第 52 卷 第 10 期 2003 年 10 月
1000-3290/2003/52(10)/2399-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 52, No. 10, October, 2003

EZ 模型中的有限尺寸效应*

谢彦波 汪秉宏 全宏俊 杨伟松 王卫宁
(中国科学技术大学近代物理系及非线性科学中心,合肥 230026)
(2002 年 8 月 13 日收到;2003 年 1 月 27 日收到修改稿)

研究 EZ 模型中的有限尺寸效应.当经纪人数目 N 足够大及发生交易的概率 $a\ll 1/N$,发现有限尺寸效应是重要的.此时,系统几乎变成包含所有经纪人的单一集团.而对较小集团,尺寸分布仍然服从幂函数律,但是指数因涨落效应而改变.但当 $a\gg 1/N$ 时,可以论证涨落效应不重要,因而平均场理论是严格成立的.

关键词:EZ 模型, 有限尺寸效应, 涨落, 平均场理论
PACC:0520, 0540

1. 引　　言

最近模拟经纪人互相趋同模仿行为和经纪人之间的信息传输现象的 Eguiluz-Zimmermann (EZ) 模型[1]在经济物理学研究领域中引起了相当的关注.这个模型包含 N 经纪人.一个经纪人可以和另外的 N-1 个经纪人相连接.连接性有下列的性质:若 A 和 B 相连且 B 和 C 相连,则 A 和 C 相连.互相相连的经纪人就能够形成一个集团.在初始状态,所有的经纪人并不相连.在每一时步,随机地选取一个经纪人 A.以概率 $a(0<a<1)$,包含 A 的集团的所有经纪人做同一种交易,然后集团被解散,并且所有属于这个集团的经纪人都变成孤单的.以概率 $1-a$,随机选取另外一个经纪人 B,若 A 和 B 不属于同一个集团,则包含 A 的集团和包含 B 的集团中的所有经纪人都相连并合并成一个大集团.若 A 和 B 属于同一个集团,则不发生任何变化而转入下一步.

D′Hulst 和 Rodgers[2]对 EZ 模型采用了平均场分析并且得到了集团尺寸分布解析表达式.他们的解析表达式仅在 $N\gg 1$ 和 $a\gg 1/\sqrt{N}$ 条件下成立.在这两个条件下,单一集团的状态不重要,并且有限尺寸效应也不显著.

我们曾在文献[3]中讨论了 $N\gg 1$ 和 $a\ll 1/N\ln N$ 极限下的 EZ 模型.我们发现此时最重要的状态就是包含所有经纪人的单一集团.处于别的状态的概率很小并且与 a 成正比.但是这些概率的数值很有用.因为它们可以告诉我们系统是怎样由不相连的状态过渡到单一集团的状态.

本文补充文献[3]所给出的推导:将给出 EZ 模型的描述方法及严格方程;讨论 $N\gg 1$ 和 $a\gg 1\sqrt{N}$ 极限情况下的 EZ 模型,从严格方程出发,给出此时平均场近似是成立的自洽论证,并由此推导出 D′Hulst 和 Rodgers 所得到的平均场方程;讨论 $N\gg 1$ 和 $a\ll 1/N\ln N$ 极限情况下的 EZ 模型,简化在此极限下的严格方程并给出严格解;最后给出对于结果的讨论.

2. 严格方程

考虑 N 个经纪人的分割$[l_1, _2, \cdots, l_N]$,这里 l_s 是大小为 s 的集团数目.很显然

$$\sum_{i=1}^{N} il_i = N, \tag{1}$$

N 个经纪人的状态可由处于集团划分$[l_1, l_2, \cdots, l_N]$的概率函数 $P[l_1, l_2, \cdots, l_N]$来描写.不难发现,$P[l_1, l_2, \cdots, l_N]$的时间演化由下式决定:

$$\frac{\mathrm{d}P[l_1, l_2, \cdots, l_N]}{\mathrm{d}t} = -\frac{1-a}{N(N-1)}\Big[\sum_{i=1}^{N} il_i i(l_i-1) + \sum_{i<j} 2il_i jl_j\Big]$$

* 国家重点基础研究发展规划项目(973 计划专项经费)“非线性科学中的前沿问题研究”,国家自然科学基金(批准号:19932020, 19974039, 59876039 和 70271070),中国加拿大大学与工业联合基金(批准号:CCUIPP-NSFC 70142005)资助的课题.

$$\times P[l_1, l_2, \cdots, l_N] + \frac{1-a}{N(N-1)}$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{N} i(l_i+2) i(l_i+1) P[l_1, \cdots, l_i+2, \cdots, l_{2i}-1, \cdots, l_N] \right.$$

$$+ \sum_{i<j} 2i(l_i+1) j(l_j+1)$$

$$\left. \times P[l_1, \cdots, l_i+1, \cdots, l_j+1, \cdots, l_{i+j}-1, \cdots, l_N] \right\}$$

$$- \frac{a}{N}\left\{ \sum_{i=2}^{N} i l_i P[l_1, \cdots, l_N] - i(l_i+1) \right.$$

$$\left. \times P[l_1-i, \cdots, l_i+1, \cdots, l_N] \right\}. \qquad (2)$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{[l_1, \cdots, l_N]} P[l_1, \cdots, l_N] = 0, \qquad (3)$$

可以引进归一化条件

$$\sum_{[l_1, \cdots, l_N]} P[l_1, \cdots, l_N] = 1, \qquad (4)$$

系统的稳态由下列方程给出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P[l_1, \cdots, l_N] = 0, \qquad (5)$$

对小 N，稳态的 $P[l_1, \cdots, l_N]$ 可以通过解一组线性代数方程得到. 当 N 足够大时，直接求解变得十分困难. 为此引入

$$\langle n_1^{m_1} \cdots n_i^{mi} \cdots \rangle = \sum_{l_1, \cdots, l_N} P[l_1, \cdots, l_N] l_1^{m_1} \cdots l_i^{m_i} \cdots, \qquad (6)$$

式中 $m_1, m_i \cdots$，都为非负整数. 利用方程(1)，得到恒等式

$$\sum_{i=1}^{N} i \langle n_i W \rangle = N \langle W \rangle,$$

$$W = n_1^{m_1} n_2^{m_2} \cdots n_N^{m_N}. \qquad (7)$$

在方程(2)两边同时乘以 $l_1^{m_1} \cdots l_i^{m_i} \cdots$，再对配分 $[l_1, \cdots, l_N]$ 求和，在稳态下，我们得到下列严格方程：

$$\frac{1-a}{N-1}\Big[- \sum_{i=1}^{N} i^2 \langle \cdots n_i(n_i-1) n_i^{m_i} \cdots n_{2i}^{m_{2i}} \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} i^2 \langle \cdots n_i(n_i-1)(n_i-2)^{m_i} \cdots (n_{2i}+1)^{m_{2i}} \cdots \rangle$$

$$- \sum_{i<j} 2ij \langle \cdots n_i n_i^{m_i} \cdots n_j n_j^{m_j} \cdots n_{i+j}^{m_{i+j}} \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{i<j} 2ij \langle \cdots n_i(n_i-1)^{m_i} \cdots n_j(n_j-1)^{m_j} \cdots (n_{i+j}+1)^{m_{i+j}} \cdots \rangle \Big]$$

$$+ a\Big[- \sum_{i=2}^{N} i \langle n_1^{m1} \cdots n_i^{m_i+1} \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} i \langle (n_1+i)^{m_1} \cdots n_i(n_i-1)^{m_i} \cdots \rangle \Big]$$

$$= 0. \qquad (8)$$

3. $N \gg 1$ 和 $a \gg 1/\sqrt{N}$ 的情况 平均场理论的自洽性验证

当 i 为有限时，有 $\langle n_i \rangle \sim N \gg 1$. 所以我们假定若 m_i 仅当 i 为有限时不为零，则

$$\langle \cdots n_i^{m_i} \cdots \rangle \sim N^{\sum_i m_i}, \qquad (9)$$

当平均场理论成立时，这个假定也自动成立. (9)式表明当 $N \gg 1$ 时，若 $\sum_i m_i' > \sum_i m_i$，且 m_i, m_i，仅当 i 为有限时不为零，则

$$\langle \cdots n_i^{m_i'} \cdots \rangle \gg \langle \cdots n_i^{m_i} \cdots \rangle. \qquad (10)$$

利用上式，展开(8)式，并设 $1/(N-1) \approx 1/N$，我们得到

$$\frac{1-a}{N-1}\Big[-2 \sum_{i=1}^{N} i^2 m_i \langle \cdots n_i^{m_i+1} \cdots n_{2i}^{m_{2i}} \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} i^2 m_{2i} \langle \cdots n_i^{m_2+2} \cdots n_{2i}^{m_{2i}-1} \cdots \rangle$$

$$- 2 \sum_{i<j} ij \Big(m_i \langle \cdots n_i^{m_i} \cdots n_j^{m_j+1} \cdots n_{i+j}^{m_{i+j}} \cdots \rangle$$

$$+ m_j \langle \cdots n_i^{m_i+1} \cdots n_j^{m_j} \cdots n_{i+j}{}^{m_{i+j}} \cdots \rangle \Big)$$

$$+ 2 \sum_{i<j} ij m_{i+j} \langle \cdots n_i^{m_i+1} \cdots n_j^{m_j+1} \cdots n_{i+j}^{m_{i+j}-1} \cdots \rangle \Big\}$$

$$+ a\Big[- \sum_{i=2}^{N} i m_i \langle n_1^{m_1} \cdots n_i^{m_i} \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{i=2}^{N} i^2 m_1 \langle n_1{}^{m_1-1} \cdots n_i^{m_i+1} \cdots \rangle \Big]$$

$$= 0, \qquad (11)$$

式中 m_i 仅当 i 为有限时不为零. 利用恒等式(7)，上式可进一步简化为

$$\Big[2(1-a) \sum_{i=1}^{N} i m_i + a \sum_{i=2}^{N} i m_i \Big] \langle \cdots n_j^{m_j} \cdots \rangle$$

$$= \frac{1-a}{N} \sum_{s=2}^{N} m_S \sum_{r=1}^{s-1} r(s-r)$$

$$\times \langle \cdots n_r^{m_r+1} \cdots n_{s-r}^{m_{s-r}+1} \cdots n_s^{m_s-1} \cdots \rangle$$

$$+ a \sum_{i=2}^{N} m_1 i^2 \langle n_1^{m_1-1} \cdots n_i^{m_i+1} \cdots \rangle. \qquad (12)$$

我们将证明(12)式对平均场近似是自洽的. 首先取

$m_1=1$，而其他 $m_i=0$，则

$$a\sum_{i=2}^{N} i^2\langle n_i\rangle = 2(1-a)\langle n_1\rangle, \tag{13}$$

又取 $m_s=1$，其他 $m_i=0$，则

$$\frac{1-a}{N}\sum_{r=1}^{s-1}\langle n_r n_{s-r}\rangle = (2-a)s\langle n_s\rangle. \tag{14}$$

在平均场近似下，(14)式又可写成

$$\frac{1-a}{N}\sum_{r=1}^{s-1}\langle n_r\rangle\langle n_{s-r}\rangle = (2-a)s\langle n_s\rangle. \tag{15}$$

(13)和(15)式曾经被 D'Hulst 和 Rodgers 在文献[2]中得到. 它们实际上是平均场近似的结果.

下面将证明对于一般的 m_i，方程(12)在平均场近似是自洽的. 利用平均场近似

$$\langle\cdots n_r^{m_r+1}\cdots n_{s-r}^{m_{s-r}+1}\cdots n_s^{m_s-1}\cdots\rangle \approx \langle n_r n_{s-r}\rangle\langle\cdots n_r^{m_r}\cdots n_{s-r}^{m_{s-r}}\cdots n_s^{m_s-1}\cdots\rangle \tag{16}$$

和

$$\langle n_1^{m_1-1}\cdots n_i^{m_i+1}\cdots\rangle \approx \langle n_i\rangle\langle n_1^{m_1-1}\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle, \tag{17}$$

方程(12)右边第一项变成

$$\begin{aligned}&\frac{1-a}{N}\sum_{S=2}^{N} m_S\langle\cdots n_S^{m_S-1}\cdots\rangle\sum_{r=1}^{s-1} r(s-r)\langle n_r n_{s-r}\rangle\\ &= \sum_{S=2}^{N} m_S s(2-a)\langle\cdots n_S^{m_S-1}\cdots\rangle\langle n_S\rangle\\ &\approx \sum_{S=2}^{N} m_S s(2-a)\langle\cdots n_S^{m_S}\cdots\rangle\\ &= \langle\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle\sum_{S=2}^{N} m_S s(2-a),\end{aligned} \tag{18}$$

方程(12)右边第二项变成

$$\begin{aligned}&a m_1\langle n_1^{m_1-1}\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle\sum_{i=2}^{N} i^2\langle n_i\rangle\\ &= 2(1-a)m_1\langle n_1^{m_1-1}\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle\langle n_1\rangle\\ &\approx 2(1-a)m_1\langle\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle,\end{aligned} \tag{19}$$

所以方程(12)右边在平均场近似下等于

$$\langle\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle\left[\sum_{S=2}^{N} m_S s(2-a) + 2(1-a)m_1\right], \tag{20}$$

这正好等于(12)式的左边. 所以方程(12)在平均场近似下是自洽的.

4. $N\gg1$ 和 $a\ll1/N\ln N$ 极限情况下的公式推导

本节仔细推导文献[3]中的(32)式. 由文献[3]知，当 $a\ll1/N\ln N$ 和 $N\gg1$ 时

$$P[0,0\cdots,1] = 1-A\approx 1, \tag{21}$$

式中

$$A = \sum_{[l_1\cdots l_N]'} P[l_1\cdots l_N],$$

其中记号 $\sum'$ 表示对除开 $[0,\cdots0,1]$ 外的其他所有配分求和.

此时直接从(8)式不难得到当 i 有限时，$\langle n_i\rangle\sim N^2 a$ 以及对于特殊的 $\langle n_N\rangle = 1-A\approx1$. 事实上，当 $M_N=\sum_{i=1}^{N} i m_i$ 不大时，我们有

$$\langle n_1^{m_1}\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle = N^{M+1}a\,\overline{\langle n_1^{m_1}\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle} + o(N^M a), \tag{22}$$

式中 $M=\sum_{i=1}^{N} m_i$，以及 $\overline{\langle n_1^{m_1}\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle}$ 是与 N 和 a 无关的量. 此时，展开(8)式左端的前 4 项，并保留抵消后的最高次项，则这 4 项可写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\Big[&-2\sum_{i=1}^{N} i^2 m_i\langle\cdots n_i^{m_i+1}\cdots\rangle\\ &+\sum_{i=1}^{N} i^2 m_{2i}\langle\cdots n_i^{m_i+2}\cdots n_{2i}^{m_{2i}-1}\cdots\rangle\\ &-2\sum_{i<j} ij\big(m_i\langle\cdots n_i^{m_i}\cdots n_j^{m_j+1}\cdots\rangle\\ &+m_j\langle\cdots n_i^{m_i+1}\cdots n_j^{m_j}\cdots\rangle\big)\\ &+2\sum_{i<j} ij m_{i+j}\langle\cdots n_i^{m_i+1}\cdots n_j^{m_j+1}\cdots n_{i+j}^{m_{i+j}-1}\rangle\Big].\end{aligned} \tag{23}$$

(8)式的第 5 项至少与 a 成正比. 若 $m_1+m_2+\cdots+m_{N-1}\neq0$，则 $\langle n_1^{m_1}\cdots n_i n_i^{m_i}\cdots\rangle$ 必然包含一个 a 因子，所以此时第 5 项与 a^2 成正比，故可以忽略. 若 $m_1=m_2=\cdots=m_{N-1}=0$，则第 5 项可写成

$$\begin{aligned}&-a\sum_{i=2}^{N} i\langle n_i n_N^{m_N}\rangle\delta(m_1)\cdots\delta(m_{N-1})\\ &\approx -aN\langle n_N^{m_N+1}\rangle\delta(m_1)\cdots\delta(m_{N-1})\\ &\approx -aN\delta(m_1)\cdots\delta(m_{N-1}),\end{aligned} \tag{24}$$

(8)式的第 6 项也至少与 a 成正比.

若 $m_2+m_3+\cdots m_N\neq0$，则 $\langle(n_1+i)^{m_1}\cdots n_i(n_i-1)^{m_i}\cdots\rangle$ 也必然包含一个 a 因子，所以第 6 项也与 a^2 成正比，故可以忽略. 若 $m_2=m_3=\cdots=m_N=0$，则第 6 项可写成

$$\begin{aligned}&a\sum_{i=2}^{N} i\langle(n_1+i)^{m_1}\cdots n_i(n_i-1)^{m_i}\cdots\rangle\\ &= aN\langle(n_1+N)^{m_1} n_N\rangle\delta(m_2)\cdots\delta(m_N)\\ &= aN^{m_1+1}\delta(m_2)\cdots\delta(m_N),\end{aligned} \tag{25}$$

所以第 5 和第 6 项可合写成

$$
aN^{m_1+1}\delta(m_2)\cdots\delta(m_N)
- aN\delta(m_1)\cdots\delta(m_{N-1}), \tag{26}
$$

但我们仅讨论 $m_1 + m_2 + \cdots + m_{N-1} \neq 0$ 的情况,所以第 5 项可以略掉.利用恒等式(7),(23)式的前 4 项可进一步简化.最后我们得到

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{N} im_i\langle\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle \\
&= \frac{1}{N}\sum_{S=2}^{N} m_s \sum_{r=1}^{s-1} r(s-r) \\
&\quad\times\langle\cdots n_r^{m_r+1}\cdots n_{s-r}^{m_{s-r}+1}\cdots n_s^{m_s-1}\cdots\rangle \\
&\quad + aN^{m_1+1}\delta(m_2)\cdots\delta(m_N),
\end{aligned} \tag{27}
$$

将(22)式代入,我们即得到

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i=1}^{N} im_i\overline{\langle\cdots n_i^{m_i}\cdots\rangle} = \sum_{s=2}^{N} m_s \sum_{r=1}^{s-1} r(s-r) \\
&\times\overline{\langle\cdots n_r^{m_r+1}\cdots n_{s-r}^{m_{s-r}+1}\cdots n_s^{m_s-1}\cdots\rangle} \\
&+ \delta(m_2)\cdots\delta(m_N),
\end{aligned} \tag{28}
$$

这就是文献[3]中的(32)式.

5. 讨 论

在第 3 节自洽地验证了当 $N\gg1$ 和 $a\gg1/\sqrt{N}$时,平均场近似的正确性.读者也许会问:为什么在文献[3]中,我们对 $N\gg1$ 及 $a\ll1/N\ln N$ 这一特殊情况的 EZ 模型感兴趣?以下是对于这一问题的解释.

在原来的 EZ 模型中,曾假定在概率 a 下,随机地选取某个经纪人 A,并且让和 A 在一个集团内的所有经纪人做同一种交易,然后这个集团自动分解,其所有经纪人重新变成孤立的.但对于模型稍作修改,就可得到等效于 $a\to0$ 的 EZ 模型.事实上,若我们假定在概率 a 下,首先随机地选取某个经纪人 A,然后让和 A 在同一个集团内的所有经纪人做同一种交易,然而这一集团并不分解,而是继续执行下一步操作.很显然,这个新模型有着特殊的意义,并且它等效于原来的 EZ 模型,只不过有效的 $a\to0$.所以研究 EZ 模型在 $a\to0$ 极限下是很有意义的.

[1] Eguiluz V M and Zimmermann M G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5659

[2] D'Hulst R and Rodgers G J 2001 *Euro. Phys. J.* B **20** 619

[3] Xie Y B, Wang B H, Quan H J, Yang W S and Hui P M 2001 *Phys. Rev.* E **65** 046130

Finite size effect in EZ model*

Xie Yan-Bo Wang Bing-Hong Quan Hong-Jun Yang Wei-Song Wang Wei-Ning

(*Department of Modern Physics and Nonlinear Science Centre*, *University of Science and Technology of China*, *Hefei* 230026, *China*)

(Received 13 August 2002; revised manuscript received 27 January 2003)

Abstract

The finite size effect in the Eguiluz-Zimmermann (EZ) model is studied. It is found that the finite size effect is very important if the number of the agents N is large enough and the probability of trading among the agents is small enough: $a \ll 1/N$. In this case, the model becomes almost a big single cluster system that includes almost all the agents. For the small clusters, the size distribution can still satisfy a power law. However, the exponent will change due to the fluctuation effect. For $a \gg 1/N$, it can be proved that the fluctuation effect is not important, hence the mean field theory is correct.

Keywords: EZ model, finite size effect, fluctuation, mean field theory

PACC: 0520, 0540

* Project supported by the State Key Development Program of Basic Research for "the Frontier Problems of Nonlinear Science" of China, by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19932020, 19974039, 59876039 and 70271070), and by the China-Canada University Industry Partnership Program (CCUIPP – NSFC 70142005).