

四维系统中多涡卷混沌与超混沌吸 引子的仿真研究*

禹思敏^{1B)} 林清华²⁾ 丘水生³⁾

¹⁾ 广东工业大学信息工程学院, 广州 510643)

²⁾ 广东工业大学应用物理系, 广州 510643)

³⁾ 华南理工大学电子与信息学院, 广州 510640)

(2002 年 3 月 25 日收到, 2002 年 5 月 24 日收到修改稿)

在双涡卷混沌吸引子的基础上, 以变型蔡氏电路和四阶蔡氏电路为例, 提出一种研究四维系统中多涡卷混沌与超混沌吸引子的新方法. 根据这一方法, 从数学上找到了一种能产生多涡卷的递推规律, 其特点是只需给定三个初始值 m_a , m_b 和 x_1 , 由文中所导出的递推公式, 可确定多涡卷吸引子中分段线性奇函数的各个转折点和平衡点的值, 从而能在四维系统中产生多涡卷混沌与超混沌吸引子, 并且这种方法可以推广到产生任意多个涡卷的情形. 因此, 它具有一般的规律性. 理论分析、计算机模拟和电路仿真结果证明了该方法的可行性.

关键词: 四维混沌系统, 多涡卷混沌吸引子, 多涡卷超混沌吸引子, 涡卷, 键波

PACC: 0545

1. 引 言

含有多个正的 Lyapunov 指数的四阶或四阶以上的混沌系统称为超混沌系统, 这类系统与只有一个正的 Lyapunov 指数的低维混沌系统相比, 具有更复杂的动力学行为, 用一般低维系统的破译方法如相空间重构、回归映射以及非线性预测等^[1-2]很难破译采用超混沌信号加密的有用信息, 因此, 将超混沌系统应用于保密通信中能够显示出保密性能更高的优越性. 有关这类系统的控制、同步及其在保密通信中的应用是目前人们感兴趣的问题之一^[3-9], 并提出了利用非线性电路在四维系统中产生混沌与超混沌吸引子的若干方法^[10-14], 其中文献^[10-12]所研究的一类混沌与超混沌电路, 其特点是电路中惟一非线性元件的 $v-i$ 特性为分段线性奇函数, 能产生具有两个涡卷的吸引子.

在三阶低维混沌系统中, 蔡氏电路是一种能够产生双涡卷混沌吸引子的典型电路^[15-17], 在此基础上, 人们对混沌动力学行为更复杂的多涡卷混沌吸

引子也进行了一些初步的研究, 主要有 Suykens 等提出的产生多涡卷混沌吸引子的一种方法^[18, 19], 但从文中所给出的结果来看, 主要问题是涡卷的大小很不均匀并且数量有限, 有必要对此作进一步研究.

本文提出一种研究四维系统中多涡卷混沌与超混沌吸引子的新方法, 所要解决的主要问题是能够从数学上找到一种用于产生多涡卷吸引子的分段线性奇函数中各个参数的递推规律, 从而可以控制各个涡卷的大小和数量. 在满足一定的条件下, 适当地选取分段线性奇函数中的两个不同斜率值和第一个转折点的值, 利用文中所提出的这种递推方法, 可以确定其他各个转折点和平衡点的值, 从而能在四维系统中产生多涡卷混沌与超混沌吸引子, 这种方法还可以推广至产生任意多个涡卷的情形.

利用这类吸引子的多涡卷特性及其更复杂的动力学行为, 可在混沌保密通信中获得一些更为广泛的应用. 例如, 可用一个多涡卷超混沌吸引子对一路信息进行加密, 按照某种方法, 在不同的时刻, 将信息加密在不同的涡卷之中, 使之具有更好的保密性能.

* 国家自然科学基金(批准号: 69672022), 教育部高等学校博士点学科基金(批准号: X0056107), 广东省教育厅自然科学研究项目(批准号: 010042)和广东工业大学博士基金(批准号: 023004)资助的课题.

2. 四维系统中的多涡卷混沌吸引子及其递推规律

根据文献 [11, 12] 所提出的变型蔡氏电路, 其四维系统中双涡卷混沌吸引子的无量纲归一化四阶状态方程可表为

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= \alpha(y - h(x)), \\
 dy/dt &= x - y + z, \\
 dz/dt &= -\beta(\gamma y - w), \\
 dw/dt &= -\gamma_2(z + \gamma_1 w),
 \end{aligned} \tag{1}$$

式中的各个参数分别为 $\alpha = 9.934, \beta = 14.334, \gamma_1 = 27.333, \gamma_2 = 0.0497$. $h(x) = x + g(x) = x + m_1 x + 0.5(m_0 - m_1)[|x + x_1| - |x - x_1|]$ 为方程中唯一的非线性函数, 它由三个分段线性函数组成, 其中参数 $m_0 = -1.246, m_1 = -0.6742, x_1 = \pm 10$, x_1 称为转折点值. 与 $h(x)$ 相对应的三个线性区域为 $x < -x_1, |x| < x_1, x > x_1$, 分别称为 D_{-1}, D_0, D_1 , 如图 1 所示. 上述参数确定后, 可产生一个双涡卷混沌吸引子, 如图 2 所示, 其中在两个线性区域 D_{-1}, D_1 中对应正斜率 $m_1 + 1$, 形成两个向外扩展的螺旋运动(即

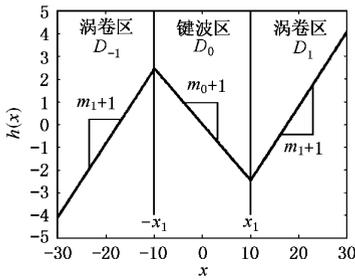


图 1 产生 2 个涡卷的分段线性奇函数 $h(x)$ 及其 3 个区域表示

涡卷运动)^[15, 17], 在线性区域 D_0 中对应负斜率 $m_0 + 1$ 形成单向运动(即键波运动)^[20], 在两个涡卷运动之间通过键波运动联系起来, 形成了一个双涡卷混沌吸引子^[15, 17, 20]. 需要说明的是, 能够形成涡卷和键波运动的 m_0, m_1, x_1 值不是惟一的.

在双涡卷混沌吸引子的基础上, 根据相空间中涡卷与键波相间的关系, 可建立一个使非线性函数 $h(x)$ 为多个分段线性的奇函数, 若要产生一个 n 涡卷的混沌吸引子, $h(x)$ 需要由 $2n - 1$ 个分段线性函数组成. 以 12 涡卷的混沌吸引子为例, 一种具有 23 个分段线性函数的 $h(x)$ 可表为

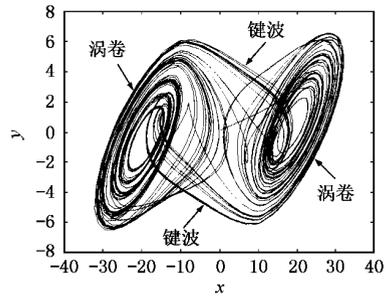


图 2 四维系统中的双涡卷混沌吸引子及其涡卷与键波表示

$$\begin{aligned}
 h(x) &= x + m_{11}x + 0.5 \sum_{i=1}^{11} (m_{i-1} - m_i) \\
 &\quad \times (|x + x_i| - |x - x_i|) \\
 &= \begin{cases} x + m_0 x & (|x| \leq x_1), \\ x + m_i x + \sum_{j=1}^i (m_{j-1} - m_j) x_j & (x_i \leq |x| < x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, 10), \\ x + m_{11} x + \sum_{j=1}^{11} (m_{j-1} - m_j) x_j & (|x| \geq x_{11}). \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2}$$

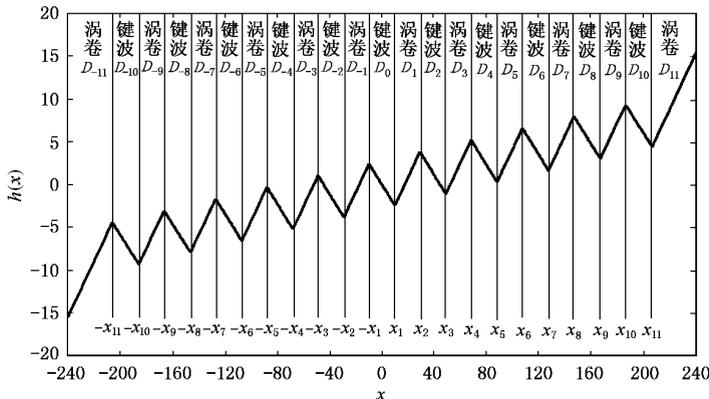


图 3 产生 12 个涡卷的分段线性奇函数 $h(x)$ 及其 23 个区域表示

为了使各个区域中涡卷的大小和形状一致,各分段线性函数的参数可分别选取为 $m_0 = m_2 = \dots = m_8 = m_{10} = m_a$, $m_1 = m_3 = \dots = m_9 = m_{11} = m_b$, 其中 $m_a = -1.246$, $m_b = -0.6724$, 其余参数同前. x_i ($i = 1, 2, \dots, 11$) 为各分段线性函数之间的转折值. 根据 (2) 式, 可得 12 涡卷混沌吸引子的分段线性奇函数 $h(x)$ 及其 23 个区域表示如图 3 所示.

将 (2) 式代入 (1) 式, 并令 (1) 式的左边为零, 得 D_0 区域的平衡点 $P_{eq0} = 0$, 其他区域的平衡点由下面的计算公式确定:

$$P_{eqi+} = \begin{bmatrix} x_{eqi+} \\ y_{eqi+} \\ z_{eqi+} \\ w_{eqi+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)} \\ \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \\ -\gamma_1 \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \\ \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \end{bmatrix},$$

$$P_{eqi-} = \begin{bmatrix} x_{eqi-} \\ y_{eqi-} \\ z_{eqi-} \\ w_{eqi-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)} \\ -\frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \\ -\gamma_1 \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \\ -\frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{(1 + \gamma_1) [m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

(3) 式中 $i = 1, 2, \dots, 11$, $x_{eqi\pm}$, $y_{eqi\pm}$, $z_{eqi\pm}$, $w_{eqi\pm}$ 分别为平衡点 $P_{eqi\pm}$ 在四个坐标 x, y, z, w 上的投影.

根据 (3) 式, 可进一步确定 $h(x)$ 中各个转折点 x_i 的大小. 选取原则是各个平衡点 x_{eqi+} 位于两个转折点 x_i, x_{i+1} 之间, 当给定 $h(x)$ 中第一个转折点 x_1 的初始值后, 可由下式确定其余转折点 x_i 值,

$$\frac{x_{i+1} - x_{eqi+}}{x_{eqi+} - x_i} = k_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

式中 k_i 为正的常数, 当 $k_i \neq 1$ 时, 平衡点不位于两

个转折点的中间, 当 $k_i = 1$ 时, 可使平衡点位于两个转折点的中间. 现取 $k_i = 1$, 由 (3) 式和 (4) 式, 经推导, 可得转折点 x_i 的递推公式为

$$x_{i+1} = \frac{2 \sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1}) x_j}{[m_i + \gamma_1 (1 + \gamma_1)]} - x_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (5)$$

选取 $m_0 = m_2 = m_4 = m_6 = m_8 = m_{10} = m_a$, $m_1 = m_3 = m_5 = m_7 = m_9 = m_{11} = m_b$, 其中 $m_a = -1.246$, $m_b = -0.6724$, 并选取一个任意初始值 x_1 , 可由递推公式 (5) 式确定各个转折点 x_i ($i = 2, 3, 4, \dots, 11$) 的数值, 再由计算公式 (3) 式得到各个平衡点 P_{eqi+} 和 P_{eqi-} 的数值. 以上是研究产生偶数个涡卷的情况, 对于产生奇数个涡卷时, 只需将 m_a 和 m_b 的值互换即可. 上述方法还可推广到任意多个涡卷 ($n = 3, 4, 5, \dots$) 的情形, 因此, 它是一种普遍适用的方法.

以下是根据 (3) 式和 (5) 式来具体确定参数的两个实例.

1) 设 $m_a = -1.246$, $m_b = -0.6724$, $x_1 = 10$. 由 (5) 式和 (3) 式计算得产生 4 涡卷超混沌吸引子的各个 x_i, P_{eqi+} 的具体数值为

$$\begin{aligned} x_i &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] \\ &= [10.0000 \ 29.2466 \ 49.2466 \ 68.4931 \ 88.4931], \\ x_{eqi+} &= [x_{eq1+} \ x_{eq2+} \ x_{eq3+} \ x_{eq4+}] \\ &= [19.6233 \ 39.2466 \ 58.8698 \ 78.4931], \\ y_{eqi+} &= [y_{eq1+} \ y_{eq2+} \ y_{eq3+} \ y_{eq4+}] \\ &= [0.6926 \ 1.3852 \ 2.0778 \ 2.7703], \\ z_{eqi+} &= [z_{eq1+} \ z_{eq2+} \ z_{eq3+} \ z_{eq4+}] \\ &= [-18.9307 \ -37.8614 \ -56.7921 \ -75.7228], \\ w_{eqi+} &= [w_{eq1+} \ w_{eq2+} \ w_{eq3+} \ w_{eq4+}] \\ &= [0.6926 \ 1.3852 \ 2.0778 \ 2.7703]. \end{aligned} \quad (6)$$

2) 设 $m_a = -1.246$, $m_b = -0.6724$, $x_1 = 12.4$.

由 (5) 式和 (3) 式计算得产生 12 涡卷超混沌吸引子的各个 x_i, P_{eqi+} 的具体数值为

$$\begin{aligned} x_i &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{10} \ x_{11} \ x_{12}] \\ &= [12.4000 \ 36.2657 \ 61.0657 \ 84.9315 \ 109.7315 \\ &\quad 133.5972 \ 158.3972 \ 182.2629 \ 207.0629 \\ &\quad 230.9287 \ 255.7287 \ 279.5944], \\ x_{eqi+} &= [x_{eq1+} \ x_{eq2+} \ x_{eq3+} \ x_{eq4+} \ x_{eq5+} \ x_{eq6+} \ x_{eq7+} \\ &\quad x_{eq8+} \ x_{eq9+} \ x_{eq10+} \ x_{eq11+} \ x_{eq12+}] \\ &= [24.3329 \ 48.6657 \ 72.9986 \ 97.3315 \ 121.6643 \end{aligned}$$

145.9972 170.3301 194.6629 218.9958
243.3287 267.6615 291.9944],

$$Y_{eqi+} = [Y_{eq,1+} \ Y_{eq,2+} \ Y_{eq,3+} \ Y_{eq,4+} \ Y_{eq,5+} \ Y_{eq,6+} \ Y_{eq,7+} \ Y_{eq,8+} \ Y_{eq,9+} \ Y_{eq,10+} \ Y_{eq,11+} \ Y_{eq,12+}]$$

$$= [0.8588 \ 1.7176 \ 2.5764 \ 3.4352 \ 4.2940 \ 5.1528 \ 6.0116 \ 6.8705 \ 7.7293 \ 8.5881 \ 9.4469 \ 10.3057],$$

$$Z_{eqi+} = [Z_{eq,1+} \ Z_{eq,2+} \ Z_{eq,3+} \ Z_{eq,4+} \ Z_{eq,5+} \ Z_{eq,6+} \ Z_{eq,7+} \ Z_{eq,8+} \ Z_{eq,9+} \ Z_{eq,10+} \ Z_{eq,11+} \ Z_{eq,12+}]$$

$$= [-23.474 \ -46.9481 \ -70.4222 \ -93.8962 \ -117.3703 \ -140.8444 \ -164.3184 \ -187.7925 \ -211.2665 \ -234.7406 \ -258.2147 \ -281.6887],$$

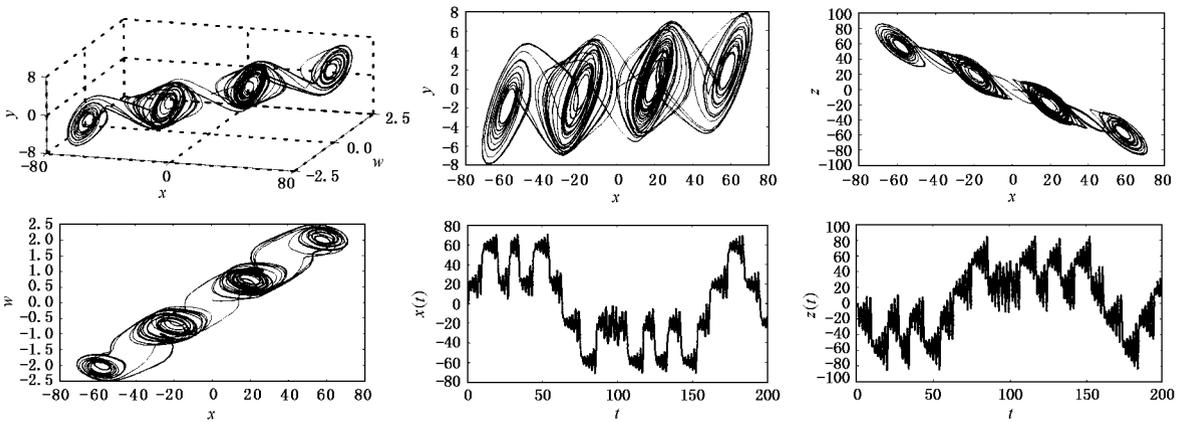
$$W_{eqi+} = [W_{eq,1+} \ W_{eq,2+} \ W_{eq,3+} \ W_{eq,4+} \ W_{eq,5+} \ W_{eq,6+} \ W_{eq,7+} \ W_{eq,8+} \ W_{eq,9+} \ W_{eq,10+} \ W_{eq,11+} \ W_{eq,12+}]$$

$$= [0.8588 \ 1.7176 \ 2.5764 \ 3.4352 \ 4.2940 \ 5.1528 \ 6.0116 \ 6.8705 \ 7.7293 \ 8.5881 \ 9.4469 \ 10.3057].$$

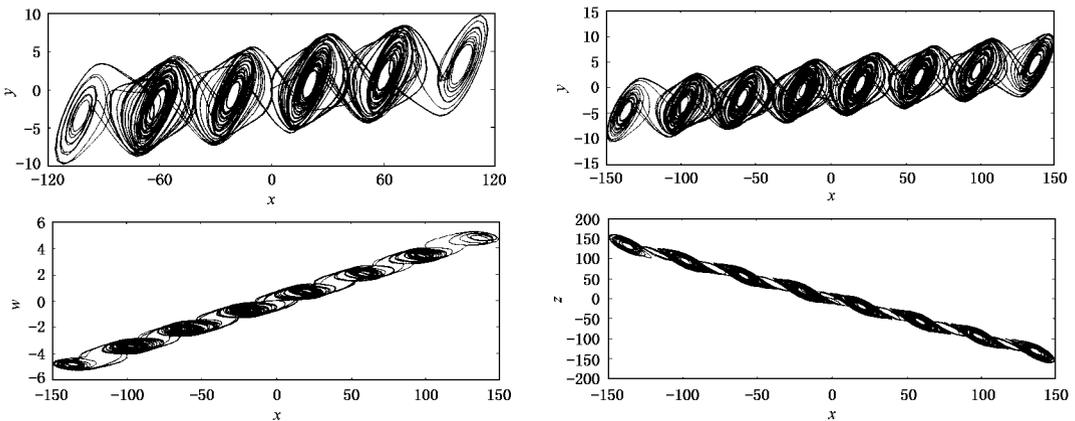
(7)

3. 多涡卷混沌吸引子的计算机模拟

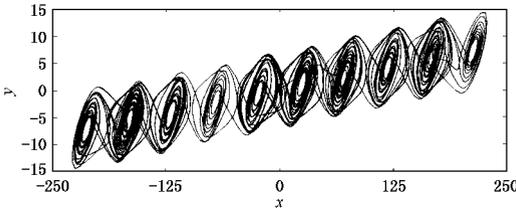
利用前面分析的结果,可对上述四维系统中多涡卷混沌吸引子进行计算机模拟,模拟结果如图4所示.其中图4(a)为4涡卷混沌吸引子的相图及时域波形图;(b)为6和8涡卷混沌吸引子的相图;(c)(d)(e)(f)分别为10,12,14,16涡卷混沌吸引子的相图.需要说明的是,初始值 x_1 的选取原则上带有任意性,但选取适当的 x_1 ,可使各个涡卷出现的概率尽量相等.



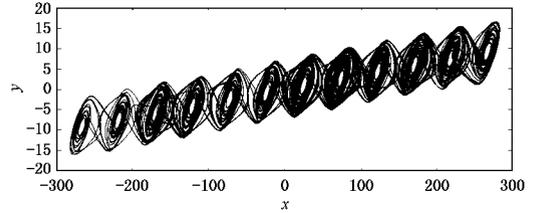
(a) 4 涡卷混沌吸引子的相图及时域波形图 ($m_a = -1.246, m_b = -0.6724, x_1 = 10$)



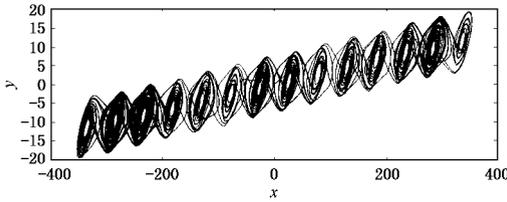
(b) 6, 8 涡卷混沌吸引子的相图 ($m_a = -1.246, m_b = -0.6724, x_1 = 10$)



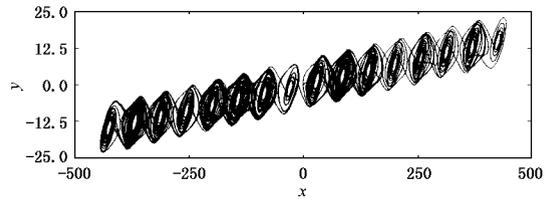
(c) 10 涡卷混沌吸引子的相图($x_1 = 12.1$)



(d) 12 涡卷混沌吸引子的相图($x_1 = 12.4$)



(e) 14 涡卷混沌吸引子的相图($x_1 = 13.2$)



(f) 16 涡卷混沌吸引子的相图($x_1 = 14.48$)

图 4 四维系统中多涡卷混沌吸引子的计算机模拟结果

4. 四维系统中的多涡卷超混沌吸引子

根据文献 [10], 四阶蔡氏电路的无量纲归一化状态方程可表为

$$\begin{aligned}
 dx/dt &= \alpha [g(y-x) - z], \\
 dy/dt &= \beta [-g(y-x) - w], \\
 dz/dt &= x + z, \\
 dw/dt &= \gamma y,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

式中 $\alpha = 2, \beta = 20, \gamma = 1.5, g(y-x) = m_1(y-x) + 0.5[m_0 - m_1] [|y-x+x_1| - |y-x-x_1|]$ 为三个分段线性奇函数, 其中 $m_0 = -0.2, m_1 = 3$. 文献 [10] 已算得其李氏指数谱为 $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4] = [0.24, 0.06, 0.00, -53.8]$, 可知该系统具有两个正的李氏指数, 因此, 它代表四维系统中的一个超混沌吸引子. 由 (8) 式和上述各参数, 可得其双涡卷超混沌吸引子的相图, 如 5 所示.

利用与本文第 2 节相类似的方法, 以在四阶蔡

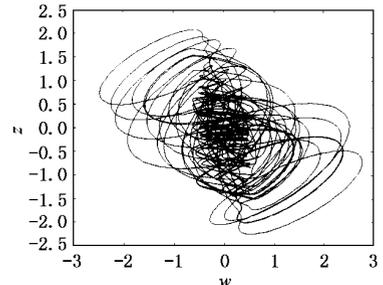
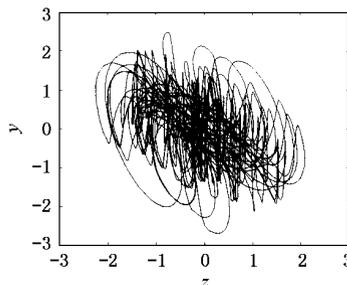
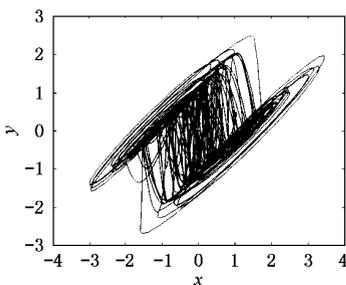


图 5 双涡卷超混沌吸引子的计算机模拟结果

氏电路中产生 4 涡卷超混沌吸引子为例, 具有 7 个分段线性的奇函数 $g(\cdot)$ 可表为

$$\begin{aligned}
 g(y-x) &= m_3(y-x) + 0.5 \sum_{i=1}^3 (m_{i-1} - m_i) \\
 &\quad \times (|y-x+x_i| - |y-x-x_i|) \\
 &= \begin{cases} m_0(y-x) & (|y-x| \leq x_1), \\ m_1(y-x) + \sum_{j=1}^1 (m_{j-1} - m_j)x_j & (x_1 \leq |y-x| < x_2), \\ m_2(y-x) + \sum_{j=1}^2 (m_{j-1} - m_j)x_j & (x_2 \leq |y-x| < x_3), \\ m_3(y-x) + \sum_{j=1}^3 (m_{j-1} - m_j)x_j & (|y-x| \geq x_3). \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

将(9)式代入(8)式,可得关于变量 x 的平衡点方程为

$$x_{\text{eq}0} = 0,$$

$$x_{\text{eq}i} = \frac{\sum_{j=1}^i (m_j - m_{j-1})x_j}{m_i - 1} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

根据(10)式,当给定 $g(\cdot)$ 中第一个转折点 x_1 的初始值后,其余转折点 x_i 值可由下式确定:

$$\frac{x_{i+1} - x_{\text{eq}i}}{x_{\text{eq}i} - x_i} = k_i \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

为了产生 4 涡卷超混沌吸引子,可选取 $k_1 = 1.4$, $k_2 = 2.4$,由(10)式和(11)式,得转折点 x_2, x_3 的递推公式为

$$x_2 = \frac{(1 + k_1)(m_1 - m_0)x_1}{m_1 - 1} - k_1 x_1,$$

$$x_3 = \frac{(1 + k_2)[(m_1 - m_0)x_1 + (m_2 - m_1)x_2]}{m_2 - 1} - k_2 x_2. \quad (12)$$

(12)式中的 x_1 可为任意初始值.仍取 $\alpha = 2, \beta = 20, \gamma = 1.5$,由(12)式,可算得能产生 4 涡卷超混沌吸引子的几组数据分别为

第 1 组数据:

$$\begin{cases} [m_0, m_1, m_2, m_3] = [-1.0, 4.5, -1.0, 4.5], \\ [x_1, x_2, x_3] = [2.00, 4.74, 14.26]; \end{cases}$$

第 2 组数据:

$$\begin{cases} [m_0, m_1, m_2, m_3] = [-1.0, 3.5, -1.0, 3.5], \\ [x_1, x_2, x_3] = [3.00, 8.76, 23.04]; \end{cases}$$

第 3 组数据:

$$\begin{cases} [m_0, m_1, m_2, m_3] = [-0.8, 3.0, -0.8, 3.0], \\ [x_1, x_2, x_3] = [1.00, 3.16, 7.92]. \end{cases}$$

5. 4 涡卷超混沌吸引子的计算机模拟

4 涡卷超混沌吸引子的计算机模拟结果如图 6 所示.图 6 中(a)(b)(c)(d)为上述第 1 组数据所得的结果(e)为第 2 组数据所得的结果(f)则为第 3 组数据所得的结果.由此可见,利用本文所提出的递推规律能够较好地产生出多涡卷超混沌吸引子,并且可将该方法推广至产生具有多个涡卷超混沌吸引子的情形而不失其一般性.进一步的研究还表明,能产生 4 涡卷超混沌吸引子的 m_i 有较大的取值范围,当 $m_0 = m_2 = m_4 = -1$ 时, m_1, m_3 的取值范围为 2.5—4.5,当 $m_1 = m_3 = m_5 = 3$ 时, m_0, m_2 的取值范围为 0.4—1.2, m_i 在上述范围内取值时,均能产生出 4 涡卷超混沌吸引子.

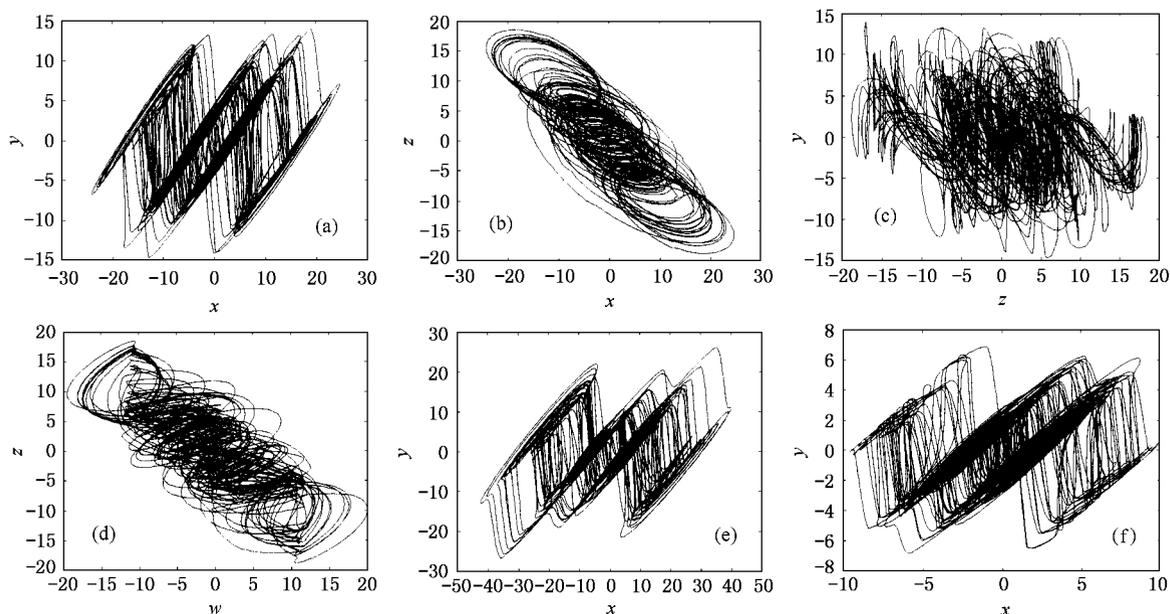


图 6 4 涡卷超混沌吸引子的计算机模拟结果

6. 多涡卷混沌吸引子的电路设计及 EWB 仿真

产生 4—6 涡卷混沌吸引子的 EWB (electronics workbench) 仿真电路如图 7 所示, 图中所有的运放均采用 TL082, 虚框内的部分等效于产生 4—6 涡卷的蔡氏二极管 NR, 其中每一个运放及其外围电路构成 NR 的一条支路, 产生与之相应的转折点电压 E_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), 开关 K 断开和接通时分别产生 4 涡卷和 6 涡卷. 由 (1) 式, 可取其电路参数为: $C_1 = 10\text{nF}$, $C_2 = 99.34\text{nF}$, $C_3 = 2\mu\text{F}$, $L = 18.64\text{mH}$, $R = 1/G = 1.64\text{k}\Omega$, $R_0 = 60\Omega$. E_1 的选取原则上带有任意性, 但为使各个运放不超出其动态范围, E_1 应尽可能取小一些. 选取 $E_1 = 0.6\text{V}$, 由 (5) 式可得各个转折点的电压为

$$E_i = [E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4 \ E_5] \\ = [0.60\text{V} \ 1.75\text{V} \ 2.95\text{V} \ 4.11\text{V} \ 5.31\text{V}]. \quad (13)$$

根据 (13) 式, 取运放 TL082 的电源电压为 $\pm 15\text{V}$, 其饱和电压为 $E_{\text{sat}} = 14.3\text{V}$, 可求得 NR 中与各个运放反相端相连的两个电阻的比值如下:

$$R_{22}/R_{21} = E_{\text{sat}}/E_5, \quad R_{42}/R_{41} = E_{\text{sat}}/E_4 - 1, \\ R_{62}/R_{61} = E_{\text{sat}}/E_3, \quad R_{82}/R_{81} = E_{\text{sat}}/E_2 - 1, \quad (14) \\ R_{102}/R_{101} = E_{\text{sat}}/E_1.$$

在此基础上可用递推的方法得到 NR 中其余电阻的比值如下 (推导过程较复杂, 此处从略):

$$\frac{R_{02}}{R_{01}} = -R_3 G_5, \quad \frac{R_{32}}{R_{31}} = \frac{R_{22}/R_{21}}{R_3 |G_4 - G_5|} - 1, \\ \frac{R_{52}}{R_{51}} = \frac{1 + R_{42}/R_{41}}{R_3 |G_3 - G_4|} - 1, \quad \frac{R_{72}}{R_{71}} = \frac{R_{62}/R_{61}}{R_3 |G_2 - G_3|} - 1, \\ \frac{R_{92}}{R_{91}} = \frac{1 + R_{82}/R_{81}}{R_3 |G_1 - G_2|} - 1, \quad \frac{R_{112}}{R_{111}} = \frac{R_{102}/R_{101}}{R_3 |G_0 - G_1|} - 1, \quad (15)$$

式中 $G_0 = G_2 = G_4 = m_a G$, $G_1 = G_3 = G_5 = m_b G$, $R_3 = 2\text{k}\Omega$. 取 $R_{01} = R_{21} = R_{41} = R_{61} = R_{81} = R_{101} = 20\text{k}\Omega$, $R_{31} = R_{51} = R_{71} = R_{91} = R_{111} = 2\text{k}\Omega$, 由 (14) 式和 (15) 式, 可得 $R_{02} = 16.48\text{k}\Omega$, $R_{22} = 53.8\text{k}\Omega$, $R_{42} = 49.6\text{k}\Omega$, $R_{62} = 96.8\text{k}\Omega$, $R_{82} = 143\text{k}\Omega$, $R_{102} = 476\text{k}\Omega$, $R_{32} = 5.7\text{k}\Omega$, $R_{52} = 7.94\text{k}\Omega$, $R_{72} = 11.84\text{k}\Omega$, $R_{92} = 21.4\text{k}\Omega$, $R_{112} = 66.2\text{k}\Omega$, $R_1 = R_2 = 200\text{k}\Omega$. 最后可得产生 4—6 涡卷混沌吸引子的电路如图 7 所示.

根据图 7, 可得 EWB 电路仿真结果如图 8 所示, 图 8 (a) (b) 分别为 4 涡卷混沌吸引子的相图和时域波形图, (c) (d) 分别为 6 涡卷混沌吸引子的相图和时域波形图. 由此可见, 计算模拟和电路仿真结果是完全一致的.

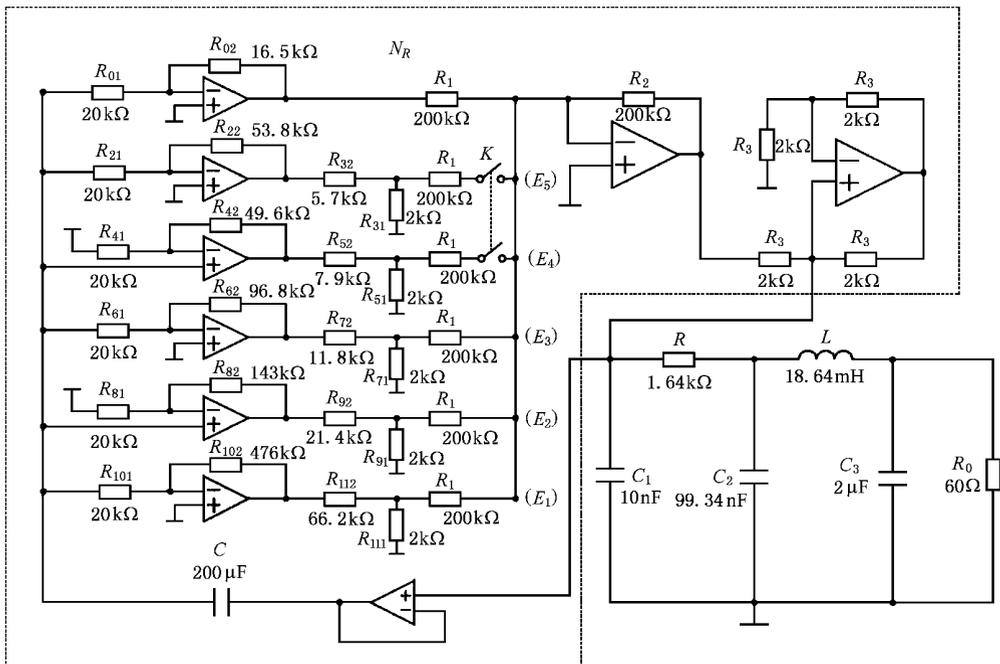


图 7 产生 4—6 涡卷混沌吸引子的电路

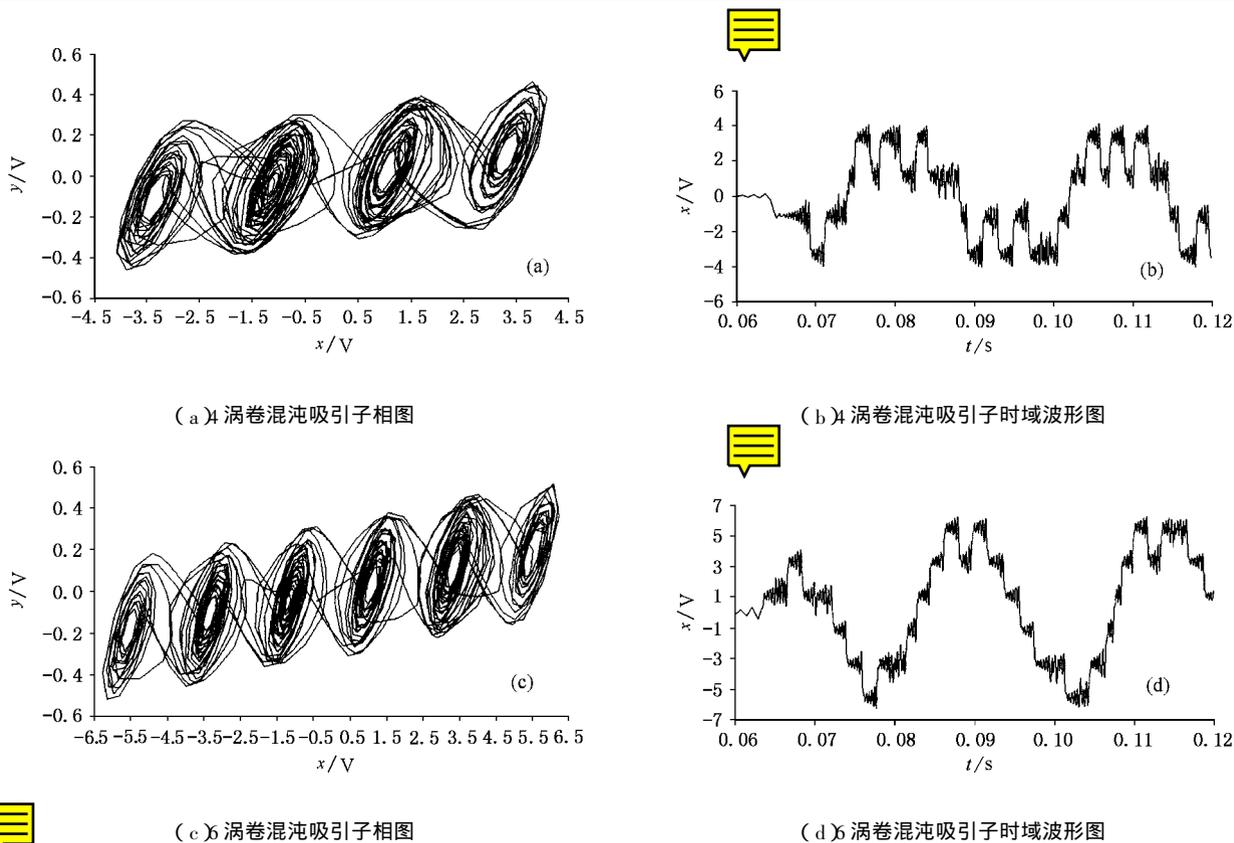


图 8 4—6 涡卷混沌吸引子的 EWB 电路仿真结果

7. 结 论

在双涡卷混沌吸引子的基础上,提出了一种研究 4 维系统中多涡卷混沌与超混沌吸引子的新方法,其特点是只需利用三个参数 m_a 、 m_b 和 x_1 ,由本文的递推公式,可确定分段线性奇函数 $h(x)$ 或 $g(x)$ 中各个平衡点和转折点的值,从而能产生具有多个涡卷的混沌和超混沌吸引子,并且这种方法可以推广到产生任意多个涡卷的情形,因此,它具有一般的规律性.其中有关 m_i 的选取又具较大的灵活

性,通常可选取 $m_0 = m_2 = \dots = m_a$, $m_1 = m_3 = \dots = m_b$.对于 x_1 的选取原则上具有任意性,但若选取适当的 x_1 ,可使各个涡卷出现的概率尽量相等.与通常意义下的双涡卷吸引子相比较而言,多涡卷吸引子具有更复杂的动力学行为.本文以 4 维系统中的变型蔡氏电路和四阶蔡氏电路为例分别对这一方法进行了较为系统的研究,理论分析、计算机模拟和电路仿真结果证实了该方法的可行性.本文的理论意义在于,在 4 维系统中找到了产生多涡卷混沌与超混沌吸引子的一种普适规律.有关此类系统的硬件实现以及在保密通信中的应用我们将作进一步的研究.

- [1] Short K M 1994 *Int. J. Bifurc. Chaos* **4** 959
- [2] Short K M 1996 *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** 367
- [3] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 [in Chinese] 罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402
- [4] Luo X S *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 589 [in Chinese] 罗晓曙等 1999 物理学报 **48** 589
- [5] Wang T B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 185 [in Chinese] 王铁

- 邦等 2001 物理学报 **50** 1851
- [6] Dai M *et al* 1999 *Chin. Phys.* **8** 308
- [7] Lai Y C and Grebogi C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1894
- [8] Peng J H and Ding E J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 904
- [9] Yang S P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 619 [in Chinese] 杨世平等 2001 物理学报 **50** 619
- [10] Matsumoto T and Chua L O 1986 *IEEE Trans. CAS-I* **33** 1143

- [11] Yin Y Z 1996 *Int. J. Bifurc. Chaos* **6** 2101
- [12] Yin Y Z 1997 *Int. J. Bifurc. Chaos* **7** 1401
- [13] Kapitaniak T and Chua L O 1994 *Int. J. Bifurc. Chaos* **4** 477
- [14] Yue L J *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2097 [in Chinese] 岳丽娟等 2001 物理学报 **50** 2097]
- [15] Matsumoto T ,Chua L O and Komuro M 1985 *IEEE Trans. CAS-I* **32** 798
- [16] Zhong G Q and Ayrom F 1985 *Int. J. Circuit Theory Appl.* **13** 93
- [17] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans. CAS-I* **40** 657
- [18] Suykens J and Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. CAS-I* **40** 861
- [19] Yalcin M E ,Suykens J and Vandewalle J 2000 *IEEE Trans. CAS-I* **47** 425
- [20] Qiu S S 1997 *IEEE ISCAS '97 Hong Kong* 1033

Simulation investigation on multi-scroll chaotic and hyperchaotic attractors for four-dimensional systems^{*}

Yu Si-Min¹) Lin Qing-Hua²) Qiu Shui-Sheng³)

¹) College of Information Engineering ,Guangdong University of Technology ,Guangzhou 510643 ,China)

²) Department of Applied Physics ,Guangdong University of Technology ,Guangzhou 510643 ,China)

³) College of Electronic & Information Engineering ,South China University of Technology ,Guangzhou 510640 ,China)

(Received 25 March 2002 ; revised manuscript received 24 May 2002)

Abstract

On the basis of double scroll chaotic attractors taking the modified Chua's circuit and fourth-order Chua's circuit as examples a new method for study chaotic and hyperchaotic attractors with multi-scroll in four-dimensional systems is presented. According to this method the recursion rules used to generate multi-scroll attractors are mathematically obtained. Only given initial values of m_a , m_b and x_1 , according to the presented recursion formulas, can the values of other breakpoints and equilibrium points of a piecewise linear characteristic in multi-scroll attractors be determined, and multi-scroll chaotic and hyperchaotic attractors for 4D systems generated. This method can be applied to generating attractors having any scrolls with general regularity. Theoretic analysis, computer and circuit simulation results have proved the feasibility of this method.

Keywords : four-dimensional systems , multi-scroll chaotic attractors , multi-scroll hyperchaotic attractors , scrolls , bonds

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 69672022) , and the Doctoral Education Foundation of China (Grant No. 00056107) , and the Natural Science Foundation of the Education Department of Guangdong Province (Grant No. 010042) , and the Doctoral Foundation of Guangdong University of Technology (Grant No. 023004) .