第 52 卷 第 10 期 2003 年 10 月
1000-3290/2003/52(10)/2409-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.10,October,2003

细胞神经网络的动力学行为*

王宏霞 何 晨
(上海交通大学电子工程系,上海 200030)

(2002 年 11 月 4 日收到;2003 年 1 月 27 日收到修改稿)

主要研究了细胞神经网络的动力学行为,通过调节系统的联接权参数来控制网络的动态特性.研究结果表明,网络吸引子的结构可敏感地依赖于某个参数的变化,在很大的参数范围内,细胞神经网络模型具有混沌吸引子.

关键词:细胞神经网络,动力学,混沌
PACC:0545

1.引 言

细胞神经网络(CNN)理论及其应用是由 Chua 等[1]于 1988 年首先提出的,由于其规则的结构和局部的连接性质而易于超大规模集成电路(VLSI)实现,故 CNN 具有广泛的应用前景.目前,CNN 作为一种灵活而有效的神经网络模型在图像处理、模式识别、控制、保密通信、物理学等领域的应用得到很多学者的关注.CNN 的应用在很大程度上取决于其动力学行为,如在图像处理、模式识别和控制中的应用往往需要网络收敛于稳定的平衡点[2—5],在保密通信和物理学中的应用往往需要网络具有混沌吸引子或极限环解[6—10],因此,CNN 的动态行为的研究具有重要意义.本文通过调节三阶 CNN 网络系统的联接权参数,实现了网络系统动态特性的全面控制,给出了 CNN 呈现不同动力学行为时的参数范围,从而便于网络模型的应用.

2.动力系统的描述

设动力系统由下式描述:

$$\dot{x} = f(x, C), \tag{1}$$

式中 $x \in R^n$,$n \geqslant 3$.它的混沌吸引子可分为两类:双曲吸引子和与其类似的吸引子,例如根据 Lorenz 模型的数值结果构造的 Lorenz 类型吸引子;准吸引子.第二类吸引子由于在实际中有广泛的应用价值而非常重要.这种吸引子在许多模型中可以看到,包括 Logistic 映象、Henon 映象、Lorenz 系统,Duffing 方程以及 Chua 电路等.准吸引子的意思是指一个极限集合,它包含不同类型的周期轨道,其中结构不稳定同宿 Poincare 轨道可以是非传递的.在具有准吸引子的系统中,(1)式或与之接近的系统,存在结构不稳定轨道,意味着吸引子的结构敏感地依赖于参数 C 的任何一个小的改变,利用这个性质,我们可以仅稍微改变系统的一个参数,就能够控制系统的动力学行为.

本文研究如下三阶 CNN 动态模型:

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = -x_j + a_j f(x_j) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{3} a_{jk} f(x_k) + \sum_{k=1}^{3} S_{jk} x_k + I_j \quad (j = 1,2,3), \tag{2}$$

这里 x_j 是状态变量,$f(x_1)$,$f(x_2)$和 $f(x_3)$是相应的输出,满足如下公式:

$$f(x_j) = \frac{1}{2}(|x_j + 1| - |x_j - 1|), \tag{3}$$

如果令 $a_{\substack{jk \\ j,k=1,2,3(j\neq k)}} = 0$;$S_{13} = S_{31} = S_{22} = a_2 = a_3 = 0$;$I_{j=1,2,3} = 0$;$S_{21} = S_{23} = 1$,则系统(2)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = -x_1 + a_1 f(x_1) + S_{11} x_1 + S_{12} x_2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -x_2 + x_1 + x_3, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = -x_3 + S_{32} x_2 + S_{33} x_3. \end{cases} \tag{4}$$

* 国家高技术研究发展计划项目(批准号:2002AA144110),国家自然科学基金(批准号:60272082)和中国博士后科学基金(批准号:2003033304)资助的课题.

3. CNN 动力学行为研究

3.1. 线性子系统稳定时参数的调节对动力学行为的影响

如果把 CNN 网络系统(4)的参数设置为 $S_{33}=0$，$a_1=-3.6805$，$S_{11}=-0.2179$，$S_{12}=8.342$ 和 $S_{32}=-11.925$，用步长 $h=0.005$ 的四阶 Runge-Kutta 算法求解方程组(4)，其中初始值取 $x_1(0)=0.1$，$x_2(0)=x_3(0)=0.2$，得到 x_1-x_2 和 x_1-x_3 平面上的相图如图 1(a)和(b)所示，可以看出这时的 CNN 的动态特性表现为解轨迹收敛于稳定平衡点. 计算其线性子系统的系数矩阵

$$A_{\rm linear}^{1}=\begin{bmatrix} S_{11}-1 & S_{12} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & S_{32} & -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

的三个特征根分别为 -1.6689，$-0.7745+1.9580\mathrm{i}$，$-0.7745-1.9580\mathrm{i}$，其实部均为负值，此时运动轨迹趋于稳定.

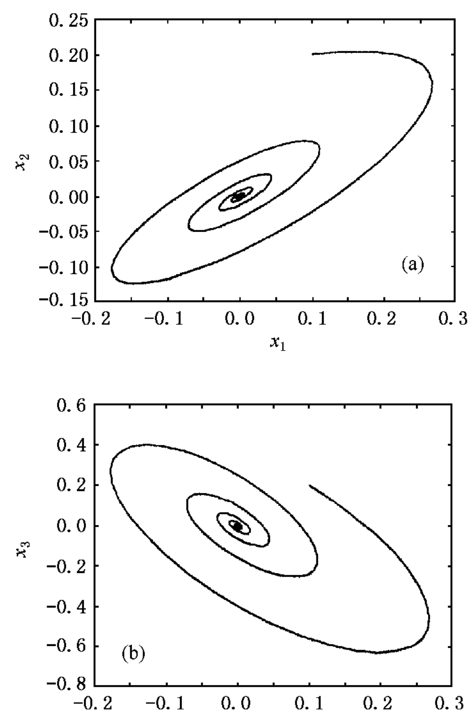


图 1 $S_{33}=0$ 时，三阶 CNN 产生的稳定平衡点

保持参数 S_{33}，S_{11}，S_{12} 和 S_{32} 的值不变，只调节非线性扰动部分的联接权参数 a_1 的值，观察系统的运动轨迹. 取 $a_1=100$，系统的运动轨迹如图 2 所示，从图中可以看出系统的运动轨迹仍趋于稳定. 取不同的 a_1 值，经过多次实验，发现系统的运动轨迹均保持稳定，这说明了在 CNN 的线性子系统的系数矩阵 $A_{\rm linear}^{1}$ 的特征值的实部都为负数时，非线性扰动部分的联接权参数 a_1 值的调节，基本上不影响 CNN 网络系统的动态特性的性质，即稳定的系统对扰动参数的变化影响不敏感.

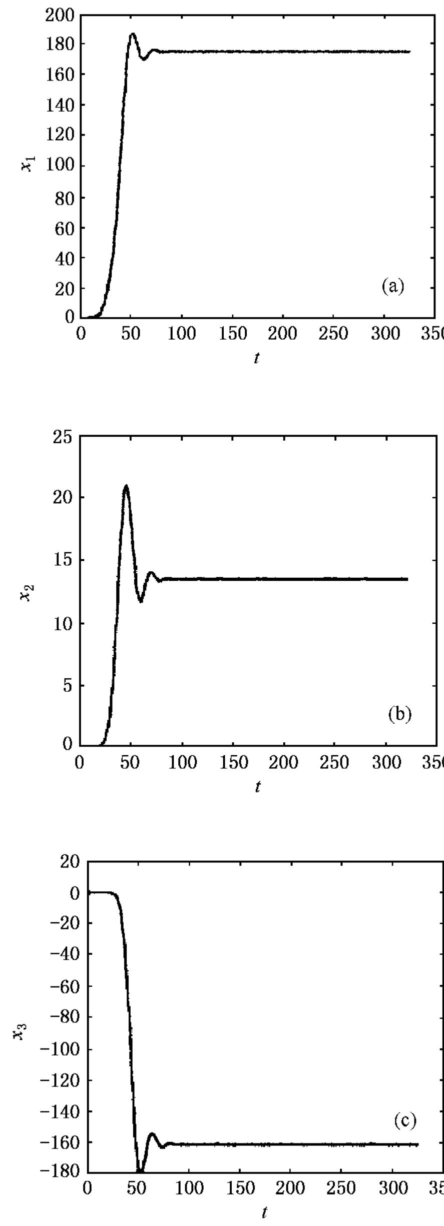


图 2 $a_1=100$ 时，三阶 CNN 仍保持稳定的运动轨迹

3.2. 线性子系统不稳定时参数的调节对动力学行为的影响

如果把 CNN 网络系统(4)的参数设置为 $S_{33}=$

1，a_1，S_{11}，S_{12}和 S_{32}的值不变，计算其线性子系统的系数矩阵

$$A_{\mathrm{linear}}^{2}=\begin{bmatrix} S_{11}-1 & S_{12} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

的三个特征根分别为 -2.5593，$0.1707+2.3760\mathrm{i}$，$0.1707-2.3760\mathrm{i}$，含有实部为正的特征根，此时运动轨迹不稳定.图 3 是系统三个分量的运动轨迹，可以看出 x_1，x_2，x_3 的运动轨迹均为不稳定的.

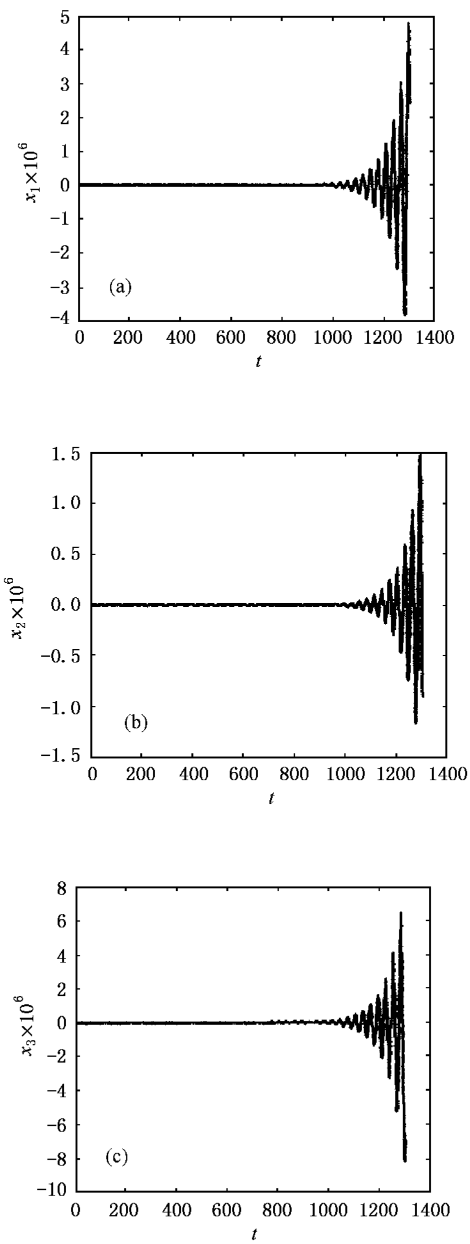


图 3　$S_{33}=1$ 时，三阶 CNN 变为不稳定的运动轨迹

在网络系统不稳定时，保持参数 S_{33}，S_{11}，S_{12}和 S_{32}的值不变，只调节非线性扰动部分的联接权参数 a_1 的值，观察系统的运动轨迹.取 $a_1=100$，系统的运动轨迹如图 4 所示，从图中可以看出系统的运动轨迹变为混沌吸引子，这与稳定的子系统改变 a_1 值时给系统的动态特性所带来的影响是截然不同的.当取 $a_1>100$ 时，网络系统一直呈现类似图 4 所示的对称双涡旋混沌吸引子.下面取更多的 a_1 值，研究系统的动态特性，其中初始点均取(0.1，0.2，0.2).经计算机仿真，各个 a_1 值所对应的动力学行为如图 5 所示.

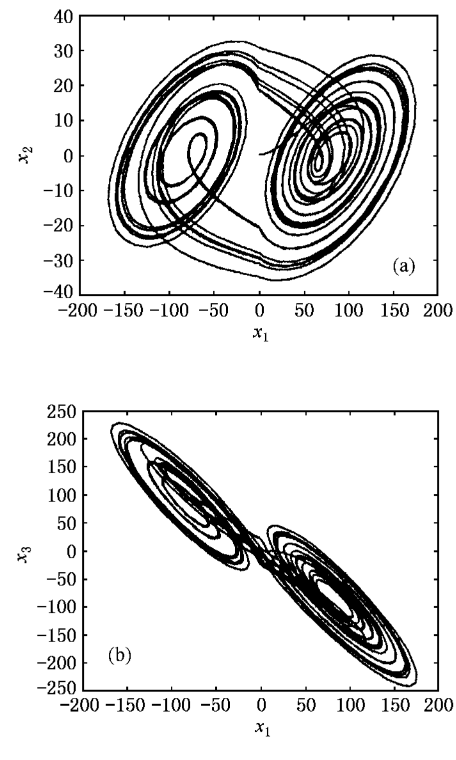
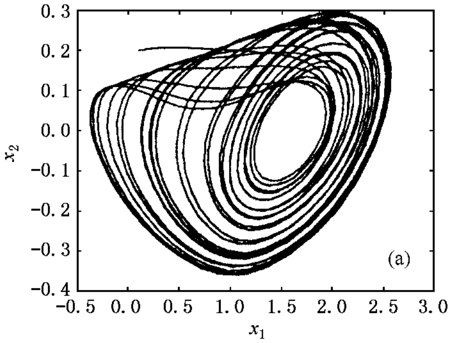
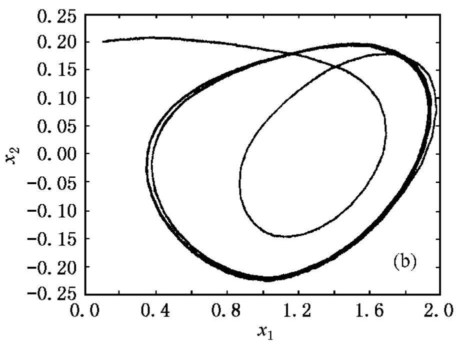


图 4　$a_1=100$ 时，动态特性由不稳定转变为混沌吸引子

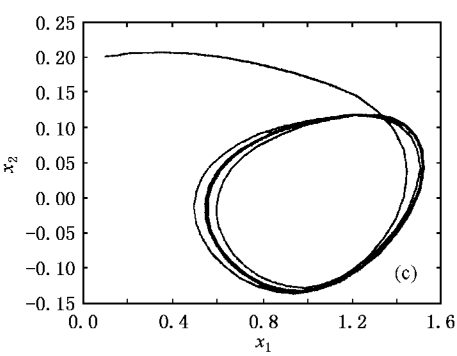
从以上计算机仿真结果来看，只对非线性扰动部分的联接权参数 a_1 值进行了调节，三阶 CNN 网络系统就会呈现丰富的动力学行为.为了从量上进一步揭示 CNN 的动力学行为，应该从衡量动力学系统相邻轨道平均分散率的物理量——Lyapunov 指数来研究这些动态行为的内在数学本质，但注意到(3)式不连续，因此计算其 Lyapunov 指数比较困难，但我们又注意到图 5(d)，(e)，(f)，(h)，(i)，(j)，(k)中 x_1 的运动轨迹都限于[-1，1]区间内，因此方程组(4)中 $f(x_1)=x_1$，从而方程组(4)变为线性方程组，这样就可以根据线性方程组的系数矩阵



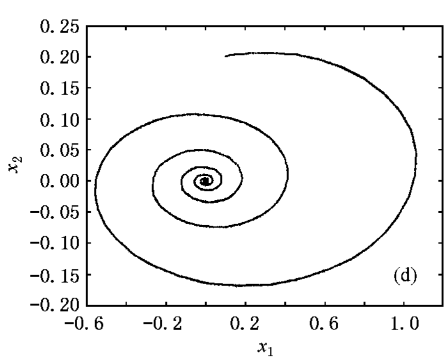
(a)单涡旋混沌吸引子($a_1=2$)



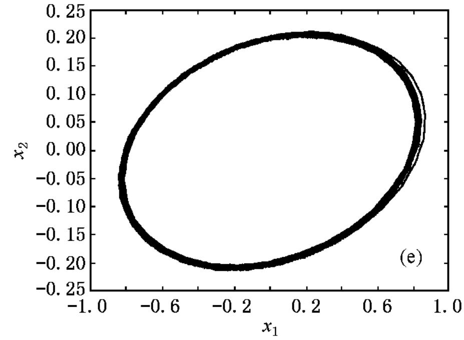
(b)不稳定周期-2($a_1=1.7$)



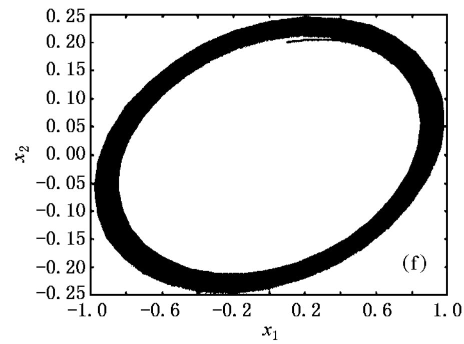
(c)不稳定周期-1($a_1=1.456$)



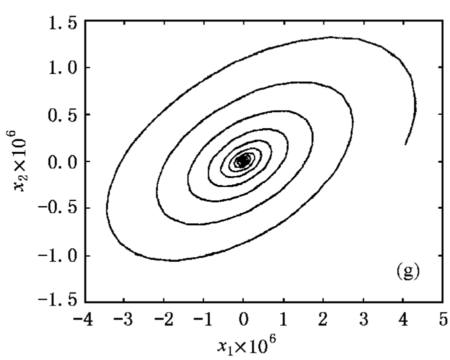
(d)稳定平衡点(0,0)($a_1=1$)



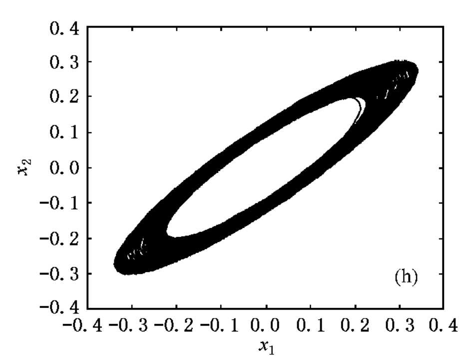
(e)临界周期-1($a_1=0.693$)



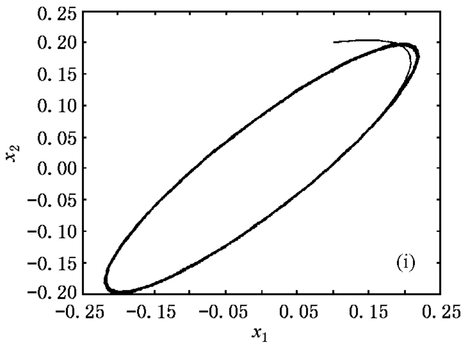
(f)不稳定高周期($a_1=0.689$)



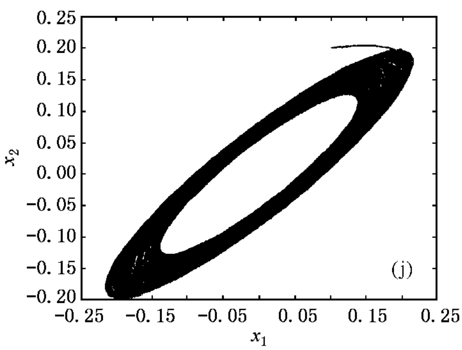
(g)不稳定轨道($a_1=0.5$)



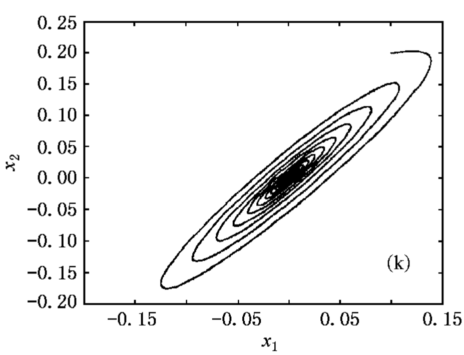
(h)不稳定高周期($a_1=-5.5$)



(i)临界周期 - 1（$a_1 = -5.6$）



(j)稳定高周期（$a_1 = -5.7$）



(k)稳定平衡点（$a_1 = -10$）

图 5　a_1 值的调节对系统动力学行为的影响

$$A_{\mathrm{Eig}} = \begin{bmatrix} S_{11} - 1 + a_1 & S_{12} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

的特征方程

$$\det(A_{\mathrm{Eig}} - \lambda E) = 0 \tag{8}$$

的根 λ 来衡量系统的动态特性（E 为单位矩阵）. 系统处于混沌状态或不稳定状态意味着特征方程(8)至少有一个正的或正实部的特征根；系统处于稳定平衡点状态意味着三个特征根均为负或具有负实部；系统处于极限环吸引子状态意味着至少有一个零特征根或零实部的特征根. 对于图 4、图 5(a)，(b)，(c)，(g)中 x_1 的运动轨迹超出了[- 1,1]区间的情况，同样通过计算特征方程(8)的根来研究系统的动力学行为，因为 x_1 的运动轨迹毕竟包含了[- 1,1]这个区间. 我们分别计算了以上不同动力学行为下的特征方程(8)的根，表 1 给出了系统在不同 a_1 值下的三个特征根的计算结果，从表 1 中可以看出随着 a_1 值的减小，λ_1 逐渐减小，并且还使 λ_2 和 λ_3 的实部在区间[- 1,0.1]之间作微小的变化. 表 1 中特征根的变化说明了系统动力学行为的必然转变，其中可使系统处于混沌态和稳定态的参数 a_1 的区间都比较宽，而使系统处于极限环和高周期的参数 a_1 的区间是比较窄的，实际上是不易实现控制的.

表 1　不同 a_1 值下的特征根

a_1	λ_1	λ_2	λ_3
120.0	118.8	- 0.005 + 0.034i	- 0.005 - 0.034i
100.0	98.87	- 0.542 + 3.409i	- 0.542 - 3.409i
2.000	1.627	- 0.917 + 2.219i	- 0.917 - 2.219i
1.700	1.147	- 0.833 + 2.078i	- 0.833 - 2.078i
1.456	0.662	- 0.712 + 1.945i	- 0.712 - 1.945i
1.000	- 0.753	- 0.233 + 1.843i	- 0.233 - 1.843i
0.693	- 1.524	- 0.000 + 2.027i	- 0.000 - 2.027i
0.689	- 1.540	0.003 + 2.031i	0.003 - 2.031i
0.500	- 1.868	0.075 + 2.139i	0.075 - 2.139i
- 5.500	- 7.727	0.004 + 3.220i	0.004 - 3.220i
- 5.600	- 7.818	- 0.000 + 3.225i	- 0.000 - 3.225i
- 5.700	- 7.909	- 0.004 + 3.230i	- 0.004 - 3.230i
- 10.00	- 11.92	- 0.150 + 3.347i	- 0.150 - 3.347i
- 50.00	- 51.38	- 0.418 + 3.422i	- 0.418 - 3.422i

4. 结　论

混沌是一种现象和行为，神经网络是一种特定计算模式的拓扑结构，它们有自身的特征，但也有共同的规律，即非线性动力学特性. 本文以细胞神经网络模型为例，研究了其联接权参数的调节与网络的动力学行为之间的关系，计算机仿真结果表明，通过改变网络的某些参数，可以达到对网络动态行为的

控制，且在很大的参数范围内，网络表现为混沌行为.众所周知，目前混沌的数学模型还没有一个比较普遍实用的比较好的构造方法，且研究也比较困难，现存的混沌数学模型非常有限，本文利用神经网络可以较容易地产生混沌的思想，为构造混沌的数学模型打开了一条新思路.对于其他神经网络模型，如Hopfield 模型、BAM 模型、模糊神经网络模型等的动力学行为及吸引子结构，如何较容易地产生混沌等等一些问题，还有待于进一步研究.

[1] Chua L O and Yang L 1988 *IEEE Trans*. *CAS* **35** 1257

[2] Yang Z H，Nishio Y and Ushida A 2002 *IEICE Trans*. *Fundamentals* **E85-A** 2052

[3] Botoca C 1995 *Pro*. *International Conference SCS* '95 121

[4] Wang H X and Yu J B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2303（in Chinese）［王宏霞、虞厥邦 2001 物理学报 **50** 2303］

[5] Tan W，Wang Y N，Liu Z R *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2463（in Chinese）［谭　文、王耀南、刘祖润等 2002 物理学报 **51** 2463］

[6] Li J F，Cao J X，Zhang C B *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1542（in Chinese）［李俊峰、曹紧祥、张传宝等 2002 物理学报 **51** 1542］

[7] Zhang X H and Shen K 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 2186（in Chinese）［张晓辉、沈　柯 1999 物理学报 **48** 2186］

[8] Li J F and Li N 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 1124

[9] Fen G L，Dong W J *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1181（in Chinese）［封国林、董文杰等 2002 物理学报 **51** 1181］

[10] He Z Y，Zhang Y F and Lu H T 1999 *Journal of China Institute of Comm*. **20** 59（in Chinese）［何振亚、张毅锋、卢宏涛 1999 通信学报 **20** 59］

Dynamical behaviour of a cellular neural network*

Wang Hong-Xia　He Chen

（*Department of Electronic Engineering*，*Shanghai Jiaotong University*，*Shanghai*　200030，*China*）

（Received 4 November 2002；revised manuscript received 27 January 2003）

Abstract

This paper studies mainly the dynamical behaviour of a cellular neural network. The dynamical property is controlled via adjusting the weight parameters of the system. The results indicate the structure of the attractor depends sensitively on the alteration of a parameter，and the dynamical behaviour of the cellular neural network shows the chaotic attractor with a larger extent of parameters.

Keywords：cellular neural network，dynamics，chaos

PACC：0545

* Project supported by the High-Technology Research Development Program of China（Grant No.2002AA144110），the National Natural Science Foundation of China（Grant No.60272082），the Postdoctoral Science Foundation of China（Grant No.2003033304）.