

纠缠度对双光子 Jaynes-Cumming 模型的光学效应的影响^{*}

张国锋¹⁾²⁾ 贾新娟¹⁾ 严启伟²⁾ 梁九卿¹⁾

¹⁾ (山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

²⁾ (中国科学院物理研究所与凝聚态物理中心磁学国家重点实验室, 北京 100080)

(2002 年 12 月 5 日收到, 2003 年 1 月 23 日收到修改稿)

研究了一对纠缠的二能级原子之一与单模双光子腔场的相互作用, 当该原子离开腔被选择性测量时, 发现场态的非经典特性很大程度上取决于两原子间的纠缠度。同时发现通过对原子的选择性测量, 场的压缩特性和光子的反聚束效应会增强。

关键词: 纠缠度, Jaynes-Cumming 模型, 压缩效应, 光子反聚束效应

PACC: 0365, 4250

1. 引言

近年来光场非经典特性的研究^[1,2]与纠缠的研究^[3,4]成为热门, 外界环境对光场非经典特性影响的研究^[5]也成为焦点, 本文通过对原子的选择测量讨论了纠缠度与光场非经典特性的关系。通过对态的选择测量来研究量子系统, 也是近年来出现的一种方法, 这项研究的一个典范是 Davidovich 等^[6]的研究, 表明在腔 QED 中 Schrödinger 猫态的形成过程。我们注意到在腔 QED 领域里, 对这种类型量子态的研究已有悠久的历史。Meystre^[7]讨论了反复地量子测量对含有无能量损失的微波激光器的腔场的影响。Krause 等^[8]讨论了在一个腔场中 $|n\rangle$ 态的实现问题。最近, Vogel 等^[9]发现了如何在一个单模腔中产生一个任意场态。Guo 和 Zhang^[10]提出了实现 Schrödinger 猫态的一个方案。Gerry 等^[11]发现, 通过对原子的选择测量可使压缩效应增强。其基本观点是: 对两纠缠系统之一进行测量, 可提供另一系统的信息。在早期研究^[12,13]中发现, 通过单光子转换, 一个纠缠原子与一个单模场的非经典相互作用能通过对原子的选择测量来增强亚泊松统计的非经典特

性。这里, 我们考虑由两纠缠原子 A 和 B 组成的系统与一个单模双光子腔场相互作用, 并证明原子的纠缠度能强烈影响腔场的非经典特性。

2. 两原子间的纠缠度

如果由 U 和 V 组成的复合系统的密度算符可以写成两个子系统的约化密度算符的直积, 如 $\rho = \rho_U \otimes \rho_V$, 那么, 子系统 U 和 V 被称为是非纠缠的; 否则, 称为是纠缠的。这里, 我们用 Neumann 熵来度量两原子间的纠缠度。

一个系统的 Neumann 熵 S 可用一个密度算符 ρ 来表示:

$$S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (1)$$

设最初二能级原子 A 和 B 处于纠缠态

$$|\varphi(0)\rangle = c_1 |e\rangle_a |g\rangle_b - c_2 |g\rangle_a |e\rangle_b, \quad (2)$$

其中 $|e\rangle_a$ 表示原子 A 处于激发态, $c_1^2 + c_2^2 = 1$ 。

因此, 根据(1)式, 原子 A 和 B 的熵可表示为

$$S = -2c_1^2 \ln c_1 - 2c_2^2 \ln c_2. \quad (3)$$

分析表明, Neumann 熵越大, 两原子间的纠缠度越大。当 $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2} \approx 0.7$, 熵取最大值 $\ln 2$ 。如图 1 所示。

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10075032)资助的课题。

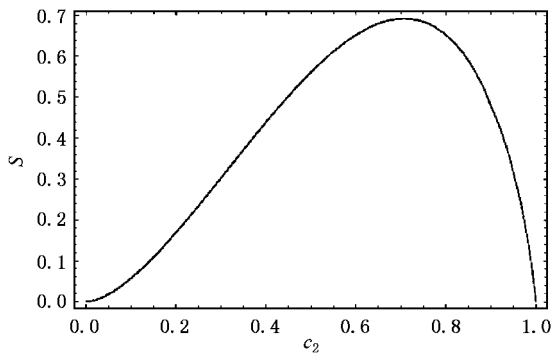


图 1 Neumann 熵 S 随 c_2 的变化曲线

3. 对原子进行选择测量后, Jaynes-Cummings 模型的演化

与原子 A 纠缠的一个二能级原子 B 与含有单模双光子的高 Q 腔相互作用,如图 2 所示.

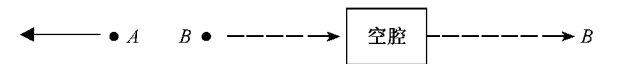


图 2 物理模型的简图

在旋转波近似下,单模双光子 Jaynes-Cummings 模型在相互作用绘景中的哈密顿量表示为 ($\hbar = 1$) [14]

$$H_1 = \epsilon (a^2 s^+ + a^{+2} s^-), \tag{4}$$

其中, $s^\pm$ 是原子算符, a 和 a^+ 是腔场的湮没算符和产生算符, ϵ 是原子场耦合常数.

设最初腔场处于相干态 $|\alpha\rangle$, 这样初态 $|\phi(0)\rangle_{ABf}$ 可以取以下形式:

$$\begin{aligned} |\phi(0)\rangle_{ABf} &= |\phi(0)\rangle_{AB} \otimes |\phi(0)\rangle_f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n |n\rangle (c_1 |e\rangle_a |g\rangle_b \\ &\quad - c_2 |g\rangle_a |e\rangle_b), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $Q_n = \exp(-\frac{\alpha^2}{2}) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$ (为简化, α 取实数).

设在相互作用绘景中,在任意时刻 t 整个系统的态为

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle_{ABf} &= \sum_{n=0}^{\infty} d_1(t) |e\rangle_a |g\rangle_b |n\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=2}^{\infty} d_2(t) |e\rangle_a |e\rangle_b |n-2\rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} d_3(t) |g\rangle_a |e\rangle_b |n\rangle \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} d_4(t) |g\rangle_a |g\rangle_b |n+2\rangle, \end{aligned} \tag{6}$$

将(4)式和(6)式代入 Schrödinger 波动方程

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle_{ABf} = H_I |\phi(t)\rangle_{ABf},$$

再结合(5)式所示的初态,得出

$$\begin{aligned} &|\phi(t)\rangle_{ABf} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_1 Q_n \cos[\sqrt{n(n-1)}\epsilon t] |e\rangle_a |g\rangle_b |n\rangle \\ &\quad - i \sum_{n=2}^{\infty} c_1 Q_n \sin[\sqrt{n(n-1)}\epsilon t] |e\rangle_a |e\rangle_b |n-2\rangle \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} c_2 Q_n \cos[\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon t] |g\rangle_a |e\rangle_b |n\rangle \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} c_2 Q_n \sin[\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon t] |g\rangle_a |g\rangle_b |n+2\rangle. \end{aligned}$$

在相互作用一段时间 t 后,对原子 B 处的态进行选择测量.如果测得原子 B 处于激发态 $|e\rangle_b$, 则整个系统的态约化为

$$\begin{aligned} &|\phi_e(t)\rangle_{Af} \\ &= \frac{1}{N_e} \{ \sum_{n=0}^{\infty} c_2 Q_n \cos[\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon t] |g\rangle_a |n\rangle \\ &\quad + i \sum_{n=2}^{\infty} c_1 Q_n \sin[\sqrt{n(n-1)}\epsilon t] |e\rangle_a |n-2\rangle \}, \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} N_e &= \{ \sum_{n=0}^{\infty} c_2^2 Q_n^2 \cos^2[\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon t] \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} c_1^2 Q_n^2 \sin^2[\sqrt{n(n-1)}\epsilon t] \}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

另一方面,如果测得原子 B 处于基态,则原子 A 与场组成的系统就处于以下态:

$$\begin{aligned} &|\phi_g(t)\rangle_{Af} \\ &= \frac{1}{N_g} \{ \sum_{n=0}^{\infty} c_1 Q_n \cos[\sqrt{n(n-1)}\epsilon t] |e\rangle_a |n\rangle \\ &\quad + i \sum_{n=0}^{\infty} c_2 Q_n \sin[\sqrt{(n+1)(n+2)}\epsilon t] |g\rangle_a |n+2\rangle \}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$N_g = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_1^2 Q_n^2 \cos^2 [\sqrt{n(n+1)} \epsilon t] + \sum_{n=0}^{\infty} c_2^2 Q_n^2 \sin^2 [\sqrt{(n+1)(n+2)} \epsilon t] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

正如(7)式或(8)式所示,对原子 B 的测量使原子 A 和场处于纠缠态.即使原子 A 与腔场没有相互作用,通过原子 B ,原子 A 的信息也能传递到腔场.这意味着纠缠传递已经发生.

4. 在腔场中的压缩和反聚束效应

为了研究场的压缩特性和光子的反聚束效应,我们定义以下函数:

$$a_1 = \frac{a + a^+}{2}, a_2 = \frac{a - a^+}{2i};$$

$$f_i = (\Delta a_i)^2 - \frac{1}{4}, i = 1, 2;$$

$$Q = \frac{\langle (a^+ a)^2 \rangle - \langle a^+ a \rangle^2 - \langle a^+ a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2},$$

出现压缩的条件是 $f_i < 0, i = 1$ 或 2 ;反聚束效应的条件是 $Q < 0$.

我们先看纠缠度对场的压缩效应的影响.我们知道

$$(\Delta a_1)^2 = \langle a_1^2 \rangle - \langle a_1 \rangle^2,$$

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{1}{4} (a^2 + a^{+2} + aa^+ + a^+ a) \\ &= \frac{1}{4} (a^2 + a^{+2} + 2N + 1), \end{aligned}$$

经计算,可以画出,在未作选择性测量情况下,当纠缠因子 c_2 取不同值时, f_1 随相互作用时间尺度 $T = \epsilon t$ 的变化曲线.如图 3 所示.结果表明,随着 c_2 的增大,压缩度先减小后增大.设想现在我们发现原子 B 处于激发态,那么,腔场被约化到(7)式所示的态 $|\phi_e(t)\rangle_{Af}$,其结果如图 4 所示,与图 3 有明显不同.我们发现,对于相同的纠缠因子 c_2 ,此时的压缩度比未测量情况下的更大.而且,我们从图 1 中发现,纠缠度随 c_2 的增加先增大后减小,且在 $c_2 \approx 0.7$ 时取最大值;但压缩度却随 c_2 的增加先减小后增大,且在 $c_2 = 0.7$ 时取最小值.从图 4 中看出,在短时间里, $c_2 = 0.4$ 时的压缩度比 $c_2 = 0.7$ 时将近大一倍.

纠缠度能用来度量两个量子系统间相互关联的程度.如果 B 原子处于最大纠缠态且能带有 A 原子的最大信息量,当它通过腔场之后,整个场的态就会处于最大的纠缠混合态.场态越接近一个纯态,它的

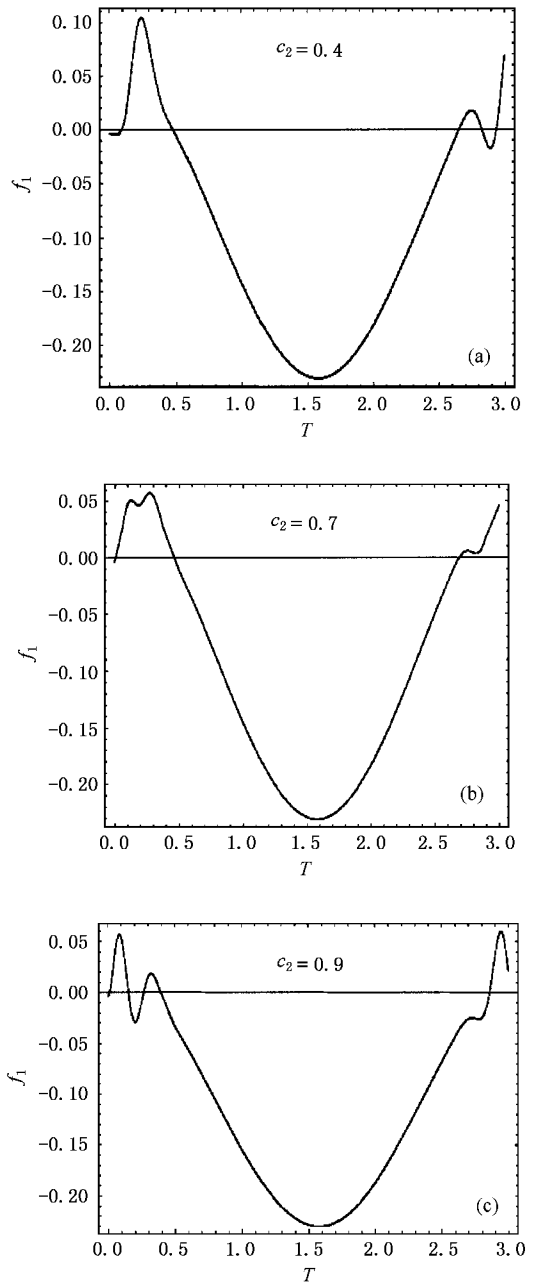


图 3 未对原子 B 选择测量时的压缩效应 ($\bar{n} = \alpha^2 = 10$)

非经典特性越明显.因此,我们得出以下结论:随着纠缠度的增加,场的压缩效应会减弱.

现在,考虑光子反聚束效应的情形.图 5 和图 6 显示了 Q 的时间演化如何随 c_2 的变化而改变.

可以看出,纠缠因子 c_2 对光子反聚束效应有很大的影响.随着 c_2 的增大,反聚束效应先减弱后增强,且在 $c_2 = 0.7$ (此时,纠缠度取最大值),最弱.可以看出,纠缠度的增加能增强态的混合度,因而减弱了光子反聚束效应.还可以看出,在对原子进行选

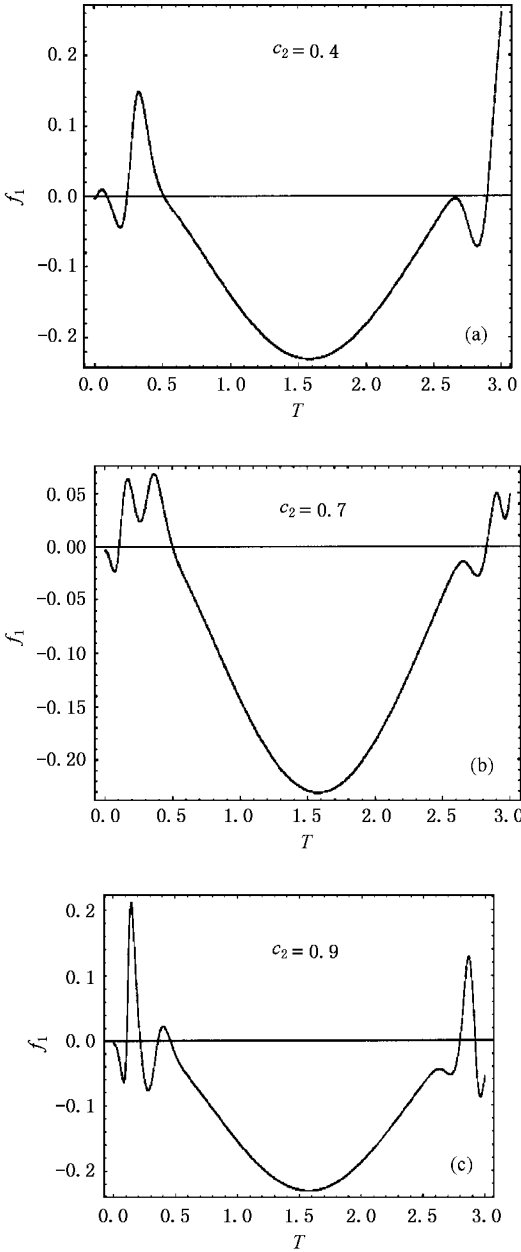


图 4 测得原子 B 处于激发态时的压缩效应 ($\bar{n} = \alpha^2 = 10$)

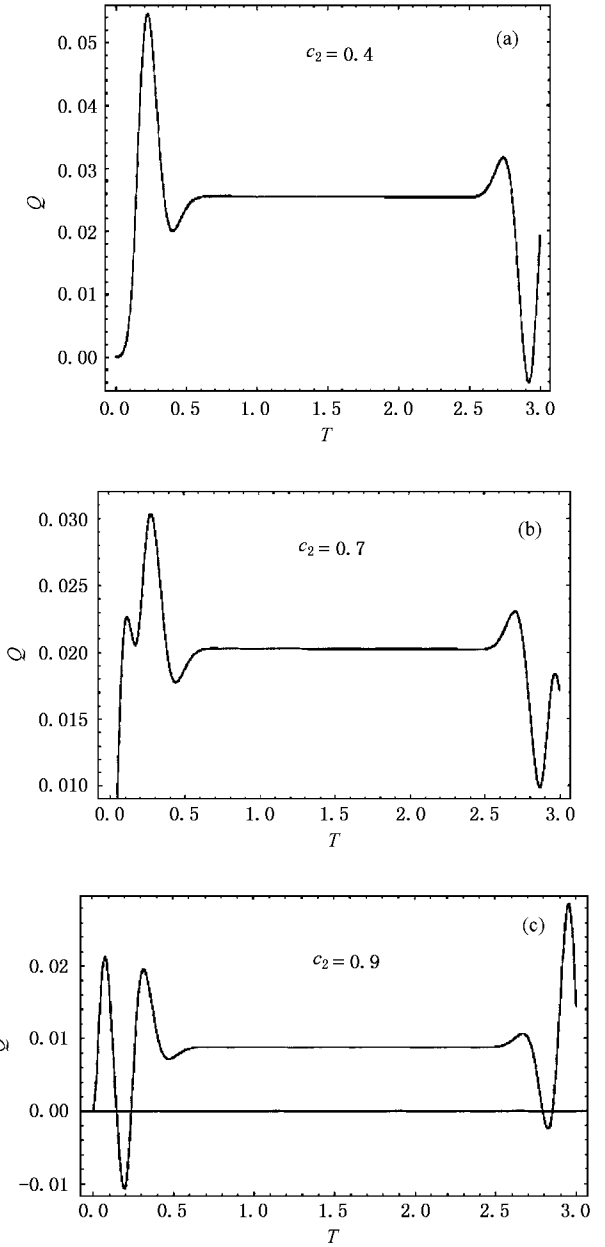


图 5 未对原子 B 选择测量时的 Q 参数 ($\bar{n} = \alpha^2 = 10$)

择性测量的情形中,光子反聚束效应的非经典特性比在未做测量时的更明显.

5. 结 论

总的来说,我们已经看出,两个纠缠原子能在相互间产生纠缠传递,而且,纠缠原子的纠缠度的增加会减弱场的压缩效应以及光子反聚束效应.此外,通

过对原子的选择性测量,可以增强压缩效应和光子反聚束效应.事实上,可以发觉作用原子不需要与特定原子纠缠也会出现这样的结果,只要作用原子始终处于这样的状态:

$$\rho_b = |c_1|^2 |g\rangle_b \langle g| + |c_2|^2 |e\rangle_b \langle e|,$$

即密度算符有非对角项,腔场的演化也能取得与上面一致的结论.

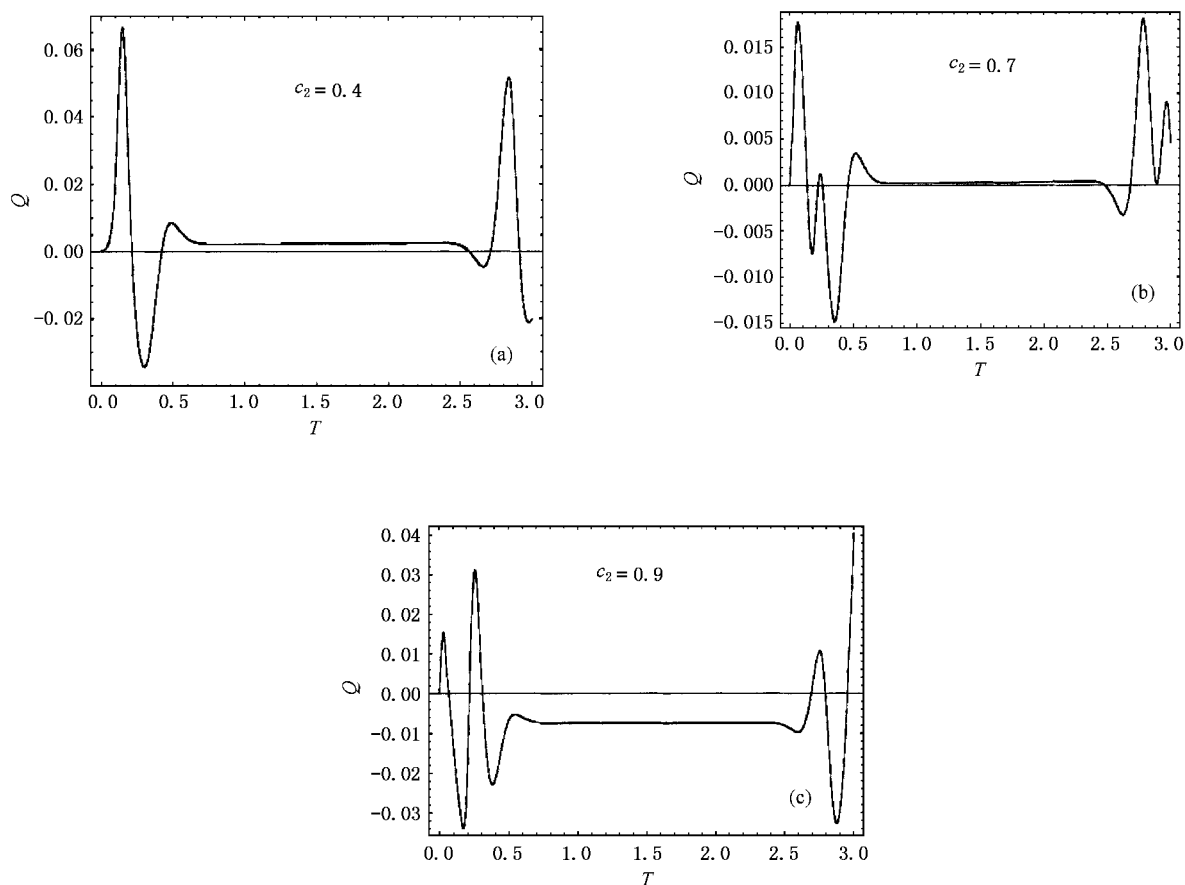


图 6 测得原子 B 处于基态时的 Q 参数 ($\bar{n} = \alpha^2 = 10$)

- [1] Lu H and Guo G C 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 657 (in Chinese) [路 洪、郭光灿 1999 物理学报 48 657]
- [2] Tian Y H, Peng J S, Xu D H and Tao S H 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 1439 (in Chinese) [田永红、彭金生、徐大海、陶少华 1999 物理学报 48 1439]
- [3] Shi M J, Du J F and Zhu D P, 2000 *Acta. Phys. Sin.* **49** 825 (in Chinese) [石名俊、杜江峰、朱栋培 2000 1999 物理学报 49 825]
- [4] Fang M F, Zhou Q P and Zhou P 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 401 (in Chinese) [方卯发、周清平、周 鹏 1999 物理学报 48 401]
- [5] Huang Y X and Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 49 (in Chinese) [黄燕霞、郭光灿 1999 物理学报 48 49]
- [6] Davidovich L *et al* 1996 *Phys. Rev. A* **53** 1295
- [7] Meystre P 1987 *Opt. Lett.* **12** 669
- [8] Krause J *et al* 1987 *Phys. Rev. A* **36** 4547
- [9] Vogel K *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1816
- [10] Guo G C and Zheng S B 1996 *Phys. Lett. A* **223** 332
- [11] Gerry C C and Ghosh H 1997 *Phys. Lett. A* **229** 17
- [12] Ye L 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 244
- [13] Pan Q, Wang H, Zhang Y, Su H, Xie C D and Peng C 1998 *Acta. Phys. Sin.* **47** 1625 (in Chinese) [潘 庆、王 海、张 云、苏 红、谢常德、彭 堃 1998 物理学报 47 1625]
- [14] Peng J S 1998 *Introduction to Modern Quantum Optics* (World Scientific) p319 – 323

Influence of entanglement degree on squeezing and photon antibunching in the two-photon Jaynes-Cummings model^{*}

Zhang Guo-Feng¹⁾²⁾ Jia Xin-Juan¹⁾ Yan Qi-Wei²⁾ Liang Jiu-Qing¹⁾

¹⁾ (*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

²⁾ (*State Key Laboratory of Magnetism, Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*)

(Received 5 December 2002 ; revised manuscript received 23 January 2003)

Abstract

We mainly consider the case that one of the two entangled atoms with two energy levels interacts with a single-mode and double-photon cavity field. The atom is selectively detected after exiting the cavity, and it is found that the nonclassical properties of field states depend strongly on the entanglement degree between the two atoms. Meanwhile, it is proved that the squeezing of the field and the photon antibunching can be greatly enhanced via selective atomic measurements.

Keywords : entanglement degree, Jaynes-Cummings model, squeezing effect, photon antibunching

PACC : 0365, 4250

^{*} Project supported by the National National Science Foundation of China (Grant No.10075032) .