和 Jacobi 恒等式构造出来的.然而利用(2)式和屠格式是无法求出 BPT 族、TB 族等谱系的可积耦合系统的.其原因在于这些方程族是用到了一类与 loop 代数(1)式不同的另一类 loop 代数 $\tilde{A}_1$

---

* 国家自然科学基金(批准号:1007213)资助的课题.

$$\bar{h}(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & -\lambda^n\end{pmatrix},$$

$$e^+(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\ \lambda^n & 0\end{pmatrix},$$

$$e^-(n)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \lambda^n\\ -\lambda^n & 0\end{pmatrix},$$

$$[\bar{h}(m),e^+(n)]=e^-(m+n),$$

$$[\bar{h}(m),e^-(n)]=e^+(m+n),$$

$$[e^+(m),e^-(n)]=-\bar{h}(m+n),$$

$$\deg\bar{h}(n)=\deg e^+(n)=\deg e^-(n)=n \quad (3)$$

导出的.下面根据(3)式构造出一类与 $\tilde{G}$ 即(2)式不同的另一类具体的维数也是5的loop代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数 $\tilde{G}$,由此出发可求出BPT族、TB族的一类扩展可积模型.由于BPT族含有三个位势,运算量较大,为了说明本文提出的方法,先根据(3)式构造出一类方程族即S-mKdV方程族,以此作为例子求出其双Hamilton结构及其一类扩展可积模型,特别地求出了Schrödinger方程和mKdV方程的可积耦合系统.至于BPT族、TB族的扩展可积模型如法炮制.

## 2. S-mKdV方程族及其双Hamilton结构

考虑等谱问题

$$\varphi_x=U\varphi,$$

$$U=\bar{h}(1)+qe^+(0)+re^-(0)$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda & q+r\\ q-r & -\lambda\end{pmatrix}, \quad (4)$$

设

$$V=\sum_{m=0}^{\infty}(2a_m\bar{h}(-m)+(b_m+c_m)e^+(-m)$$

$$+(b_m-c_m)e^-(-m)),$$

解静态零曲率方程

$$V_x=[U,V], \quad (5)$$

得递推关系

$$2a_{mx}=(q+r)c_m+(r-q)b_m,$$

$$b_{mx}=b_{m+1}-(q+r)a_m,$$

$$c_{mx}=-c_{m+1}+(q-r)a_m,$$

$$b_0=c_0=0,a_0=\alpha\neq 0,$$

$$a_1=0,b_1=\alpha(q+r),$$

$$c_1=\alpha(q-r),$$

$$a_2=\frac{\alpha}{2}(r^2-q^2),b_2=\alpha(q_x+r_x),$$

$$c_2=\alpha(r_x-q_x),$$

$$a_3=\alpha(rq_x-r_xq),$$

$$b_3=\alpha(q_{xx}+r_{xx})+\frac{\alpha}{2}(q+r)(r^2-q^2),$$

$$c_3=-\alpha(r_{xx}-q_{xx})+\frac{\alpha}{2}(q-r)(r^2-q^2). \quad (6)$$

记

$$(\lambda^nV)_+=\sum_{m=0}^{n}(2a_m\bar{h}(n-m)+(b_m+c_m)e^+$$

$$\times(n-m)+(b_m-c_m)e^-(n-m)),$$

$$(\lambda^nV)_-=\lambda^nV-(\lambda^nV)_+,$$

则(5)式可写为

$$(-\lambda^nV)_{+x}+[U,(\lambda^nV)_+]=(\lambda^nV)_{-x}-[U,(\lambda^nV)_-],$$

且

$$-(\lambda^nV)_{+x}+[U,(\lambda^nV)_+]$$

$$=-(b_{n+1}+c_{n+1})e^-(0)-(b_{n+1}-c_{n+1})e^+(0),$$

记 $V^{(n)}=(\lambda^nV)_+$,则零曲率方程

$$U_t-V_x^{(n)}+[U,V^{(n)}]=0. \quad (7)$$

确定系统

$$u_{t_n}=\begin{pmatrix}q\\ r\end{pmatrix}_{t_n}=\begin{pmatrix}b_{n+1}-c_{n+1}\\ b_{n+1}+c_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b_{n+1}+c_{n+1}}{2}\\ \frac{c_{n+1}-b_{n+1}}{2}\end{pmatrix}=JL^n\begin{pmatrix}\alpha q\\ -\alpha r\end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$L=\begin{pmatrix}\partial+r\partial^{-1}r & r\partial^{-1}q\\ q\partial^{-1}r & -\partial+q\partial^{-1}q\end{pmatrix}$$

是反对称算子.

当 $n=2$ 时,(8)式约化为非线性Schrödinger方程组

$$q_{t_2}=2\alpha r_{xx}-\alpha r(r^2-q^2),$$

$$r_{t_2}=2\alpha q_{xx}-\alpha q(r^2-q^2). \quad (9)$$

取 $\alpha=\mathrm{i}$,并设 $r$ 与 $q/\mathrm{i}=q_1$ 都是实数,设 $Q=r+q=r+\mathrm{i}q_1$,则(9)式的两个方程相加便得到非线性Schrödinger方程[13]

$$\mathrm{i}Q_t+2Q_{xx}-Q|Q|^2=0. \quad (10)$$

当 $n=3$ 时,(8)式约化为广义mKdV方程组

$$\begin{aligned} q_{t_3} &= 2\alpha q_{xxx} + \alpha q_x(r^2 - q^2) + 2\alpha q(rr_x - qq_x) \\ &\quad - 2\alpha r^2 q_x + 2\alpha qrr_x, \\ r_{t_3} &= 2\alpha r_{xxx} + \alpha r_x(r^2 - q^2) + 2\alpha r(rr_x - qq_x) \\ &\quad - 2\alpha qrq_x + 2\alpha q^2 r_x. \end{aligned} \tag{11}$$

在(11)式中取 $q = r\mathrm{i}$,则得到著名的 mKdV 方程

$$r_t = 2\alpha r_{xxx} + 10\alpha r^2 r_x. \tag{12}$$

因为(8)式中含有(10)式和(12)式,所以称(8)式为 S-mKdV 方程族.为应用迹恒等式[14],引入新的变量

$$G_{n+1} = \begin{pmatrix} G_{n+1}^{(1)} \\ G_{n+1}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{n+1} + c_{n+1}}{2} \\ \dfrac{c_{n+1} - b_{n+1}}{2} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

则

$$\begin{aligned} u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} &= JG_{n+1} = KLG_n \\ &= KL^n \begin{pmatrix} \alpha q \\ -\alpha r \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $K = JL$ 为反对称算子.

设

$$\begin{aligned} V &= 2a\bar{h}(0) + (b + c)e^+(0) \\ &\quad + (b - c)e^-(0), \end{aligned}$$

将

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right\rangle = a, \left\langle V, \frac{\partial U}{\partial q} \right\rangle = \frac{b + c}{2},$$

$$\left\langle V, \frac{\partial U}{\partial r} \right\rangle = \frac{c - b}{2}$$

代入迹恒等式,得

$$\frac{\delta}{\delta u}(a) = \begin{pmatrix} \delta/\delta q \\ \delta/\delta r \end{pmatrix}(a) = \lambda^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial \lambda} \lambda^{\gamma} \begin{pmatrix} \dfrac{b + c}{2} \\ \dfrac{c - b}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

比较(15)式两端 $\lambda^{-n-1}$ 的系数知

$$\frac{\delta}{\delta u}(a_{n+1}) = (\gamma - n) \begin{pmatrix} \dfrac{b_n + c_n}{2} \\ \dfrac{c_n - b_n}{2} \end{pmatrix}.$$

令 $n = 0$ 知 $\gamma = 0$,于是

$$G_{n+1} = \frac{\delta H_n}{\delta u} = L \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} = LG_n,$$

其中 $H_0 = 0, H_n = -\dfrac{a_{n+1}}{n}, n \geqslant 1$.

这样就得到了 S-mKdV 方程族(8)的双 Hamilton 结构

$$u_{t_n} = \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_{t_n} = X_n = J \frac{\delta H_n}{\delta u} = K \frac{\delta H_{n-1}}{\delta u} \tag{16}$$

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

因 $JL = L^* J$,所以 $\{H_n\}$ 是(16)式的公共守恒密度,且 $\{H_n\}$ 中两两对合.

## 3. 一个新的 loop 代数 $\tilde{G}$ 和 S-mKdV 方程族的一类扩展可积模型

构造 loop 代数 $\tilde{A}_2$ 的一个子代数,其基为

$$e_1(n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2(n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n & 0 \\ \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3(n) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \lambda^n & 0 \\ -\lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &[e_1(m), e_2(n)] = e_3(m + n), \\ &[e_1(m), e_3(n)] = e_2(m + n), \\ &[e_2(m), e_3(n)] = -e_1(m + n), \\ &\deg e_i(n) = n \qquad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{17}$$

可见,(17)式基元间的换位关系与(3)式相同,因此利用屠格式同样可导出 S-mKdV 方程族(8)式.

为求方程(8)的扩展可积模型,将(17)式中的基元扩展为

$$e_1(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_5(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[e_1, e_2] = e_3, [e_1, e_3] = e_2,$$

$$[e_2, e_3] = -e_1, [e_1, e_4] = \frac{e_5}{2},$$

$$[e_1, e_5] = \frac{e_4}{2}, [e_2, e_4] = \frac{e_4}{2},$$

$$[e_2, e_5] = -\frac{e_5}{2}, [e_3, e_4] = \frac{e_5}{2},$$

$$[e_3, e_5] = -\frac{e_4}{2}, [e_4, e_5] = 0. \tag{18}$$

设 $G = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,

记 $a = \sum_{i=1}^{5} a_i e_i, b = \sum_{i=1}^{5} b_i e_i, c = \sum_{i=1}^{5} c_i e_i, a_i, b_i, c_i$ 为任意函数或常数,则有

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0, \tag{19}$$

即 Jacobi 恒等式成立,因此 $G$ 是一个 Lie 代数.

以

$$\begin{aligned} &e_i(n) = e_i(0)\lambda^n, \\ &[e_i(m), e_j(n)] = [e_i(0), e_j(0)]\lambda^{m+n}, \\ &\deg e_i(n) = n \end{aligned} \tag{20}$$

为基构成一个新的 loop 代数 $\tilde{G}$.

记 $\tilde{G}_1 = \mathrm{span}\{e_1(n), e_2(n), e_3(n)\}, \tilde{G}_2 = \mathrm{span}\{e_4(n), e_5(n)\}$,则

$\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2 = \tilde{G}, \tilde{G}_1$ 同构于 $\tilde{A}_1$,且 $[\tilde{G}_1, \tilde{G}_2] \subset \tilde{G}_2$ 取线性等谱形式为

$$\begin{aligned} &\psi_x = [U, \psi], \\ &U = e_1(1) + u_1 e_2(0) + u_2 e_3(0) \\ &\quad + u_3 e_4(0) + u_4 e_5(0). \end{aligned} \tag{21}$$

设

$$\begin{aligned} V = \sum_{m=0}^{\infty} &(2a_m e_1(-m) + (b_m + c_m) \\ &\times e_2(-m) + (b_m - c_m) e_3(-m) \\ &+ d_m e_4(-m) + f_m e_5(-m)), \end{aligned}$$

又令

$$\psi_t = [V, \psi], \tag{22}$$

则(21)和(22)式的相容性条件为

$$\begin{aligned} \psi_{xt} &= [U_t, \psi] + [U, \psi_t] \\ &= [U_t, \psi] + [U, [V, \psi]] \\ &= \psi_{tx} = [V_x, \psi] + [V, \psi_x] \\ &= [V_x, \psi] + [V, [U, \psi]], \end{aligned}$$

$$[U_t, \psi] + [U, [V, \psi]] - [V_x, \psi] - [V, [U, \psi]] = 0, \tag{23}$$

利用 Jacobi 恒等式(19)式及 $\psi$ 的任意性得到零曲率方程

$$U_t - V_x + [U, V] = 0. \tag{24}$$

解静态零曲率方程

$$V_x = [U, V], \tag{25}$$

得递推关系

$$\begin{aligned} 2a_{mx} &= (u_1 + u_2)c_m + (u_2 - u_1)b_m, \\ b_{mx} &= b_{m+1} - (u_1 + u_2)a_m, \\ c_{mx} &= -c_{m+1} + (u_1 - u_2)a_m, \\ 2d_{mx} &= f_{m+1} + u_1 d_m - u_2 f_m - u_3(b_m + c_m) \\ &\quad - 2u_4 a_m + u_4(b_m - c_m), \\ 2f_{mx} &= d_{m+1} - u_1 f_m + u_2 d_m - 2u_3 a_m \\ &\quad - u_3(b_m - c_m) + u_4(b_m + c_m), \\ b_0 &= c_0 = d_0 = f_0 = 0, a_0 = \alpha, \\ a_1 &= 0, b_1 = \alpha(u_1 + u_2), c_1 = \alpha(u_1 - u_2), \\ d_1 &= 2\alpha u_3, f_1 = 2\alpha u_4, a_2 = \frac{\alpha}{2}(u_2^2 - u_1^2), \\ b_2 &= \alpha(u_{1x} + u_{2x}), c_2 = \alpha(u_{2x} - u_{1x}), \\ d_2 &= 4\alpha u_{4x}, f_2 = 4\alpha u_{3x}, \\ f_3 &= 8\alpha u_{4xx} - 4\alpha u_1 u_{4x} + 4\alpha u_2 u_{3x} + 2\alpha u_3 u_{2x} \\ &\quad + \alpha u_4(u_2^2 - u_1^2) - 2\alpha u_4 u_{1x}, \\ d_3 &= 8\alpha u_{3xx} + 4\alpha u_1 u_{3x} - 4\alpha u_2 u_{4x} \\ &\quad + \alpha u_3(u_2^2 - u_1^2) + 2\alpha u_3 u_{1x} - 2\alpha u_3 u_{2x}, \cdots \end{aligned} \tag{26}$$

记

$$\begin{aligned} V_+^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} &(2a_m e_1(n-m) \\ &+ (b_m + c_m) e_2(n-m) + (b_m - c_m) \\ &\times e_3(n-m) + d_m e_4(n-m) \\ &+ f_m e_5(n-m)), \end{aligned}$$

$$V_-^{(n)} = \lambda^n V - V_+^{(n)},$$

则

$$-V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = V_{-x}^{(n)} - [U, V_-^{(n)}]. \tag{27}$$

(27)式左端所含基元阶数(deg) $\geqslant 0$,右端阶数 $\leqslant 0$,记 $V^{(n)} = V_+^{(n)}$,则(27)式右端可写为

$$\begin{aligned} -V_{+x}^{(n)} + [U, V_+^{(n)}] = -[&(b_{n+1} + c_{n+1}) e_3(0) \\ &+ (b_{n+1} - c_{n+1}) e_2(0) \\ &+ \frac{d_{n+1}}{2} e_5(0) + \frac{f_{n+1}}{2} e_4(0)], \end{aligned}$$

因为 $U, V$ 满足(24)式,所以 $U, V^{(n)}$ 也满足(24)式,即

$$U_t - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0. \tag{28}$$

于是得到系统

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=\begin{pmatrix}b_{n+1}-c_{n+1}\\b_{n+1}+c_{n+1}\\\frac{f_{n+1}}{2}\\\frac{d_{n+1}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b_{n+1}+c_{n+1}}{2}\\\frac{c_{n+1}-b_{n+1}}{2}\\\frac{f_{n+1}}{2}\\\frac{d_{n+1}}{2}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}\frac{b_{n+1}+c_{n+1}}{2}\\\frac{c_{n+1}-b_{n+1}}{2}\\\frac{f_{n+1}}{2}\\\frac{d_{n+1}}{2}\end{pmatrix},\tag{29}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\2&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

为 Hamilton 算子.

由(26)式易见

$$\begin{pmatrix}\frac{b_{n+1}+c_{n+1}}{2}\\\frac{c_{n+1}-b_{n+1}}{2}\\\frac{f_{n+1}}{2}\\\frac{d_{n+1}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial+u_2\partial^{-1}u_2&u_2\partial^{-1}u_1&0&0\\u_1\partial^{-1}u_2&-\partial+u_1\partial^{-1}u_1&0&0\\u_3+u_4\partial^{-1}u_2&u_4+u_4\partial^{-1}u_1&u_2&2\partial-u_1\\u_3\partial^{-1}u_2-u_4&u_3\partial^{-1}u_1-u_3&2\partial+u_1&-u_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{b_n+c_n}{2}\\\frac{c_n-b_n}{2}\\\frac{f_n}{2}\\\frac{d_n}{2}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}\frac{b_n+c_n}{2}\\\frac{c_n-b_n}{2}\\\frac{f_n}{2}\\\frac{d_n}{2}\end{pmatrix},$$

所以(29)式又可写为

$$u_t=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}_t=JL^n\begin{pmatrix}\alpha u_1\\-\alpha u_2\\\alpha u_4\\\alpha u_3\end{pmatrix}.\tag{30}$$

当 $u_3=u_4=0$ 时,(30)式约化为 S-mKdV 方程族(8)式.又因为(30)式是由零曲率方程(28)导出的,所以可积.比较(30)式中的 $J$ 和 $L$ 与(8)式中的 $J$ 和 $L$ 的构造,根据可积耦合的定义[2-6]知,(30)式即为 S-mKdV 方程族(8)的可积耦合系统,即为(8)式的一类扩展可积模型.

取 $n=2$,则(30)式可约化为

$$\begin{aligned}u_{1t_2}&=2\alpha u_{2xx}-\alpha u_2(u_2^2-u_1^2),\\u_{2t_2}&=2\alpha u_{1xx}-\alpha u_1(u_2^2-u_1^2),\\u_{3t_2}&=4\alpha u_{4xx}-2\alpha u_1u_{4x}+2\alpha u_2u_{3x}\\&\quad+\alpha u_3u_{2x}-\alpha u_4u_{1x}+\frac{\alpha}{2}u_4(u_2^2-u_1^2),\\u_{4t_2}&=4\alpha u_{3xx}+2\alpha u_1u_{3x}-2\alpha u_2u_{4x}\\&\quad+\alpha u_3u_{1x}-\alpha u_3u_{2x}+\frac{\alpha}{2}u_3(u_2^2-u_1^2).\end{aligned}\tag{31}$$

在(31)式中,取 $\alpha=\mathrm{i}$,设 $Q=u_1+u_2=u_2+\mathrm{i}\bar{u}_1$,其中 $\bar{u}_1=u_1/\mathrm{i}$ 为实数,$u_2$ 也为实数,则(31)式约化为非线性 Schrödinger 方程(10)的可积耦合,即扩展可积模型

$$\begin{aligned}&Q_t+2Q_{xx}-Q\mid Q\mid^2=0,\\u_{3t}&=4\mathrm{i}u_{4xx}-2\mathrm{i}u_1u_{4x}+2\mathrm{i}u_2u_{3x}\\&\quad+\mathrm{i}u_3u_{2x}-\mathrm{i}u_4u_{1x}+\frac{\mathrm{i}}{2}u_4(u_2^2-u_1^2),\\u_{4t}&=4\mathrm{i}u_{3xx}+2\mathrm{i}u_1u_{3x}-2\mathrm{i}u_2u_{4x}\\&\quad+\mathrm{i}u_3u_{1x}-\mathrm{i}u_3u_{2x}+\frac{\mathrm{i}}{2}u_3(u_2^2-u_1^2).\end{aligned}$$

取 $n=3$,则(30)式约化为

$$\begin{aligned}u_{1t_3}&=2\alpha u_{1xxx}+\alpha u_{1x}(u_2^2-u_1^2)+2\alpha u_1\\&\quad\times(u_2u_{2x}-u_1u_{1x})-2\alpha u_2^2u_{1x}+2\alpha u_1u_2u_{2x},\\u_{2t_3}&=2\alpha u_{2xxx}+\alpha u_{2x}(u_2^2-u_1^2)+2\alpha u_2\\&\quad\times(u_2u_{2x}-u_1u_{1x})-2\alpha u_1u_2u_{1x}+2\alpha u_1^2u_{2x},\\u_{3t_3}&=8\alpha u_{3xxx}+6\alpha u_{1x}u_{3x}-4\alpha u_{2x}u_{4x}\\&\quad-2\alpha u_{2x}u_{3x}-2\alpha u_3u_{2xx}-\alpha u_1^2u_{3x}\\&\quad-3\alpha u_1u_3u_{1x}+\alpha u_1u_3u_{2x}+3\alpha u_2^2u_{3x}\\&\quad+3\alpha u_2u_3u_{2x}+3\alpha u_3u_{1xx}-\alpha u_1u_4u_{2x}\\&\quad-\alpha u_4u_{2xx},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{4t_3} &= 8\alpha u_{4xxx} - 6\alpha u_{1x}u_{4x} + 6\alpha u_{2x}u_{3x} \\ &+ 2\alpha u_3 u_{2xx} + \alpha u_2^2 u_{4x} - 3\alpha u_1^2 u_{4x} \\ &+ 2\alpha u_2 u_4 u_{2x} - 2\alpha u_1 u_4 u_{1x} - 3\alpha u_4 u_{1xx} \\ &- \alpha u_1 u_4 u_{1x} + 2\alpha u_2^2 u_{4x} + \alpha u_2 u_3 u_{2x} \\ &+ \alpha u_3 u_{2xx} .\end{aligned} \tag{32}$$

在(32)式中,取 $u_1 = \mathrm{i}u_2$, $u_2 = u$,则(32)式约化为著名的 mKdV 方程的一类扩展可积模型

$$\begin{aligned}u_t &= 2\alpha u_{xxx} + 10\alpha u^2 u_x , \\ u_{3t} &= 8\alpha u_{3xxx} + 6\alpha \mathrm{i} u_x u_{3x} - 4\alpha u_x u_{4x} \\ &- 2\alpha u_x u_{3x} - 2\alpha u_3 u_{xx} + 4\alpha u^2 u_{3x} \\ &+ 6\alpha u_3 u u_x + \alpha \mathrm{i} u u_3 u_x + 3\alpha \mathrm{i} u_{xx} u_3 \\ &- \alpha \mathrm{i} u u_x u_4 - \alpha u_4 u_{xx} , \\ u_{4t} &= 8\alpha u_{4xxx} - 6\alpha \mathrm{i} u_x u_{4x} + 6\alpha u_x u_{3x} \\ &+ 3\alpha u_3 u_{xx} + 6\alpha u^2 u_{4x} + 5\alpha u u_x u_4 \\ &- 3\alpha \mathrm{i} u_{xx} u_4 + \alpha u u_3 u_x .\end{aligned} \tag{33}$$

可见,本文中得到的 mKdV 方程的扩展可积模型与文献[12]中的不同,这说明,用不同方法可以得到同一方程的不同扩展可积模型.

第一作者张玉峰对胡星标教授、郭福奎教授的热情指导和帮助深表感谢.

[1] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49**, 1657 (in Chinese) [楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]

[2] Li J, Wang Kelin 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 13 (in Chinese) [林机、汪克林 2001 物理学报 **50** 13]

[3] Lou S Y, Xu J J, 1999 *Chin. Phys.* **8** 280

[4] Ruan H Y, Chen Y X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 577 (in Chinese) [阮航宇、陈一新 2001 物理学报 **50** 577]

[5] Chen Lili and Lou Senyue 1999 *Chin. Phys.* **8** 285

[6] Lou Senyue 2001 *Chin. Phys.* **10** 897

[7] Ruan Hongyu 2001 *Chin. Phys.* **10** 87

[8] Zhang Y F and Zhang H Q 2002 *J. Math. Phys.* **43** 1

[9] Zhang Y F and Zhang H Q 2002 *Applied Math.* (*JUP*) **21** 313 (in Chinese) [张玉峰、张鸿庆 2002 高校应用数学学报 **21** 313]

[10] Zhang Y F, Zhao X Q and Yan Q Y 2001 *J. Gansu Univer of Technology* **27** 95 (in Chinese) [张玉峰、赵熙强、闫庆友 2001 甘肃工业大学学报 **27** 95]

[11] Zhang Y F and Zhang H Q 2002 *J. Math. Research & Expo.* **22** (2) 289 (in Chinese) [张玉峰、张鸿庆 2002 数学研究与评论 **22** (2) 289]

[12] Guo F K and Zhang Y F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 951 (in Chinese) [郭福奎、张玉峰 2002 物理学报 **51** 951]

[13] Guo F K 1997 *Acta Math. Sin.* **40** 801 (in Chinese) [郭福奎 1997 数学学报 **40** 801]

[14] Zhang T G 1989 *J. Math. Phys.* **30** 330

# A family of S-mKdV hierarchy of equations and its expanding integrable models*

Zhang Yu-Feng[1)2)]　Yan Qing-You[3)]　Zhang Hong-Qing[4)]

[1)] (*Information School, Shandong University of Science and Technology, Taian* 271019, *China*)

[2)] (*Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)

[3)] (*School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

[4)] (*Center of Advanced Design Technology, Dalian University, Dalian* 116622, *China*)

(Received 24 April 2002; revised manuscript received 2 June 2002)

Abstract

Starting from a subalgebra of loop algebra $\tilde{A}_1$ we construct a linear isospectral problem. A type of Liouville integrable system and its bi-Hamiltonian structure are presented by the use of Tu-model again. The reductions to the integrable system give rise to the well-known Schrödinger equation and mKdV equation. Therefore, the system is called S-mKdV hierarchy. In terms of the subalgebra of $\tilde{A}_1$ constructed, we also construct a new subalgebra $\tilde{G}$ of loop algebra $\tilde{A}_2$ with five dimensions, from which a linear isospectral form is designed. Again, using Tu-model one obtains a type of expanding integrable models of the S-mKdV hierarchy. Some expanding integrable models of hierarchies, such as BPT hierarchy, TB hierarchy etc. are also obtained by using this method. Hence, the method proposed in this paper has important applications generally. Finally as special cases, the integrable couplings of the well-known Schrödinger equation and mKdV equation are obtained.

**Keywords**: loop algebra, Hamiltonian structure, expanding integrable model, Schrödinger equation, mKdV equation

**PACC**: 0340K, 0220, 0365G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 1007213).