

利用随机共振在强噪声下提取信息信号*

祝恒江¹⁾ 李 蓉^{2)†} 温孝东²⁾

¹⁾ 新疆师范大学数理信息学院, 乌鲁木齐 830054)

²⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2003 年 3 月 19 日收到, 2003 年 4 月 14 日收到修改稿)

已有利用随机共振在强噪声下提取单一频率信号的若干报道, 但单一频率信号所携带的信息量为零. 本实验研究表明: 在调幅波和白噪声的协同作用下, 非线性双稳系统的输出不仅可以呈现随机共振现象, 而且经检波、滤波后能提取出调制信号(信息信号); 与直接经电子学系统检波、线性滤波后所提取的调制信号相比, 前者所获调制信号的信噪比更高. 给出了绝热近似条件下, 调制信号信噪比的解析表达式.

关键词: 随机共振, 信噪比, 调制信号, 噪声

PACC: 0540, 0590, 0690

1. 引 言

近 20 年来, 随机共振现象引起人们的普遍关注和浓厚兴趣. 作为非线性问题的前沿课题之一, 随机共振研究在理论和实验上都取得了较大进展. 在应用方面, 焦点是利用随机共振在强噪声下提取信号, 并提高所输出信号的信噪比, 找到一种优于线性滤波器的信噪分离方法, 实现在强噪声下准确提取弱信号之目的. 长期以来, 人们对周期力和白噪声驱动的非线性双稳系统

$$\dot{x} = x - x^3 + S(t) + I(t),$$

$$I(t) = 0; I(t)I(t') = 2D\delta(t - t') \quad (1)$$

(其中 $S(t) = A \cos \omega t$) 进行了较为全面的理论和实验的研究. 理论研究预言^[1-3], 并通过实验^[4]证实 (1) 式所描述的系统其输出信号存在随机共振现象, 且发现随机共振具有能量由噪声部分向信号部分转移的机理和抑制噪声的作用^[2,5], 因而能够利用随机共振从强噪声抑制下提取信号 $S(t)$. 信噪比是用于表征信号质量的重要特征量, 信号的信噪比越大, 从中获取准确信息的程度就越高. 电子学在这方面已取得重大结果, 并获得广泛应用. 其基本方法是用线性滤波器从噪声和信号的混杂系统中滤去噪声取出信号. 随机共振研究其有价值的结果是: 随机共振能

提取信号, 并能在相同输入信噪比的前提下比线性滤波器有较高的输出信噪比. 但研究发现 (1) 式所描述的系统即使在随机共振的最佳情况下, 系统的输出信噪比仍然小于线性滤波器的输出信噪比. 至此, 随机共振应用研究呈现出两个令人不悦的结果: 一是 (1) 式系统提取的是单一频率信号 $S(t)$, 而信息的传输, 单一频率信号所携带的信息量是零. 二是 (1) 式系统的输出中信号 $S(t)$ 的信噪比小于线性滤波器的输出信噪比. 因而大大削弱了随机共振理论的应用潜力.

本文设计一个模拟 (1) 式的实验, 目的在于探求利用随机共振在强噪声下提取信息信号的可能性. 遵从电子学关于信息信号发送和接收的模式, 将被传送的信息信号(低频调制信号)对高频载波进行调制, 得一载有信息信号的调幅波, 将该调幅波和噪声视为非线性双稳系统的输入, 即将 (1) 式中的单一频率信号用调幅波取代, 再对非线性双稳系统的输出进行检波、滤波后重新提取出被传送的低频调制信号. 这里问题的关键是: 由非线性系统的输出能否提取被传送的低频调制信号; 若能提取, 其信噪比能否高于线性滤波器的输出信噪比. 为了与线性滤波器相对比, 实验中还将相同的调幅波和噪声经加法器相加后, 再经相同的检波、滤波, 获得线性滤波器输出的调制信号及其信噪比.

* 国家自然科学基金(批准号: 10175010)资助的课题.

† 通信作者.

我们设计的模拟实验表明,在随机共振的条件下,由非线性双稳系统的输出能提取被传送的信息信号,并且其信噪比高于线性滤波器输出的信噪比.这是一个有价值的结果,它可能为信息处理提供一个新的途径.

2. 原理与实验操作系统

实验方框图如图 1 所示.其中, F_B 产生一个低频余弦波 $S'(t) = B_m \cos 2\pi f_m t$, 振幅 B_m 和频率 f_m 可自由调节, F_A 的功能有两个,一是产生一个振幅为 A 频率为 f_c 的高频载波 $A \cos 2\pi f_c t$, 二是将输入信号 $S'(t)$ 对 $A \cos 2\pi f_c t$ 进行幅度调制, 输出一个载有信息信号的调幅波

$$S(t) = A(1 - B \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t,$$

式中 $B = B_m/A$ 称为调制强度, $B \leq 1$, 改变 B_m 即可改变调制强度. F_N 为噪声发生器, 产生一个强度可调的白噪声 $H(t)$. $S(t)$ 和 $H(t)$ 经加法器 F_+ 输出 $I(t) = A(1 - B \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t + H(t)$. 随机共振装置(SRD)由模拟电路组成^[5], $I(t)$ 为 SRD 的输入, $x(t)$ 为 SRD 在 $I(t)$ 作用下的输出. 这时 (1) 式成为

$$\dot{x} = x - x^3 + A(1 - B \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t + H(t). \quad (2)$$

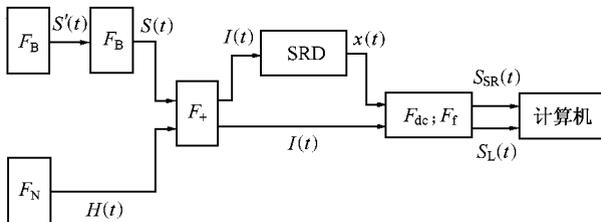


图 1 实验方框图, 图中 $I(t) = A(1 - B \cos 2\pi f_m t) \cos 2\pi f_c t + H(t)$

沿用电子学方法, 为从随机共振的输出 $x(t)$ 取得被传送的调制信号 $S'(t)$, 需对 $x(t)$ 进行检波和线性滤波. F_{dc} 为检波、滤波装置. F_f 为八阶滤波器装置, 其作用有两个, 一是从检波装置所得的信号中滤掉高频载波分离出信息信号 $S'(t)$; 二是滤掉高频噪声, 消除进行计算机快速傅里叶变换(FFT)过程中可能产生的 Aliasing 效应. 这样, 从 F_f 输出的是经过 SRD 和电子学检波、滤波所获得的信息信号 $S_{SR}(t)$ 和与其相近频率的背底噪声. 再将它们送入计算机接口板上的模数转换电路进行数字化, 即把连续变化的电压变量转换为离散的数据. 再将它们输入计

算机, 利用相应的程序进行快速傅里叶变换(FFT)求得输出功率谱, 并测量出信息信号 $S_{SR}(t)$ 的值和其信噪比^[5] R_{SR} , $R_{SR} = S_{SR}/N$. S_{SR} 和 N 分别为功率谱中信息信号频率 f_m 处的信号幅值和背底噪声强度. 实验过程举例如下, 给定载波频率 $f_c = 800\text{Hz}$, 输送的调制(信息)信号频率 $f_m = 30\text{Hz}$. 调节载波幅度 $A = 0.130\text{V}$, 这时模拟系统 SRD 的输出 $x(t)$ 不时的在其两个稳态之间跳跃. 给定一个调制强度, 如 $B = 0.6$, 将噪声强度 H 从零开始逐渐增大, 使 $x(t)$ 在两个稳态之间的跳跃逐步地由不完全趋于完全. 此时, 几乎每一个载波周期内, $x(t)$ 都进行周期近似为 $T_c = 1/f_c$ 的跳跃. 增大 H , 在某一区段的 H 强度范围, 每一载波周期都会出现在两个稳态之间的相近周期的跳跃. 在 H 过大的情况下, 跳跃则是完全随机的. 实验时, 测出不同 H 值时 SRD 输出的信息信号 $S_{SR}(t)$ 和其信噪比 R_{SR} . 我们发现, 在 $H = 0.5\text{V}$ 附近 SRD 给出信息信号 $S_{SR}(t)$ 的信噪比 R_{SR} 有一个峰值, 并获得一个完整的 $R_{SR}-H$ 随机共振曲线(参见图 2).

我们已经获得一个良好的结果, 即通过模拟电子线路组成的随机共振 SRD 装置(加检波、滤波), 我们能够从强噪声中提取调幅波所载的信息信号, 并有明显的随机共振效应. 我们最好的期望是从 SRD 所获得信息信号的信噪比 R_{SR} 比该调幅波加强噪声直接经电子学系统检波、滤波所获得的信息信号的信噪比 R_L 要高. 为此, 在图 1 的下半部, 我们将从 F_+ 输出的调幅波和噪声组成的 $I(t)$ (不经过 SRD) 直接输入到 F_{dc} 进行检波、滤波, 并经 F_f 滤掉高频载波和噪声, 消除进行快速 FFT 变换中可能的 Aliasing 效应后, 送入计算机进行快速傅里叶变换, 获得直接经电子学系统检波、线性滤波后的信息信号 $S_L(t)$ 和信噪比 R_L , $R_L = S_L/N$. S_L 和 N 分别为相应功率谱中频率为 f_m 处信号幅值和背底噪声强度. 整个实验过程中, $A = 0.13\text{V}$; $B = 0.6$; $f_c = 800\text{Hz}$; $f_m = 30\text{Hz}$, 改变的只是噪声强度 $H(t)$. 我们得到检波、线性滤波条件下的 R_L-H 曲线. 它是一个随 H 增大而单调下降的曲线, 如图 2 中的 R_L-H 曲线.

振幅调制信号 $S'(t)$, 在相同的 A, B, f_c 和 f_m 前提下, 对每一个 H 都有一个 SRD 输出的信噪比 R_{SR} 和电子学系统检波、线性滤波输出的信噪比 R_L , 定义

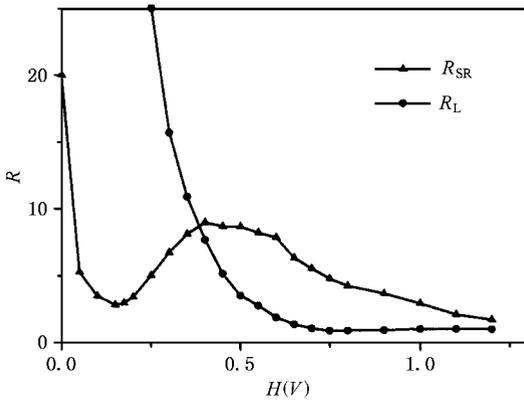


图2 R_{SR} - H 曲线和 R_L - H 曲线. $A = 0.130V$; $B = 0.6$; $f_c = 800Hz$; $f_m = 30Hz$

$$G = \frac{R_{SR}}{R_L} \quad (3)$$

G 量度了 $K(t)$ 由 SRD 的输出经检波、滤波后所得的信噪比与 $K(t)$ 由电子学系统检波、线性滤波输出的信噪比相比提高的程度.

3. 调制信号的随机共振

图 2 给出了 $B = 0.6$; $f_c = 800Hz$ 和 $f_m = 30Hz$ 时随机共振输出信噪比 R_{SR} 和线性滤波输出信噪比 R_L 随噪声强度 H 变化的响应曲线, 即 R_{SR} - H 曲线和 R_L - H 曲线. 它们的显著特点是: R_{SR} - H 曲线有一个共振峰, 且在一定的噪声强度范围内, 曲线 R_{SR} - H 在曲线 R_L - H 的上方, 即在该噪声强度范围内 $G > 1$ 或者说 $R_{SR} > R_L$. 这是我们最希望获得的结果. 这将意味着有可能利用随机共振效应, 设计、制作一种优于已有电子学系统滤波器器的新装置, 它可以在强噪声下更为准确地提取弱信息信号.

图 3 给出了 B 和 f_m 对振幅调制信号随机共振行为的影响. 首先讨论不同调制强度 B 对随机共振行为的影响. 图 3(a) 示出 $f_m = 30Hz$ 时 $B = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ 的 G - H 曲线. 由图可知, G - H 曲线具有类似的共振形态, 存在峰值 G_m ^[6]. 而且, 随着 B 的增大, 与峰值 G_m 对应的噪声强度 H_m 是单调增加的. 当 B 较大时, G_m 将趋于一个有限值, $G_m \approx 6$, 或 $R_{SR} \approx 6R_L$. 而当 $B \rightarrow 0$ 时, 有 $G_m \rightarrow 1$ 或 $R_{SR} \approx R_L$ (图中未显示) 即此时 SRD 的输出将趋于周期驱动力为单一频率余弦波 $A \cos 2\pi f_c t$ 时方程 (1) 的输出, 这显然是合理的^[7]. 另外, G - H 曲线的另一个特点是, 对不同

的 B 值, 当 H 较大时, 均有 $G \rightarrow 1$. 图 3(b) 讨论了确定的 B 值不同的调制信号频率 f_m 的 G - H 曲线. 如图所示, 对确定的 B , G - H 响应曲线也具有类似的共振形态, 存在峰值 G_m . 与调制强度 B 的影响不同的是, 随着 f_m 的增大, 与 G_m 对应的噪声强度 H_m 不是增大反而减小, 且随着 f_m (或 $m = \frac{f_m}{f_c}$) 的增大, G_m 是单调下降的. 随着 f_m 的增大, 当 $f_m \rightarrow f_c$ 时, G_m 下降地非常迅速, 且有 $G_m \leq 1$. 同样, 对不同的 f_m , 当 H 较大时, 也均有 $G \rightarrow 1$. 令我们感到满意的是, 在 m 的一定取值范围内, SRD 的输出信噪比 R_{SR} 远大于其经电子学系统检波、滤波的输出信噪比 R_L . 例如 $m \leq \frac{1}{20}$ 时, 有 $G > 5$. 它基本满足了实际应用的需要. 因为, 一般无线电信号传输中, 此值约为 $\frac{1}{20} > m > \frac{1}{100}$. 这一结果, 将对设计、制作一种在强噪声下准确提取调幅弱信号的新装置提供有力支持.

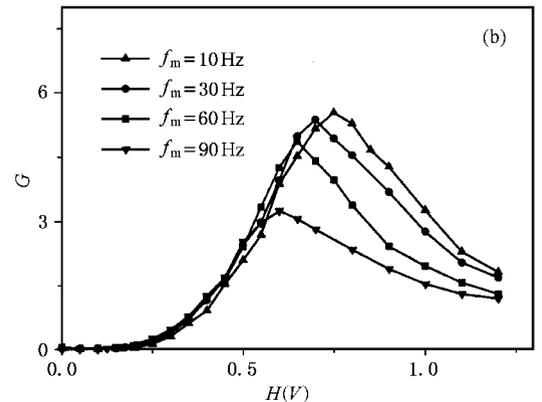
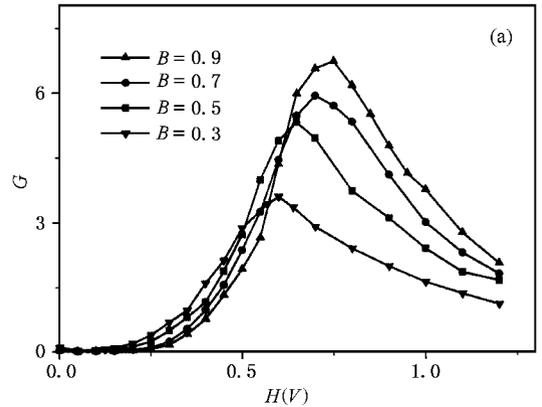


图3 G - H 曲线. $f_c = 800Hz$, $A = 0.130V$. (a) $f_m = 30Hz$; $B = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$. (b) $B = 0.6$; $f_m = 10Hz, 30Hz, 60Hz, 90Hz$

4. 理论分析简述

理论上,当 $S(t) = A(1 - B\cos\Omega t)\cos\omega t$, $\Omega < \omega$ 时,无量纲化的方程(1)可改写为动力学随机变量 $x(t)$ 的概率分布函数 $P(x, t)$ 所遵循的 Fokker-Plank 方程(FPE)

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \{ (x - x^3 - A(1 - B\cos\Omega t)\cos\omega t) \times P(x, t) \} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4)$$

其中 Ω 和 ω 分别为无量纲化的调制信号和载波信号频率.在研究随机共振现象的各种统计性质时,往往侧重于分析方程(4)的解的性质.其中,人们最感兴趣的是随机变量 $x(t)$ 的自关联函数和功率谱密度.当输入信号和白噪声强度都较小时,在绝热近似条件下,即

$$A \ll 1; D \ll 1; \omega \ll 1. \quad (5)$$

有振幅调制信号 $S(t)$ 的信噪比为

$$\bar{R} = \frac{\alpha_0^4 A^4 B^2 \pi}{4D^4} \left[1 - \frac{\alpha_0^2 A^2}{2(\alpha_0^2 + \omega^2)D^2} - \frac{\alpha_0^2 A^2 B^2}{8(\alpha_0^2 + (\omega - \Omega)^2)D^2} - \frac{\alpha_0^2 A^2 B^2}{8(\alpha_0^2 + (\omega + \Omega)^2)D^2} - \frac{\alpha_0^2 A^4 B^2}{2(\alpha_0^2 + \Omega^2)D^4} - \dots \right]^{-1}, \quad (6)$$

其中 $\alpha_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-u_0/D}$. 当 $A \ll 1$ 时,上式可近似表示为

$$\bar{R} = \frac{\sqrt{2}A^4 B^2}{4D^4} e^{-u_0/D}, \quad (7)$$

其中 $U_0 = 1/4$ 是双稳系统的势垒, $\bar{R} \propto R_{SR}^2$. 如图 4 所示, $\bar{R}-D$ 曲线在值 D_m 处有一个峰值 \bar{R}_m . 由此可见,调制信号的随机共振现象是完全可以被绝热近似理论所预言.另外,从图 4 也可以清楚地看到,理论结果比较好地反应了 B 和 $\Omega(f_m)$ 对调制信号输出信噪比的影响.例如 B 越大,相应 \bar{R} 的峰值 \bar{R}_m 就越大(参见图 4(a)). m 越大,相应 \bar{R} 的峰值 \bar{R}_m 就较小(参见图 4(b)).不过,相比之下, B 对调制信号输出信噪比的影响显然要比 $\Omega(f_m)$ 对调制信号输出信噪比的影响大的多,这是与实验结果不完全相同的.另外,同实验结果相比,理论结果还有一些十分不同的具体特征.主要表现在:

1) 当 $D \rightarrow 0$ 时,理论结果显然是错误的.因为,当 $D \rightarrow 0$ 时,即在白噪声的情况下,输出信噪比应趋于无穷.而(6)式的结果却趋于零(参见图 4).

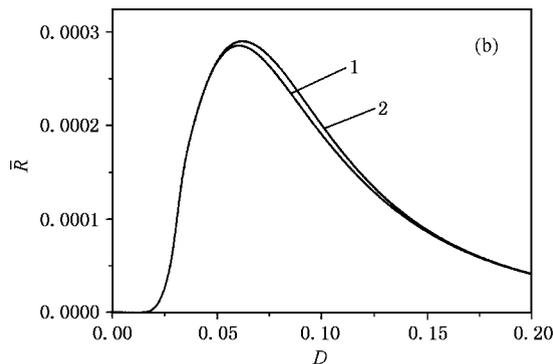
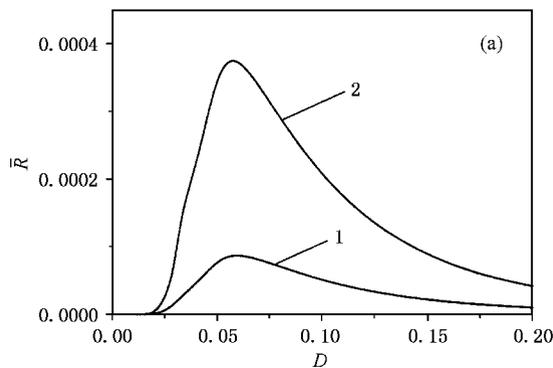


图 4 $\bar{R}-D$ 曲线. $A = 0.04$. (a) $\omega = 0.02; \Omega = 0.0001; B = 0.3$ (曲线 1) 0.6 (曲线 2). (b) $\omega = 0.2; B = 0.6; \Omega = 0.01$ (曲线 1), 0.0001 (曲线 2)

2) 对不同的 B 值, \bar{R} 在同一噪声强度处出现峰值,即 \bar{R} 的峰位与 B 的大小无关(参见图 4(a)). 而实验结果则表明 $R_{SR}(\bar{R})$ 的峰位与 B 的大小有关. B 越大, $H_m(D_m)$ 也越大(参见图 3(a)).

由于理论结果的推导与分析需较大篇幅,我们将另文报道.

5. 结 论

现代电子学领域中,如通信、控制、广播、遥控遥感及各种电子系统,都普遍存在处理微弱信号和噪声问题.以通信系统为例,限制通信距离的不是信号电平的微弱程度,而是噪声干扰程度.对于高质量的信号传输和处理,噪声是影响信号质量的重要因素.因此,如何应对噪声是现代电子学面临的重要问题之一.其中,从系统上研究降噪方法,以及从理论和实验上研究如何在强噪声下准确提取弱信号是诸多问题中的两个主要方面.通常噪声往往被视为是消极的东西,它产生杂乱的运动,破坏序,破坏功能,抹

去相和相之间的差别.因此,传统上往往采用降低输入噪声的方法和线性滤波来提取微弱信号(线性放大器将信号和背底噪声同时放大,并不能改变信噪比).本文采用完全非传统的方法,从利用噪声这一极富创新思想的角度出发,通过随机共振实现能量由噪声向信号的转移,即无序到有序的转变,进而实现在强噪声下准确提取弱信号之目的.研究结果表明,利用随机共振不仅可以在强噪声下准确提取振

幅调制信号,而且更为重要的是在一定的噪声强度范围内,振幅调制信号的输出信噪比远大于直接经电子学系统检波、线性滤波的输出信噪比.这一结果的重要意义在于:它提供了一种新的、完全非传统的在强噪声下准确提取微弱信号的有效方法,使人们从积极的角度重新认识噪声、利用噪声.

感谢张彼德教授提供的调幅设备的技术支持.

- [1] Benzi R , Sutura A and Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** 453
 [2] Gong D C , Qin G. R , Hu G and Wen X D 1991 *Phys. Lett. A* **159** 147
 [3] Hu G , Nicolis G and Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
 [4] Menamara B and Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [5] Qin G R , Gong D C , Hu G and Wen X D 1992 *Acta. Phys. Sin.*

41 360 (in Chinese] 秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]

- [6] Li R , Hu G , Yang C Y , Wen X D , Qin G R and Zhu H J 1995 *Phys. Rev. E* **51** 3964
 [7] Li R , Qin G R , Hu G , Wen X D and Zhu H J 1995 *Commun. Theor. Phys.* **24** 19

Extracting information signal under noise by stochastic resonance *

Zhu Heng-Jiang¹⁾ Li Rong²⁾ Wen Xiao-Dong²⁾

¹⁾*Institute of Maths-Physics and Information , Xinjiang Normal University , Urumqi 830054 , China)*

²⁾*Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China)*

(Received 19 March 2003 ; revised manuscript received 14 April 2003)

Abstract

There are many reports on extracting the single frequency signal under noise by the stochastic resonance , but in which the information that the signal carries is zero. The experimental investigation in this paper manifests , when it is driven by an amplitude modulation wave and white noise , not only that the output of nonlinear bistable system exhibits the stochastic resonance phenomenon , but also that the modulation signal(information signal) can be extracted from the output by detecting and filtering. As compared with that from the electronics system by detecting and filtering direct the signal-to-noise(SNR) of modulation signal from the nonlinear bistable system is higher. Under the condition of adiabatic approximation the analytical formulation of the SNR of modulation signal is provided.

Keywords : stochastic , signal-to-noise , modulated signal , noise

PACC : 0540 , 0590 , 0690