

# 二次采样用于随机共振从强噪声中提取弱信号的数值研究\*

冷永刚<sup>1,2)</sup> 王太勇<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>天津大学机械工程学院,天津 300072)

<sup>2)</sup>中国煤炭经济学院计算机系,烟台 264005)

(2002 年 12 月 2 日收到,2003 年 1 月 27 日收到修改稿)

提出了二次采样的随机共振(SR)技术,并利用该技术,实现了绝热近似理论在大参数条件下,从强噪声中提取弱信号的目标.为便于应用,研究了二次采样随机共振方法在弱信号检测中相关参数之间的关联性.数值分析表明,该法在信号分析方面有着潜在的应用价值,有望将来应用于实测信号的数据处理.

关键词:随机共振,弱信号检测,数值分析,非线性系统

PACC: 0630F, 0650

## 1. 引言

自从 Benzi<sup>[1,2]</sup>和 Nicolis<sup>[3]</sup>等人在研究古气象冰川问题提出随机共振(SR)理论以来,SR技术在信号处理方面的研究受到了广泛的关注<sup>[4-8]</sup>,其中在强背景噪声中检测微弱信号方面,SR显示出了独特的优势.SR利用非线性系统,在输入信号和噪声的协同作用下,产生类似力学中人们熟知的共振输出,达到识别弱信号的目的.SR已有的绝热近似(或绝热消去)和线性响应理论仅适用于很小的信号幅度和频率<sup>[9]</sup>,而实际工作中的信号频率可能较高.本文提出二次采样方法用于SR,实现了绝热近似理论大参数条件下的SR,因而从大参数强噪声中提取了弱信号.

## 2. 随机共振简述

SR的概念可从下列 Langevin 方程和图 1 加以说明.Langevin 方程为

$$dx/dt = \mu x - x^3 + a \sin(2\pi ft) + n(t), \quad (1)$$

其中  $E[n(t)] = 0$ ;  $E[n(t)n(t-\tau)] = 2D\delta(\tau)$ .图 1 中  $sn(t) = s(t) + n(t)$ 是系统输入信号, $s(t) =$

$a \sin(2\pi ft)$ 为被测弱周期信号, $n(t) = \sqrt{2D}g(t)$ 为白噪声, $D$ 是噪声强度, $g(t)$ 是均值为 0 方差为 1 的白噪声,用势函数  $U(x) = -\frac{\mu}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$  表示非线性双稳系统, $x(t)$ 是系统输出信号.图 1 说明:信号  $s(t)$ 和噪声  $n(t)$ 通过双稳态非线性系统  $U(x)$ ,产生协同效应,将一部分噪声能量转化到信号身上,从而使信号放大形成 SR,并且在系统输出的功率谱中,在信号的频率  $f$  处,会出现一峰值.

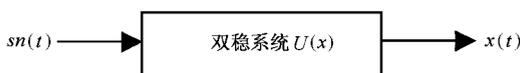


图 1 双稳随机共振系统

Langevin 方程(1)所对应的 Fokker-Plank 方程为

$$\partial \rho(x,t) / \partial t = -\partial / \partial x [(\mu x - x^3) \rho(x,t)] + D \partial^2 / \partial x^2 \rho(x,t). \quad (2)$$

胡岗<sup>[10,11]</sup>对方程(2)作了细致的研究,在绝热近似条件下建立了近似解析理论,并通过相应的模拟电路实验<sup>[12]</sup>得以验证.文献[13]对此作了详尽的总结.图 2 是一组典型的随机共振过程,其中方程(1)的各参数<sup>[13,14]</sup>为  $\mu = 1, a = 0.3, f = 0.01\text{Hz}$ ,采样频率  $f_s = 5\text{Hz}$ (或步长  $\Delta t = 0.2\text{s}$ ), $D$ 在系统输出的(b)(c)(d)图中的取值分别为 0.0, 0.31, 1.5(图 2

\* 国家自然科学基金(批准号 50175081)资助的课题.

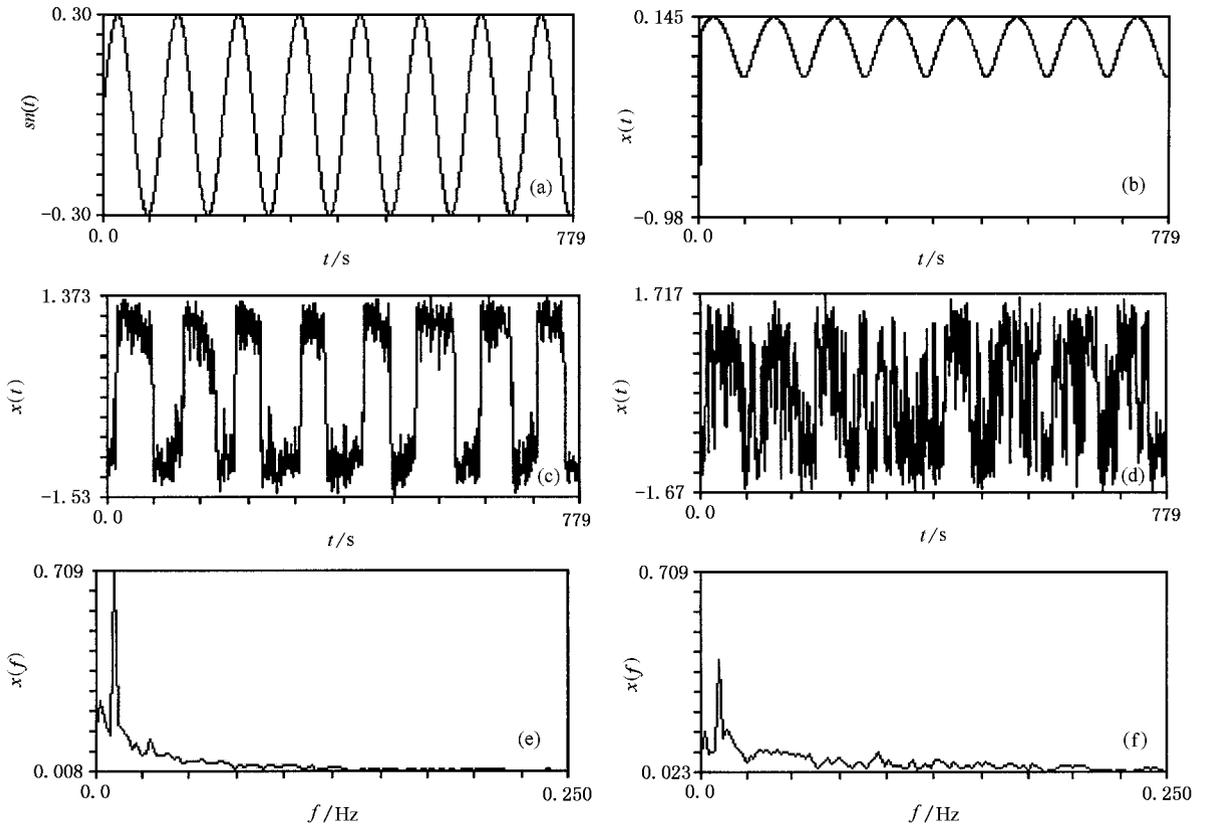


图2 绝热近似条件下的随机共振 (a)信号波形 (b) $D=0.0$ 系统输出波形 (c) $D=0.31$ 系统输出波形 (d) $D=1.5$ 系统输出波形 (e) $D=0.31$ 系统输出的频谱 (f) $D=1.5$ 系统输出的频谱

参数)。

方程(1)采用四阶 Runge-Kutta 法数值计算,采样点数 4096,平均 20 次(以下计算均一样)。由图 2 看出,在小参数条件下, $D=0.31$  时系统达到最佳 SR 效果,如图(c)和(e),当噪声强度再增大时,SR 效果逐渐弱化,如图(d)和(f)。如果单从研究方程(1)的最佳 SR 效果考虑,其意义是显然的。但是,SR 的绝热近似法适合于小参数,而实际工程参数往往会很大,此时绝热近似理论的条件<sup>[13]</sup>已不适应实际需要。例如一个实际例子见图 3 所示,其中对应 Langevin 方程(1)的各参数分别取为  $\mu=1$ ,  $a=0.3$ ,  $f=40\text{Hz}$ ,  $f_s=2000\text{Hz}$ ,  $D=13$ 。(图 3 参数)。

系统输出  $x(t)$  的时频图如图 3(a)和(b),信号加白噪声输入  $sn(t)$  的时频图如图 3(c)和(d)(注:为看清频谱结构,图(b)和(d)的幅值单位是 dB。本文其他谱图均为线性频谱)。显然,在频率  $f \gg 1$  的大参数情况下,无论是系统输入还是输出,在  $f=40\text{Hz}$  频率处的谱图 3(b)和 3(d)上均看不到谱峰值特征。即使调节  $\mu$ ,也无济于事。这说明在非小参数下,绝热近似理论已出现偏差,直接进行数值计算将得不

到 SR 现象,不能识别噪声中的弱信号。产生这一现象的原因在于<sup>[15]</sup> 频率  $f$  的增大导致系统响应  $x(t)$  越来越滞后于输入,从而需更大的信号驱动幅度才能形成跃迁的 SR 现象。

为了在实际大参数下仍能利用绝热近似理论得到 SR 现象,并识别弱信号,提出以小参数处理实测数据的思想,即不论实测频率数据的参数如何大,重新对实测数据“采样”,使其被视为小参数,然后再经过双稳系统按小参数进行数值分析,最后按比例还原恢复实测频率数据。

### 3. 二次采样的随机共振系统

根据上述思想设计出二次采样的随机共振系统,如图 4 所示。二次采样的实质是将一个较高频率变换为一个较低频率(符合绝热近似条件)的过程。系统首先将实测采集的数据经过二次采样器进行高频到低频的变换,然后将低频小信号数据再送入双稳系统产生随机共振,最后按照二次采样的频率变换比恢复实测数据的采集尺度,得到噪声背景下的

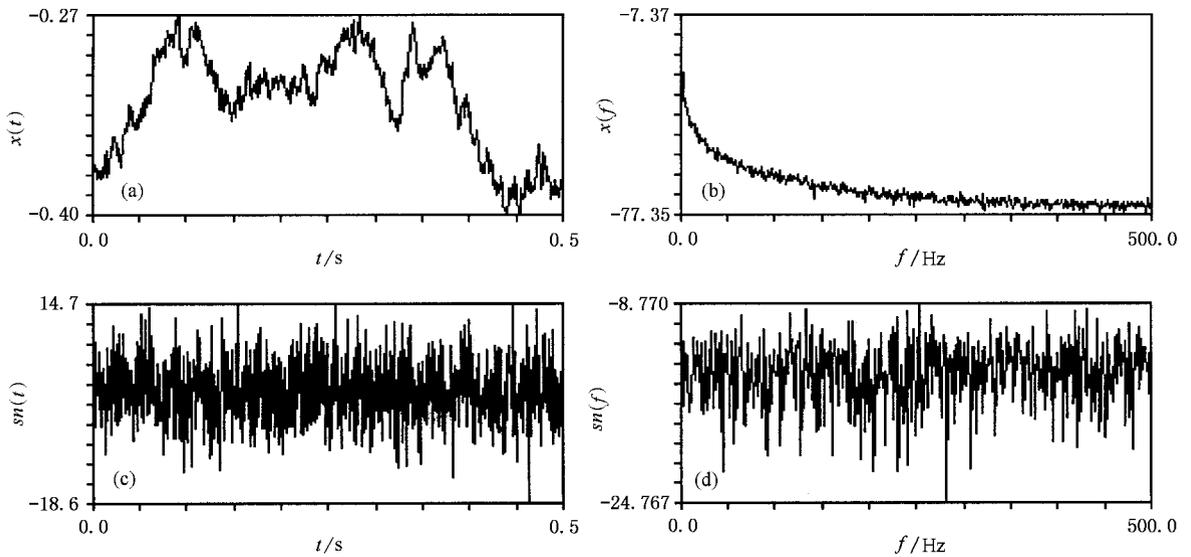


图3 非小参数双稳系统输入、输出的时频图 (a)输出时域波形 (b)输出的频谱伯德图 (c)输入时域波形 (d)输入的频谱伯德图

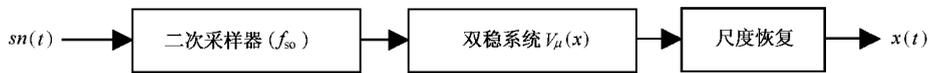


图4 二次采样随机共振系统

弱信号特征值。

#### 4. 二次采样用于 Langevin 方程的数值实验

二次采样随机共振技术的一个关键点就是如何对实测数据重新“采样”，即如何确定新的分析采样频率  $f_{so}$  (称为二次采样频率)。以图3参数为方程(1)的仿真实测数据，参考图2参数的采样频率  $f_s$ ，将二次采样频率  $f_{so}$  确定在  $4-10$  (无量纲) 范围内进行分析。经过多次数值运算，很快得到了期待的SR结果，如图5所示。此时， $f_{so} = 9$ ，谱峰值频率  $f_0 = 0.18$ ，换算到图3参数的尺度有  $f = f_0 \times f_s / f_{so} = 0.18 \times 2000 / 9 = 40$  (Hz)，正好是周期信号  $s(t)$  的频率。说明以绝热近似理论小参数方法并利用二次采样随机共振技术处理大参数的实测数据是可行的。就其机理而言，因为二次采样频率  $f_{so}$  的数值很小，即  $f_{so} \ll f_s$ ，相当于把要处理的信号频率  $f$  参数缩小到了  $f_0 (= f \times f_{so} / f_s)$ ，而  $f_0$  的数量级已在绝热近似理论的小参数范围内。

#### 5. 二次采样 Langevin 方程参数的进一步分析

为便于应用，现对 Langevin 方程(1)中各参数之间的关系作进一步分析。

##### 5.1. 信号频率 $f$ 与 $f_{so}$ 的关系

保持图3参数中其他参数不变，改变信号频率  $f$  值进行数值分析，发现  $f$  与  $f_{so}$  无关，即对任意  $f$  值  $f_{so}$  恒在9处保持SR谱峰频，见图5(b)。这说明只要其他参数不变，任意频率  $f$  将对应一个恒定的二次采样频率  $f_{so}$ 。其实这一点不难理解，因为当  $f$  与  $f_s$  ( $f_s = 50f$ ) 关系确定后， $f$  在谱图中的位置也就固定不变，而二次采样频率  $f_{so}$  只是线性地改变谱图的坐标尺度，并不改变  $f$  在谱图中的位置，因此  $f$  或确切地说  $f$  的频谱位置与  $f_{so}$  无关。

##### 5.2. 实际采样频率 $f_s$ 与 $f_{so}$ 的关系

保持图3参数中其他参数不变，将实际采样频率  $f_s$  在  $200\text{Hz}-2000\text{Hz}$  即  $5f-100f$  范围内调节，经数值分析发现，当  $f_s < 50f$  时，双稳系统输出的谱图

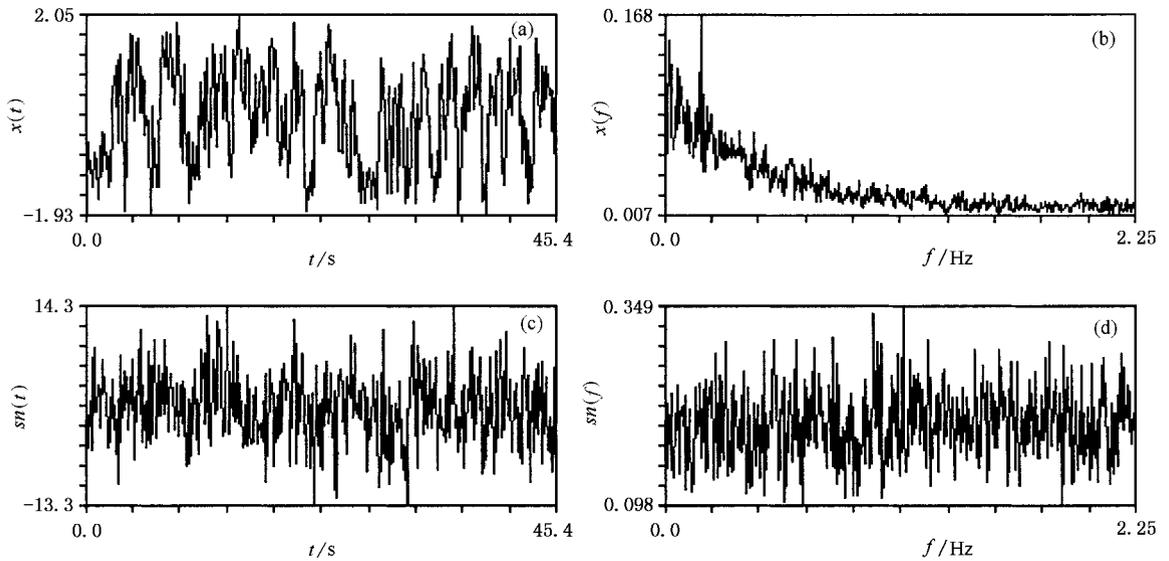


图5  $f_{so} = 9$ , 二次采样图3大参数双稳系统输入、输出的时频图 (a)输出时域波形 (b)输出的频谱 (c)输入时域波形 (d)输入的频谱

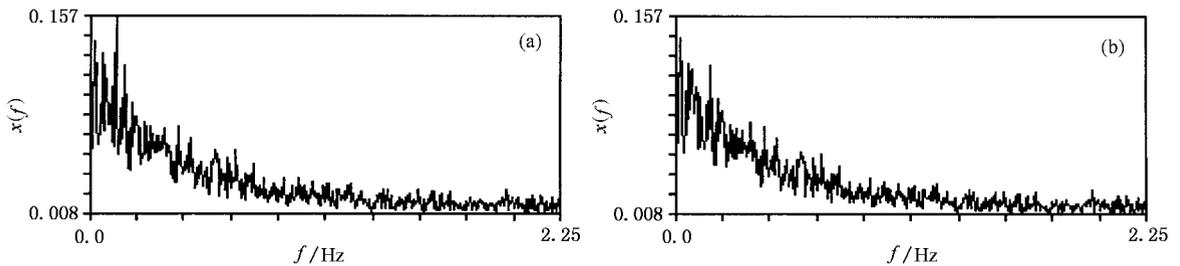


图6  $f_{so} = 9$ , 图3参数中不同实际采样频率  $f_s$  的双稳系统输出频谱图 (a)  $f_s = 70f$  (b)  $f_s = 90f$

中, 低频成分占主导地位, 看不到特征峰频  $f$  处的 SR 现象. 当  $f_s \geq 50f$  时, 双稳系统输出的谱图中, 低频成分仍然占主导地位, 但在  $f_s = 50f-55f, 60f, 70f, 75f, 100f$  等这些特殊高采样频率处, 特征峰频  $f$  完全突出, 是典型的 SR 现象, 而  $f_s$  在其他高采样频率处, 特征峰频  $f$  几乎看不到, 即使调节参数  $\mu$  也不起作用, 图6所示. 为什么  $f_s$  变化会产生这样的结果, 其内在机理是什么, 目前还不清楚, 尚待进一步探讨. 但有一点可以肯定,  $f_{so}$  总是与  $f_s$  ( $= 50f-55f, 60f, 70f, 75f, 100f$  等) 有极佳的配合.

### 5.3. 噪声强度 $D$ 与 $f_{so}$ 的关系

对于图3参数, 其他参数不变, 取噪声强度  $D > 4$  进行数值计算. 之所以取  $D > 4$  是因为当  $D = 4$  时, 信号刚好被噪声淹没, 即双稳系统输入端的频谱已不可辨识信号  $s(t)$ , 如图7(c)所示, 此时系统输

入端的信噪比  $\text{SNR} = -0.18\text{dB}$ . 信噪比定义<sup>[9]</sup>为: 在功率谱中信号的峰(幅)值与同频率噪声(背底)之比. 从图7(a)(b)和图8(b)可以看出, 随着  $D$  的增大, 系统输出端的特征频率  $f$  谱峰值逐渐超过噪声的最高谱幅值而突出成为主谱峰. 当  $D = 13.5$  时,  $D$  达到最大值, 因为再增大  $D$  值程序将 overflow. 经大量的数值分析发现,  $D$  的最大值与  $f_{so}$  有关,  $f_{so}$  增大则  $D$  的最大值也增大. 对于图3参数, 只有在  $f_{so} \leq 12$ ,  $D$  的最大值  $\leq 32$ , 信噪比  $\text{SNR} > -10\text{dB}$  范围内, 系统输出的频谱中, 在特征频率  $f$  处才能看到明显突出的 SR 主谱峰.

### 5.4. 信号幅值 $a$ 和势参数 $\mu$ 的关系

根据图3参数 ( $f_{so} \leq 12$ ) 不难想到, 当  $a$  增大时, 噪声中的弱信号必然增强, 因此在系统输出频谱的特征频率  $f$  处, 能够得到明显突出的 SR 主谱峰. 但

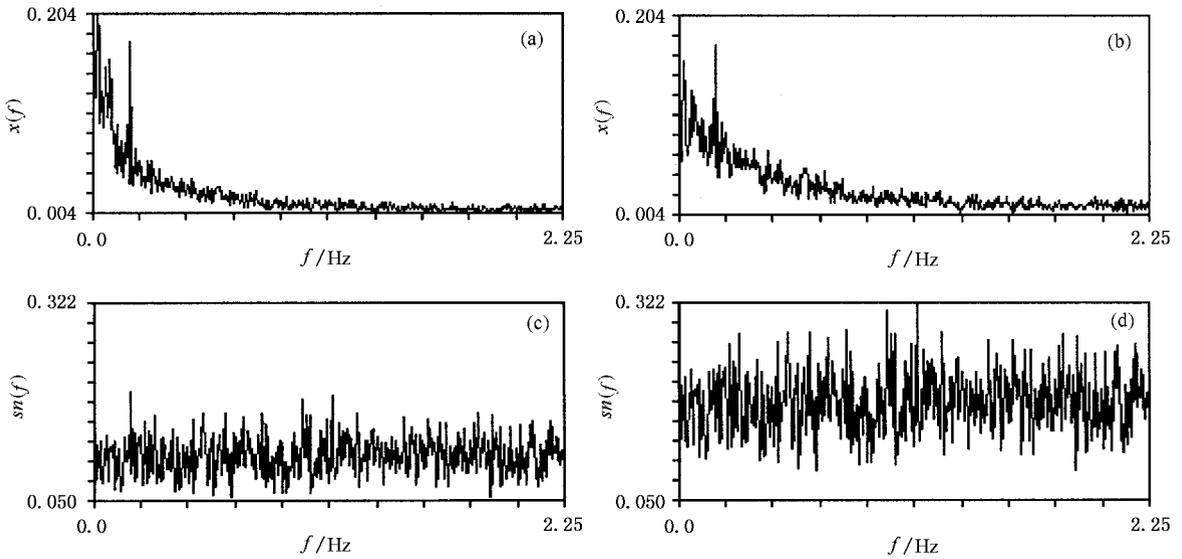


图 7  $f_{so} = 9$  图 3 参数中不同噪声强度的双稳系统输入、输出频谱图 (a)  $D = 4$  输出的频谱 (b)  $D = 11$  输出的频谱 (c)  $D = 4$  输入的频谱 (d)  $D = 11$  输入的频谱

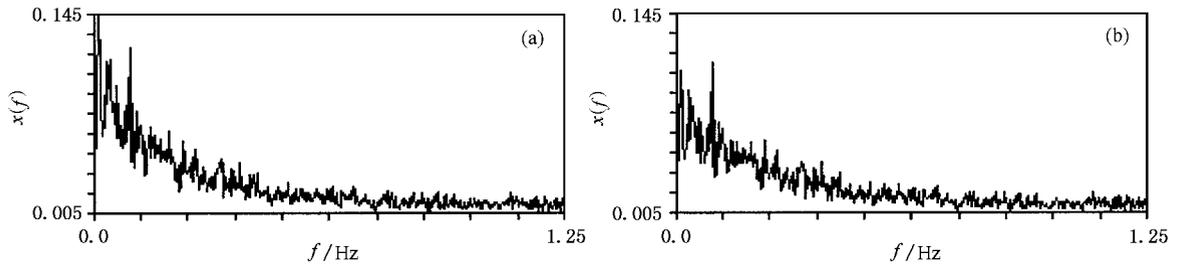


图 8  $a = 0.1$  ( $f_s = 50f$ ,  $f_{so} = 5$ ,  $D = 2.3$ ) 时, 不同  $\mu$  值的系统输出谱 (a)  $\mu = 1$  (b)  $\mu = 0.5$

当  $a$  减小时, 也不难想到: 由于噪声相对增强, 有可能  $a$  减小到某个值, 在系统输出频谱的特征频率  $f$  处得不到 SR 主谱峰. 这种情况可以从双稳系统的双稳态临界值或势垒来解释.

系统的双稳态临界值  $a_c = \sqrt{4\mu^3/27}$ , 其势垒  $\Delta V = \mu^2/4$ . 当  $\mu$  较大时,  $a_c$  和  $\Delta V$  也大, 信号  $s(t)$  要想在一定噪声强度  $D$  的激励下越过势垒, 并以信号频率  $f$  在两势阱之间作切换跃迁运动 (即形成 SR 现象), 那么它的幅值  $a$  不能比  $a_c$  小得太多, 应为阈值下输入信号<sup>[15]</sup>.

因此, 如果  $a$  减小而不能在系统输出频谱的特征频率  $f$  处得到 SR 主谱峰, 则说明  $a$  已太小, 或势垒相对太高, 此时应降低势垒  $\Delta V$  的高度, 即减小  $\mu$ , 使  $a$  接近阈值下输入信号的阈值, 形成 SR 条件. 图 8 给出了  $a = 0.1$  ( $f_s = 50f$ ,  $f_{so} = 5$ ,  $D = 2.3$ ,  $SNR = -7.4\text{dB}$ ) 时不同  $\mu$  值的系统输出谱. 从图 8 可以看

出,  $\mu = 1$  时, 势垒相对于  $a = 0.1$  较高, 看不到突出的 SR 主谱峰, 而减小  $\mu$  后, 特征频率  $f$  处的 SR 主谱峰高出噪声幅值而突出可见.

## 6. 结 论

本文提出了二次采样的随机共振技术, 实现了绝热近似理论在大参数条件下, 从强噪声中获取弱信号的随机共振方法. 该方法就是: 首先将实测采集的数据经过二次采样器的采集, 然后送入双稳系统产生随机共振, 得到噪声背景下的弱信号特征, 最后恢复实测数据采集尺度. 此外, 本文还研究了二次采样随机共振技术在弱信号检测中有关参数之间的关联问题. 数值分析表明, 本方法在信号分析方面有着潜在的应用价值, 有望将来应用于实测信号的数据处理.

- [ 1 ] Benzi R , Suter A and Vulpiana A 1981 *Phys. A* **14** L453
- [ 2 ] Benzi R , Parisi G , Suter A and Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 11
- [ 3 ] Nicolis C 1982 *Tellus* **34** 1
- [ 4 ] Gammaitoni L , Hänggi P , Jung P and Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [ 5 ] El Naschie MS , Gebeshub IC , Holden AV and Petracchi D , editors 2000 *Chaos , Solitons & Fractals* **11** 1819
- [ 6 ] Bulsara AR and Gammaitoni L 1996 *Phys. Today* . **49** 39
- [ 7 ] Jung P and Hänggi P 1991 *Phys. Rev. A* **44** 8032
- [ 8 ] Galdi V , Pierro V and Pinto 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6470
- [ 9 ] Qin G R , Gong D C , Hu G and Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 ( in Chinese ) [ 秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360 ]
- [ 10 ] Hu G , Nicolis G and Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [ 11 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* ( Shanghai : Shanghai Science & Technology Education Press ) p222 ( in Chinese ) [ 胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海:上海科学教育出版社)第 222 页 ]
- [ 12 ] Hu G , Qin G R , Gong D C and Weng X D 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6414
- [ 13 ] Lu Z H , Lin J H and Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 ( in Chinese ) [ 卢志恒、林建恒、胡 岗 1993 物理学报 **42** 1556 ]
- [ 14 ] Kaiser F 1996 *Bioelectrochemistry and Bioenergetics* **41** 3
- [ 15 ] Wang J F , Liu F , Wang J Y , Chen G and Wang W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 ( in Chinese ) [ 王嘉赋、刘 锋、王均义、陈光、王 炜 1997 物理学报 **46** 2305 ]

## Numerical research of twice sampling stochastic resonance for the detection of a weak signal submerged in a heavy Noise<sup>\*</sup>

Leng Yong-Gang<sup>1,2)</sup> Wang Tai-Yong<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>( Mechanical Engineering College , Tianjing University , Tianjing 300072 , China )

<sup>2)</sup>( Department of Computer , China Coal Economic College , Yantai 264005 , China )

( Received 2 December 2002 ; revised manuscript received 27 January 2003 )

### Abstract

A new technique , twice sampling stochastic resonance ( SR ) , is proposed , and with this technique , the goal of detecting a weak signal overwhelmed in a noise is realized under large parameters in terms of the theory of adiabatic elimination. For the purpose of practical applications , the relative parameters are investigated in the detection of a weak signal based on the technique. The numerical simulation shows that the method presented here is of potential value in the signal analysis and is expected to be applied to the practically measured data processing in the future.

**Keywords** : stochastic resonance , weak signal detection , numerical simulation , nonlinear system

**PACC** : 0630F , 0650

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No.50175081 ).