

延迟变量反馈法控制离散混沌系统的电路实验^{*}

陈菊芳¹⁾ 程 丽¹⁾ 刘 颖¹⁾ 彭建华¹⁾²⁾

¹⁾ (东北师范大学物理系, 长春 130024)

²⁾ (深圳大学理学院, 深圳 518060)

(2002 年 2 月 2 日收到, 2002 年 5 月 1 日收到修改稿)

利用电子线路实验实现了一个具有混沌和超混沌特性的二维离散系统以及延迟变量反馈和它的增强型的方法用于混沌和超混沌的控制. 实验结果, 包括控制前实验电路出现的各种复杂行为和控制后从实验中观测到的许多被稳定住的周期状态, 与理论分析和数值计算的结果几乎完全一致. 也证实了增强型延迟变量反馈法控制混沌和超混沌的有效性.

关键词: 离散系统, 电路实验, 延迟反馈法, 控制混沌和超混沌

PACC: 0545

1. 引 言

近年来, 有关控制混沌的方法和理论以及实验工作已有大量报道^[1-3]. 但在许多与实验研究的相关报道中, 几乎都是以连续系统作为研究控制混沌的对象^[4-8], 极少有对离散系统混沌的控制的实验报道. 实际上, 一方面在许多学科领域中描述系统演化(时间或时、空)特性的动力学模型是离散化的, 如著名的虫口模型^[9]等; 另一方面人们常常将一些复杂的连续系统简化成形式简单的离散系统以便更容易、更方便地去研究系统的复杂性行为, 如最典型的例子就是时空耦合映象格子的各种模型^[10, 11]. 对于这样一类离散系统, 除了一些低维系统已有许多解析工作外, 高维离散系统(包括时空系统)只有在一些特殊的条件下, 人们才有可能用解析方法做十分有限制的解析工作, 绝大多数情况下是用计算机通过数值计算的方法进行分析, 其他的实验方法很少, 更不要说用实验方法研究离散系统的混沌控制问题.

实现离散系统的一种比较简单的装置是电子电路, 文献^[12]曾提出用开关电容电路实现离散映象混沌系统. 基于这一设计思想, 我们采用先构造连续系统的电路, 然后利用采样保持电路对连续信号进

行离散化的方法, 实际设计并建立了一个具有混沌和超混沌特性的二维离散系统的电路. 进一步将延迟变量反馈控制法^[13-15]用到这个实验系统, 实现了对混沌和超混沌的控制. 实验结果与理论分析以及数值模拟的结果是完全一致的.

2. 离散映象的电路系统

本文以非线性二维离散映象系统作为研究对象, 这是因为在非线性离散系统中能够产生超混沌的系统至少应是二维的. 在二维离散映象系统中, 较简单的非线性映象函数是二次多项式的形式, 即

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a_0 + a_1 x_n + a_2 y_n + a_3 x_n y_n + a_4 x_n^2 + a_5 y_n^2, \\y_{n+1} &= b_0 + b_1 x_n + b_2 y_n + b_3 x_n y_n + b_4 x_n^2 + b_5 y_n^2.\end{aligned}\quad (1)$$

我们通过数值计算映象(1)的 Lyapunov 指数作为检验的手段, 随机生成系数 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 从中筛选出不仅具有混沌特性而且还具有超混沌特性的一批二维离散系统. 原则上, 上述生成的每一个离散系统都对应着具体的电子电路实验系统.

如果保留(1)式中的非线性项只有一项, 那么它应该具有最简单的非线性形式且为光滑函数的二维映象系统之一, 与这个系统相对应的电路实验装置

^{*} 教育部高等学校骨干教师资助计划项目(批准号[2000]65), 教育部科学技术研究重点项目(批准号[2000]0042)资助的课题.

[†] 通信作者.

一般也具有十分简单的结构。

文献 16 提出一个二维映象

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -cx_n + ay_n, \\ y_{n+1} &= x_n^2 - b. \end{aligned} \quad (2)$$

它相当系统(1)的一个特例,即 $a_0 = a_3 = a_4 = a_5 = b_5 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, $a_1 = -c = -0.1$, $a_2 = a$, $b_4 = 1$, $b_0 = -b = -1.6$ 。

以 a 作为可调节参量,数值计算映象(2)的 Lyapunov 指数,其结果表明^[7]:当 $0.91 < a \leq 0.96$ 时,它有一个 Lyapunov 指数大于零,即为混沌的;当 $0.96 < a < 1.05$ 时,它有两个 Lyapunov 指数大于零,即为超混沌的。

由于系统(2)的变量变化范围比较小,不利于实验中的观测,故采用如下标量变换:

$$x_n = \epsilon_1 u_n, \quad y_n = \epsilon_2 v_n. \quad (3)$$

本文取 $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon = 1/4$,以增加输出信号的幅度。

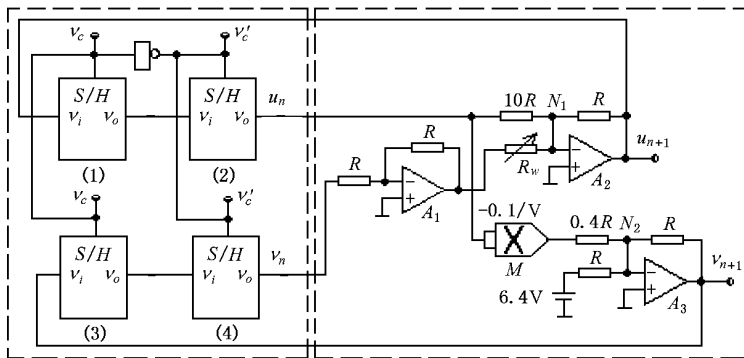
经过标量变换之后,系统(2)改写成

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -cu_n + av_n, \\ v_{n+1} &= \epsilon u_n^2 - b/\epsilon. \end{aligned} \quad (4)$$

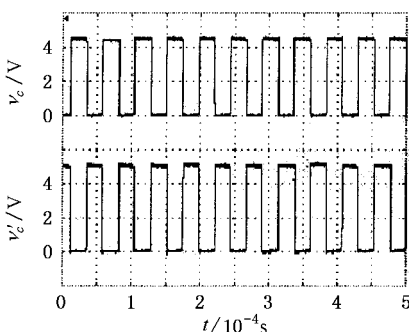
图 1(a)给出对应于系统(4)的实现电路。整个电路由模拟电路(右边虚线框内)和离散化连续信号的电路(左边虚线框内)这两部分构成。

模拟电路主要由图 1(a)中的三个运算放大器 A_1, A_2, A_3 (LF353) 和一个乘法器 M (AD534) 的单元电路构成,由它们构造出系统(4)的右端函数形式。离散化连续信号的电路由两对采样保持器 S/H(1)-S/H(2) 和 S/H(3)-S/H(4) (LF398) 组成。它们的工作状态分别由电压 v_c 和 v'_c (见图 1(b)) 控制,而使得 S/H(1) 与 S/H(3) 以及 S/H(2) 与 S/H(4) 两两间的采样、保持状态恰好相反,这样不仅实现了连续信号的离散化,而且又将离散信号做了时间延迟,从而最终实现按系统(4)描述的迭代过程。

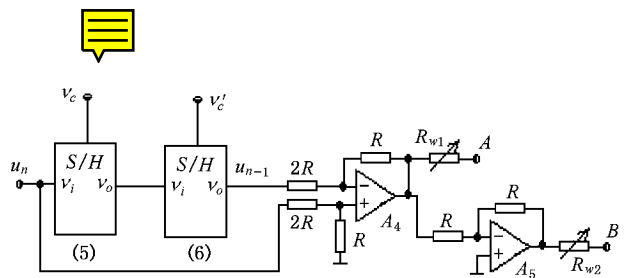
电路中的 $R = 10\text{k}\Omega$, 电位器 R_w 在 $(0-20)\text{k}\Omega$ 之间连续可调,它与系统(4)中的参量 a 的关系是 $a = R/R_w$ 。实验中用数字示波器(型号 DS-8812)观测图 1 电路中的电压波形或在 (u_n, v_n) 平面上的图形(如图 2(a))(b))。



(a) 二维离散系统的实现电路



(b) v_c, v'_c 的脉冲波形



(c) 延迟变量反馈控制的实现电路

图 1 离散系统及其控制的实现电路

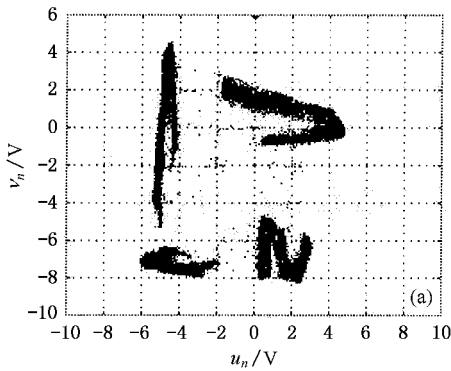
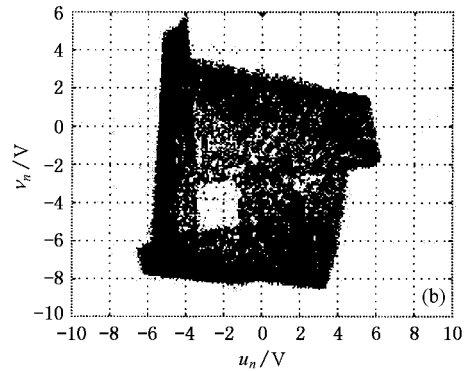
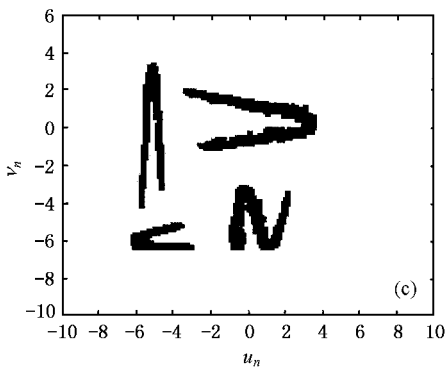
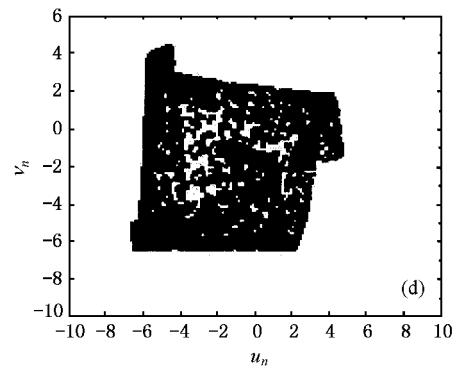
(a) $a = 0.95$ (b) $a = 0.99$ (c) $a = 0.95$ (d) $a = 0.99$ 

图2 混沌和超混沌吸引子 (a)和(b)为实验测量到的结果 (c)和(d)为数值计算的结果 (a)和(c)为混沌吸引子 (b)和(d)为超混沌吸引子

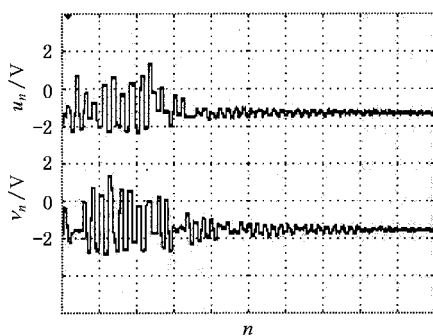


图3 被稳定到不动点的实验结果

实验观测结果表明,随着 R_w 值由大至小变化,即相当于 a 值由小变向大,电路的状态表现出不动点(一个点)、准周期(一个闭合环)、倍周期分岔、混沌和超混沌等特征.这些实验结果均与文献[17]报道的数值模拟结果几乎完全一样,包括参量 a 的位置、范围及状态变量图形的几何形状等都有良好的一致性.这样我们也可以将实验观测到的图形与数

值计算得到的图形进行对比,以此来区别实验图形所反映的属于超混沌或混沌中的哪一种状态.图2(a)和(b)分别给出当 $R_w = 10.52\text{k}\Omega$ 和 $10.1\text{k}\Omega$ 时,实验观测的结果.与这两个电阻值相对应的模型参量 $a = 0.95$ 和 0.99 ,数值计算结果如图2(c)和(d)所示.将这两组图形分别对比,它们几乎完全一样.从而可确定,图2(a)反映的是混沌态;图2(b)代表着超混沌态.

3. 混沌与超混沌的控制

本文是用延迟变量反馈法控制实验系统的混沌和超混沌.延迟变量反馈法使用的反馈控制信号是由系统的某些输出信号与其延时信号的差构成.如只考虑用单一输出信号 u_n 来构造反馈控制信号,可取如下形式

$$e(n) = K(u_{n-1} - u_n), \quad (5)$$

其中 $e(n) = (e_1(n), e_2(n))^T$, $K = (k_1, k_2)^T$ 为反馈

增益系数,这是一种增强型的延迟反馈控制形式^[18]取 $k_2 = 0$ 时(5)式退化成通常的延迟反馈控制形式^[13].加控制后的系统(4)为

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -cu_n + av_n + k_1(u_{n-1} - u_n), \\ v_{n+1} &= \varepsilon u_n^2 - b/\varepsilon + k_2(u_{n-1} - u_n). \end{aligned} \quad (6)$$

实际上,若引入新变量 $w_n = u_{n-1}$,则施加控制后的系统(6)转变为一个三维离散系统

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -cu_n + av_n + k_1(w_n - u_n), \\ v_{n+1} &= \varepsilon u_n^2 - b/\varepsilon + k_2(w_n - u_n), \\ w_{n+1} &= u_n. \end{aligned} \quad (7)$$

我们要研究系统(4)的混沌控制问题就归结为:当增益系数取何值时,系统(7)存在稳定的周期解.

构成控制项的相应电路如图1(c)所示:其中采样保持器 S/H(5),S/H(6)也分别受电压 v_c 和 v'_c 的控制,而使得 S/H(5)的输入电压为 u_n ,S/H(6)的输出电压为 u_{n-1} ,经运放 A_4 后,输出电压与 $u_{n-1} - u_n$ 成正比;反馈系数 k_1 和 k_2 分别为 $k_1 = R/2R_{w1}$ 和 $k_2 = -R/2R_{w2}$.

下面先讨论在控制参量取 $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ 的情形下,系统(7)处于稳定不动点状态的 k_1 取值范围.令 u_f, v_f, w_f 是系统(7)的不动点,它们满足方程

$$\begin{aligned} u_f &= -cu_f + av_f + k_1(w_f - u_f), \\ v_f &= \varepsilon u_f^2 - b/\varepsilon, \\ w_f &= u_f, \end{aligned} \quad (8)$$

解之得

$$\begin{aligned} u_{f\pm} &= \frac{(c+1) \pm \sqrt{(c+1)^2 + 4a^2b}}{2a\varepsilon}, \\ v_{f\pm} &= (1+c)u_{f\pm}^2/a, w_{f\pm} = u_{f\pm}. \end{aligned}$$

系统(7)在 $(u_{f\pm}, v_{f\pm}, w_{f\pm})$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -c - k_1 & a & k_1 \\ 2\varepsilon u_{f\pm} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

相应的特征方程

$$s^3 + (c + k_1)s^2 - (2\varepsilon a u_{f\pm} + k_1)s = 0, \quad (10)$$

或

$$s = 0, \quad s^2 + b_1s + b_2 = 0. \quad (11)$$

这里 $b_1 = c + k_1$, $b_2 = -(2\varepsilon a u_{f\pm} + k_1)$.

令 $k_1 > 0$,系统的稳定性要求:特征方程(10)的两个特征根的模全小于 1,则应有不等式

$$b_1 - 1 < b_2 < 1 \quad (12)$$

成立.进一步讨论可知,只有 (u_{f-}, v_{f-}, w_{f-}) 满足(12)式,即

$$\begin{aligned} \sqrt{(c+1)^2 + 4a^2b} - c - 2 &< k_1 \\ &< (\sqrt{(c+1)^2 + 4a^2b} - 2c)/2. \end{aligned} \quad (13)$$

文中已给定 a, b, c 的各个值,由不等式(13)可给出系统(7)存在稳定不动点的条件:

当 $a = 0.95$ 时 $0.543 < k_1 < 1.221$;

当 $a = 0.99$ 时 $0.635 < k_1 < 1.268$.

从后面用数值方法计算系统(7)并绘制的分岔图中(见图4和图6)已经很清楚地反映出这一结果.

图3是被控制到不动点的实验结果,其中取 $R_w = 10.5\text{k}\Omega$ 相当于 $a = 0.95$; $R_{w1} = 8\text{k}\Omega$ 换算成 k_1 值为 0.625,将图1(c)电路中的 B 点与图1(a)电路中的 N_2 点断开,即 $k_2 = 0$.显然,电路实验以及数值计算的结果与理论分析的结果是一致的.

为了能够全面掌握随反馈增益系数 k_1 的变化系统(7)可能出现的其他周期状态,我们绘制出这个系统的 $u_n - k_1$ 分岔图,以及 Lyapunov 指数谱,见图4,其中选择 $k_1 \neq 0, k_2 = 0, a = 0.95$.数值计算中,每取一个值都要去掉控制到达稳定的暂态过程.由图4(a)和(b)可见:系统被控制到不动点的临界位置及范围与理论分析的结果一致.除不动点之外,系统还可被控制到比较高的周期态上,如 7 周期(7P,这里 P 表示周期);最大 Lyapunov 指数谱中小于零的区间对应着周期状态,而等于零的区间对应着准周期状态.将图4(a)中 $k_1 = 0.18 - 0.34$ 之间的图形进一步放大,还可以明显观察到 11P, 18P 等高周期状态,见图4(c).有一些被控制住的高周期态,由于其周期高直接观察难以与准周期区别,我们可以从图4(d)的最大 Lyapunov 指数谱中出现一些负值峰(箭头所指处)来确定它.同时,这些负值峰对应的位置及其邻域,也是实验达到控制目标所选择的控制参数的取值范围.

从实际电路上,将 B 点与 N_2 点断开,即 $k_2 = 0$,调节 $R_{w1} = 17.2\text{k}\Omega, 21.7\text{k}\Omega$ 和 $23.8\text{k}\Omega$,相当 $k_1 = 0.29, 0.23$ 和 0.21 ,我们也观测到 7P, 18P, 11P 等,图5(a)只给出控制到 18 周期的结果.为了准确无误地确定被控制的周期态,我们还使用分频采样法^[19]对高周期状态做细致地分辨.在与图5(a)参量相同的条件下,按 1/2 分频采样得到图5(b)出现 9 个点

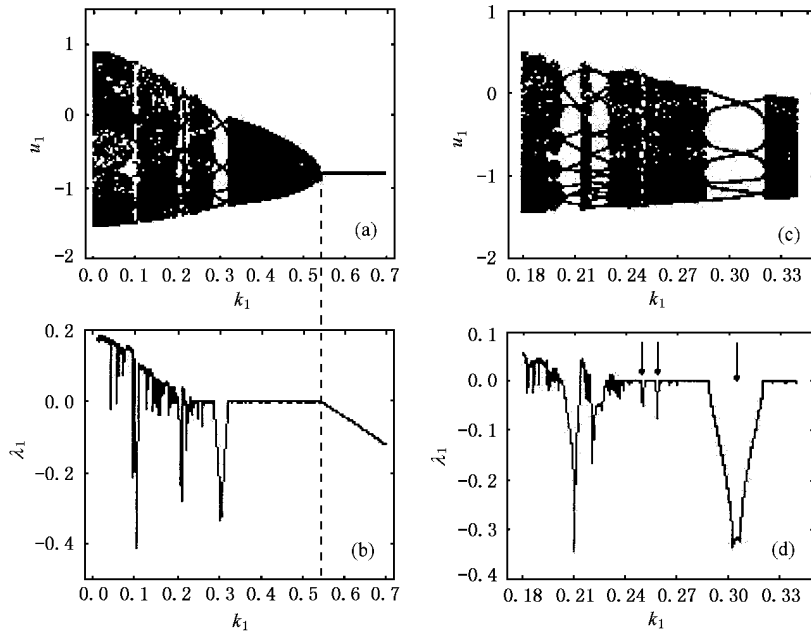
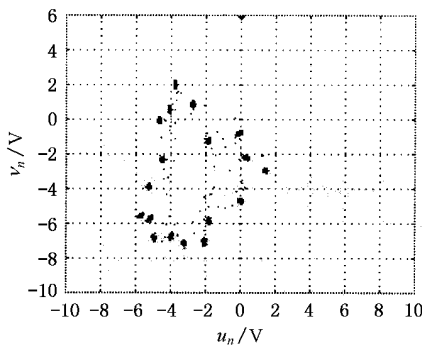
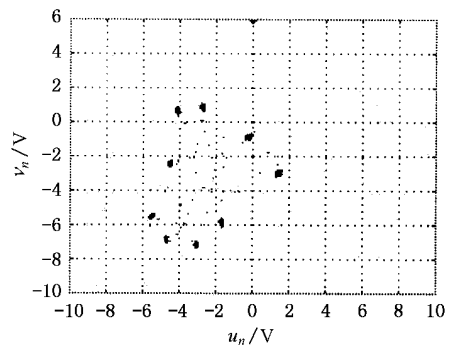


图 4 数值计算控制的结果 ($a = 0.95, k_2 = 0$) (a) u_n-k_1 的分岔图 (b) 最大 Lyapunov 指数谱 (c) $k_1 = 0.18-0.34$ 间放大的 u_n-k_1 的分岔图 (d) 最大 Lyapunov 指数谱



(a) 按基本周期采样



(b) 将(a)按 1/2 分频采样

图 5 $k_1 = 0.23$ 电路被控制到 18 周期的实验结果

的结果,这就足以证实图 5(a)所对应的状态一定是 18 周期。

调节 R_w 到 $10.1k\Omega$, 相当 $a = 0.99$, 此时系统 (4) 是超混沌的. 施加控制后, 若仍取 $k_2 = 0, k_1 \neq 0$, 数值计算的结果如图 6 所示, 其中图 6(b) 的 Lyapunov 指数谱只给出前两个指数. 由图 6 可见: 系统被控制到不动点的临界位置及范围与理论分析的结果也是一致的; 大约在 $k_1 = 0.24-0.45$ 区间内, 最大 Lyapunov 指数 (λ_1) 的谱线上多处出现负值峰, 显然除了不动点外系统还被控制到其他周期状态, 如 7P, 10P 等; $\lambda_1(k_1) = 0$ 的区域对应着系统被控制到准周期的情况, 在 $0 < k_1 < 0.24$ 范围内, 至少还有一

个指数大于零, 系统未被控制住. 若采用增强型延迟反馈方式, 即 k_1, k_2 均不为零, 如固定 $k_1 = 0.10$ 而使 k_2 变化, 计算结果表明: 系统可以被控制到其他的一些周期上, 见图 7(c).

在超混沌的状态下, 调节 $R_{w1} = 16.7k\Omega$, 也即 $k_1 = 0.30$, 仍使 $k_2 = 0$, 此时可观测到系统被控制到 7P, 如图 7(a) 所示. 再调节 R_{w1} 的值, 使 $k_1 = 0.10$, 实验观测到的图形 (见图 7(b)) 与图 7(a) 十分相象, 这表明系统仍处于混沌态.

采用增强型的延迟反馈控制形式 (连接 B 和 N_2 点), 固定 $k_1 = 0.1$, 调节 R_{w2} 使其分别为 $33.3k\Omega$,



25.0kΩ 相当 k_2 分别等于 $-0.15, -0.20$, 则系统最终被分别控制到 $8P AP$, 图 8 只给出控制到 $8P$ 的实验结果. 如果更细致地调节 R_{w2} , 我们还可以观测到被控制住的其他一些周期.

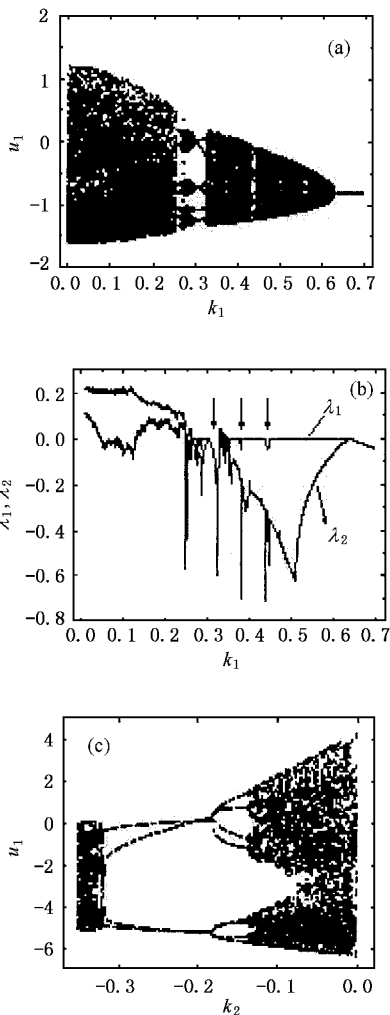
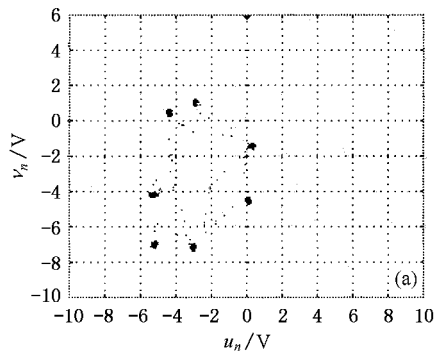


图 6 $a = 0.99$ 时, 数值计算的控制结果 (a) $k_2 = 0, k_1 \neq 0$ 时, $u_n - k_1$ 的分岔图 (b) $k_2 = 0, k_1 \neq 0$ 时, Lyapunov 指数谱 (c) $k_1 = 0.1$ 时, $u_n - k_2$ 的分岔图

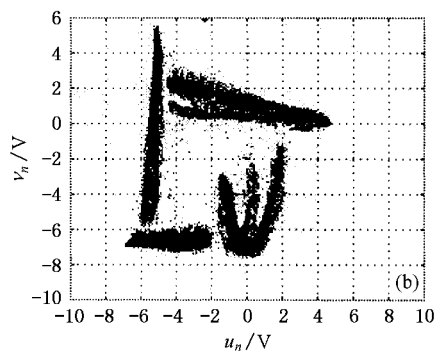
图 8 的实验结果也表明, 采用增强型延迟反馈控制方式, 在不增加使用输出变量的情况下(本文只用了一个输出变量), 确实可以改善控制超混沌的效果, 以及扩大控制混沌和超混沌的有效范围.

4. 结 论

本文设计并建立了一个二维离散映象的电路实验系统, 并将延迟变量反馈控制法用于该电路系统中, 实验结果与理论分析以及数值计算的结果符合很好. 实验结果也说明, 我们提出的增强型延迟反馈



(a) 周期



(b) 混沌



图 7 $R_w = 10.1k\Omega$ (相当 $a = 0.99$) 从实验电路观测到的控制结果 (a) $k_1 = 0.30$ (b) $k_1 = 0.10$

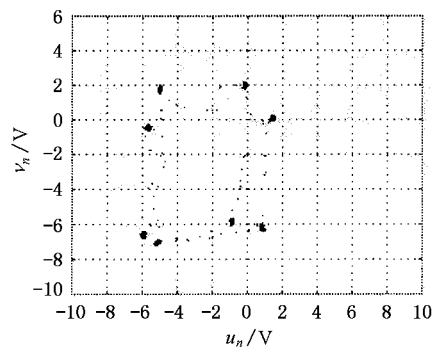


图 8 增强型延迟反馈控制的实验结果 8 周期

控制法, 在实际应用中是有效的, 它既有效地利用了输出信号的资源, 又不额外添加复杂的实验装置, 而明显地改善控制混沌的效果和质量. 本文使用的设计和控制离散系统的实验电路的方法不仅适用于二维系统, 还可以被推广到三维或更高维的时间离散的系统及至时、空离散的耦合映象格子系统.

- [1] Ott E ,Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Shinbrot T ,Grebogi C ,Ott E and Yorke J A 1993 *Nature* **363** 411
- [3] Fang J Q 1996 *Progress in Physics* **16** 1(in Chinese) 方锦清 1996 *物理学进展* **16** 1]
- [4] Ditto W L ,Rauseo S N and Spano M L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 3211
- [5] Roy R ,Murphy T W ,Gills T D and Hunt E R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 1259
- [6] Hunt E R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 67
- [7] Yue L J ,Chen Y Y and Peng J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097(in Chinese) 岳丽娟、陈艳艳、彭建华 2001 *物理学报* **50** 2097]
- [8] Wang R and Shen K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1024(in Chinese) 王荣、沈柯 2001 *物理学报* **50** 1024]
- [9] May M 1976 *Nature* **261** 459
- [10] Kaneko K 1984 *Prog. Theor. Phys.* **72** 480
- [11] Yang W M 1994 *Spatiotemporal Chaos and Coupled Map Lattices* (Shang Hai :Shanghai Scientific Technological Education Publishing House) 杨维明 1994 *时空混沌和耦合映象格子* (上海 :上海科技教育出版社)
- [12] Rodriguez-Vazquez A ,Huertas J L ,Rueda A ,Perez-Verdu B and Chua L O 1987 *Proc. IEEE.* **75** 1090
- [13] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [14] Chen Y Y ,Peng J H ,Shen Q H and Wei J J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1871(in Chinese) 陈艳艳、彭建华、沈启宏、魏俊杰 2001 *物理学报* **50** 1871]
- [15] Luo X S ,Fang J Q ,Kong L J and Weng J Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1423(in Chinese) 罗晓曙、方锦清、孔令江、翁甲强 2000 *物理学报* **49** 1423]
- [16] Kawakami H and Kobayashi K 1979 *Bull. Fac. Eng. Tokushima Univ.* **16** 29
- [17] He D H ,Xu J X and Chen Y H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1611(in Chinese) 何岱海、徐健学、陈永红 1999 *物理学报* **48** 1611]
- [18] Chen Y Y ,Peng J H ,Liu B Z and Wei J J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1489(in Chinese) 陈艳艳、彭建华、刘秉正、魏俊杰 2002 *物理学报* **51** 1489]
- [19] Hao B L and Zhang S Y 1982 *Phys. Lett A* **87** 267
Hao B L and Zhang S Y 1983 *Acta Phys. Sin.* **32** 198(in Chinese)
[郝柏林、张淑誉 1983 *物理学报* **32** 198]

A circuit experiment for controlling a discrete chaotic system with time-delayed variable feedback^{*}

Chen Ju-Fang¹⁾ Cheng Li¹⁾ Liu Ying¹⁾ Peng Jian-Hua^{1,2)†}

¹⁾(Department of Physics ,Northeast Normal University ,Changchun 130024 ,China)

²⁾(School of Science ,Shenzhen University ,Shenzhen 518060 ,China)

(Received 2 February 2002 ; revised manuscript received 1 May 2002)

Abstract

A two-dimensional discrete system with chaotic and hyperchaotic characteristics and the control of chaos and hyperchaos by means of time-delayed variable feedback have been realized in an electronic circuit. Both the complex behaviours in the circuit without control and the various stabilized periodic states in the controlled circuit are in good agreement with the results obtained by analyzing theoretically and simulating numerically. In addition ,the experimental results confirm that it is effective to control chaos and hyperchaos by using the method of improved time-delayed variable feedback.

Keywords : discrete system , circuit experiment , the method of time-delayed feedback , control of chaos and hyperchaos

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Foundation for University Key Teachers(Grant No.2000(65)) ,and by the Key Program of the Science and Technology Research from the Chinese Ministry of Education(Grant No.2000-00042).

[†] Corresponding author.