

非均匀尘埃等离子体中孤子的传播*

洪学仁 段文山[†] 孙建安 石玉仁 吕克璞

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2002 年 12 月 26 日收到 2003 年 1 月 29 日收到修改稿)

运用约化摄动法研究了非均匀尘埃等离子体中孤子的传播情况. 在低阶近似下, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 当分界面不连续变化时, 孤子在不连续点的反射波与透射波均可由 KdV 方程来描述, 并给出了低阶近似情况下, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 当入射波为单孤子时, 反射孤子与透射孤子的个数及其大小. 当分界面是有限长度并连续变化时, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 尘埃声孤波由 KdV 型方程来描述, 并由此给出了准孤子振幅、传播速度等参量在传播过程中的变化.

关键词: 尘埃等离子体, 孤子, KdV 方程, 约化摄动法

PACC: 0340K, 5235S, 4735

1. 引 言

近年来尘埃等离子体和其他非线性物理中各种聚集过程引起了人们极大的研究兴趣^[1-9]. 目前, 理论和实验研究表明, 带电尘埃簇改变了原等离子体波的光谱^[2], 而且尘埃微粒带电的动力学行为在尘埃等离子体中引入了许多新的特征^[10]. Rao 等人在理论上研究了无磁场尘埃等离子体中超低相速尘埃声孤子的存在^[3]. Mamun 等人通过准势研究了其中的非线性尘埃声孤子^[11]. 实验中观察到低相速尘埃声波伴随着电子数密度的耗尽, 说明尘埃声波的动力学行为仅由尘埃流的惯性和非惯性离子控制. 研究表明等温离子数密度遵循 Boltzmann 分布($n_i = \exp(-\phi)$), 而且离子的惯性可以忽略^[11]. Tagare 通过扩展 Mamun 模型, 研究了由两种温度的等温离子组成的尘埃等离子体中压缩孤波和稀疏孤波及双层结构^[12].

众所周知, 孤子在传播过程中将保持形状与传播速度不变, 且在它们发生了碰撞以后也将完全保持原来的特性. 当孤子在非均匀介质中传播时, 介质的不均匀性对孤子的传播有很大的影响. 对此已进行了大量的研究^[13-24]. 文献 [19, 20] 研究了由两

种离子组成的等离子体中孤子的传播. 本文运用 Mamun 模型^[11], 研究了由两种不同尘埃微粒所构成的尘埃等离子体中尘埃声孤子的传播情况.

2. 分界面不连续变化情形

2.1. 基本方程

考虑一维情形, 用 x, t 分别表示无量纲空间、时间坐标. 假设未受扰动时在 $x > 0$ 与 $x < 0$ 区域尘埃微粒不相同, 还假设未受扰动时, 尘埃微粒的数密度分布和离子的数密度分布以及离子的温度都是均匀的. 尘埃微粒数密度的间断面垂直于 x 轴, 与 x 轴交点是 $x = s$, 当未受扰动时, $s = 0$. 在每个区域里, 由冷尘埃微粒和等温离子组成的尘埃等离子体的无量纲运动方程为^[11]

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_d u_d) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_d}{\partial t} + u_d \frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = n_d - n_i, \quad (3)$$

n_i 满足 Boltzmann 分布

$$n_i = \exp(-\phi), \quad (4)$$

* 国家自然科学基金(批准号:10247008) 甘肃省自然科学基金(批准号:YS021-A22-018) 国家人事部和国家教育部留学回国人员科研启动基金及西北师范大学科技创新工程(批准号:NWNU-KJCXGC-215)资助的课题.

[†] 通讯联系人: E-mail: duanws@nwnu.edu.cn

其中 n_d, u_d 分别为尘埃微粒数密度和尘埃微粒在 x 轴的运动速度, n_i 为离子数密度, ϕ 为电势. 无量纲化过程为: $n_d = n'_d/n_{d0}$, $n_i = n'_i/Z_d n_{d0}$, $u_d = u'_d/C_d$, $x = x'/\lambda_d$, $t = t'/\omega_{pd}^{-1}$, $\phi = \phi'/(kT_i/e)$ 其中 n'_d , n'_i , u'_d , x' , t' , ϕ' 分别为具有量纲的尘埃微粒数密度、离子数密度、尘埃微粒在 x 轴的运动速度、空间坐标、时间坐标和电势, n_{d0} 为未受扰动的尘埃微粒数密度, Z_d 为尘埃微粒所带电荷数, T_i 为离子温度, k 为 Boltzmann 常数, $C_d = (Z_d kT_i/m_d)^{1/2}$ 为声速, 其中 m_d 为尘埃微粒的质量, $\lambda_d = (kT_i/4\pi Z_d n_{d0} \times e^2)^{1/2}$ 为德拜长度, $\omega_{pd}^{-1} = (m_d/4\pi n_{d0} Z_d^2 e^2)^{1/2}$ 为尘埃等离子体频率的倒数.

2.2. 入射波、反射波和透射波控制方程的建立

假设入射孤波从 $x < s$ 区域传播而来, 经过不连续点 $x = s$ 以后, 将传播到 $x > s$ 区域. 由于不连续点 s 的存在, 孤波在 s 点将会产生反射波. 因此, 在 $x < s$ 区域里将有沿 x 正向与反向传播的波, 即入射波(用 I 表示)和反射波(用 R 表示), 而在 $x > s$ 区域里将只有沿 x 正向传播的波, 即透射波(用 T 表示). 下面运用约化摄动法(reductive perturbation technique)研究对于小的、但有限振幅的长波振动情况下, 孤子在不连续点的反射与透射.

在 $x > s$ 区域, 运用约化摄动法, 作如下变换:

$$\xi = \epsilon(x - t), \quad (5)$$

$$\eta = \frac{\epsilon^3}{2}(x - s), \quad (6)$$

$$n_d = 1 + \epsilon^2 n_1 + \epsilon^4 n_2 + \dots, \quad (7)$$

$$u_d = \epsilon^2 u_1 + \epsilon^4 u_2 + \dots, \quad (8)$$

$$\phi = \epsilon^2 \phi_1 + \epsilon^4 \phi_2 + \dots \quad (9)$$

由于分界面 $x = s$ 的移动很小, 可作如下变换:

$$s = \epsilon^2 s_1 + \epsilon^4 s_2 + \dots \quad (10)$$

将方程(5)–(10)代入方程(1)–(3), 比较 ϵ 各阶量的大小. 由方程(1)的 ϵ^3, ϵ^5 得

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0, \quad (11)$$

$$-\frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\alpha(n_1 u_1)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0. \quad (12)$$

由方程(2)的 ϵ^3, ϵ^5 得

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} = 0. \quad (14)$$

由方程(3)的 ϵ^2, ϵ^4 得

$$n_1 = -\phi_1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = n_2 + \phi_2 - \phi_1^2. \quad (16)$$

尘埃等离子体在未受扰动下, $n_d = 1, u_d = 0$, 并且规定 $\phi = 0$, 即 $n_1 = 0, u_1 = 0, \phi_1 = 0$, 因此, 由方程(11)–(13)–(15)得

$$n_1 = u_1 = -\phi_1. \quad (17)$$

由方程(12)–(14)–(16)–(17)最后可得

$$\frac{\partial n_1^T}{\partial \eta} + 2n_1^T \frac{\partial n_1^T}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 n_1^T}{\partial \xi^3} = 0, \quad (18)$$

其中上标 T 表示在 $x > s$ 区域里沿 x 轴正向传播的透射波, $n_1^T = n_1 = u_1^T = -\phi_1^T$. 这样表示是为了与以后的反射波和透射波相区别.

在 $x < s$ 区域, 必须同时考虑沿 x 轴正向和反向传播的波, 即入射波与反射波. 因此, 在 $x < s$ 区域, 作如下变换:

$$\xi = \epsilon(x - t), \quad (19)$$

$$\zeta = \epsilon(x + t), \quad (20)$$

$$\eta = \frac{\epsilon^3}{2}(x - s), \quad (21)$$

$$s = \epsilon^2 s_1 + \epsilon^4 s_2 + \dots, \quad (22)$$

$$n_d = 1 + \epsilon^2 n_1 + \epsilon^4 n_2 + \dots, \quad (23)$$

$$u_d = \epsilon^2 u_1 + \epsilon^4 u_2 + \dots, \quad (24)$$

$$\phi = \epsilon^2 \phi_1 + \epsilon^4 \phi_2 + \dots \quad (25)$$

将方程(19)–(25)代入方程(1)–(3), 并比较 ϵ 各阶量的大小. 由方程(1)的 ϵ^3, ϵ^5 得

$$-\frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \frac{\partial n_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} = 0, \quad (26)$$

$$-\frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \frac{\partial n_2}{\partial \zeta} + \frac{\alpha(n_1 u_1)}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial \xi}$$

$$+ \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} + \frac{\alpha(n_1 u_1)}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0. \quad (27)$$

由方程(2)的 ϵ^3, ϵ^5 得

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \zeta} = 0, \quad (28)$$

$$-\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \zeta} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}$$

$$+ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} = 0. \quad (29)$$

由方程(3)的 ϵ^2, ϵ^4 得

$$n_1 = -\phi_1, \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \zeta^2} - n_2 - \phi_2 + \frac{1}{2} \phi_1^2 = 0. \quad (31)$$

应用未受扰动条件($\phi = 0$ 时, $n_d = 1$, $u_d = 0$, 或 $\phi_1 = 0$ 时, $u_1 = 0$, $n_1 = 0$)得

$$n_1 = n_1^l(\xi, \eta) + n_1^r(\zeta, \eta), \quad (32)$$

$$u_1 = u_1^l(\xi, \eta) + u_1^r(\zeta, \eta), \quad (33)$$

$$\phi_1 = \phi_1^l(\xi, \eta) + \phi_1^r(\zeta, \eta). \quad (34)$$

将方程(32)–(34)代入方程(26)–(28)–(30)可得

$$n_1^l = u_1^l = -\phi_1^l, \quad (35)$$

$$n_1^r = -u_1^r = -\phi_1^r. \quad (36)$$

由方程(27)–(29)–(31)–(36)可得

$$\frac{\partial n_1^l}{\partial \eta} + 2n_1^l \frac{\partial n_1^l}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 n_1^l}{\partial \xi^3} = F(\xi, \zeta, \eta), \quad (37)$$

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \eta} + 2n_1^r \frac{\partial n_1^r}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 n_1^r}{\partial \zeta^3} = F'(\xi, \zeta, \eta), \quad (38)$$

其中

$$F(\xi, \zeta, \eta) = - \left[2 \frac{\partial n_2}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} + \frac{\alpha n_1^r u_1^r}{\partial \zeta} - \frac{\partial^3 u_1^r}{\partial \zeta^3} + 2u_1^r \frac{\partial u_1^r}{\partial \xi} + 2u_1^l \frac{\partial u_1^r}{\partial \zeta} \right], \quad (39)$$

$$F'(\xi, \zeta, \eta) = - 2 \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\alpha n_1^l u_1^l}{\partial \xi} - \frac{\partial^3 u_1^l}{\partial \xi^3} - 2u_1^r \frac{\partial u_1^l}{\partial \xi} - 2u_1^l \frac{\partial u_1^r}{\partial \zeta}. \quad (40)$$

方程(39)对 ζ 积分, 可得

$$2n_2 + 2u_2 + n_1^r u_1^r - \frac{\partial^2 u_1^r}{\partial \zeta^2} + 2u_1^l u_1^r + 2 \frac{\partial u_1^l}{\partial \xi} \int u_1^r d\zeta = - F(\xi, \zeta, \eta)\zeta + G(\xi, \eta). \quad (41)$$

本文要求的解是具有实际意义的局部解, 即当 $\zeta \rightarrow \infty$ 时, 解是有限的. 为了保证这一点, 只有 $F(\xi, \zeta, \eta) = 0$. 同理可得 $F'(\xi, \zeta, \eta) = 0$. 因此, 可得到 n_1^l , n_1^r 分别满足 KdV 方程

$$\frac{\partial n_1^l}{\partial \eta} + 2n_1^l \frac{\partial n_1^l}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 n_1^l}{\partial \xi^3} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial n_1^r}{\partial \eta} + 2n_1^r \frac{\partial n_1^r}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 n_1^r}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (43)$$

作变换:

$$n_1^l = -3n^l, \quad (44)$$

$$n_1^r = -3n^r, \quad (45)$$

$$n_1^r = -3n^r, \quad (46)$$

方程(18)–(42)–(43)可化为标准 KdV 形式:

$$\frac{\partial n^l}{\partial \eta} - 6n^l \frac{\partial n^l}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 n^l}{\partial \xi^3} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial n^l}{\partial \eta} - 6n^l \frac{\partial n^l}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 n^l}{\partial \xi^3} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial n^r}{\partial \eta} - 6n^r \frac{\partial n^r}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 n^r}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (49)$$

2.3. 反射波与透射波的确定

以下讨论对于小的、但有限振幅的长波振动, 当给定入射波以后, 由于不连续点 $x = s$ 所导致的反射波和透射波. 在 $x = s$ 区域应满足电势相等和尘埃微粒速度相等的条件, 即

$$(\phi_1^l + \phi_1^r) = \phi_1^T, \quad (50)$$

$$(Z_{d_1} k T_i / m_{d_1})^{1/2} (u_1^l + u_1^r) = (Z_{d_2} k T_i / m_{d_2})^{1/2} u^T, \quad (51)$$

其中带有下标 1 的变量代表 $x < s$ 区域的物理量, 带有下标 2 的变量代表 $x > s$ 区域的物理量. 令 γ

$$= \left(\frac{Z_{d_2} m_{d_1}}{Z_{d_1} m_{d_2}} \right)^{1/2}, \text{ 从而 (51) 式可化为}$$

$$u_1^l + u_1^r = \gamma u_1^T. \quad (52)$$

利用方程(17)–(35)–(36)–(50)–(52)可得

$$\phi_1^T = \frac{2}{1 + \gamma} \phi_1^l, \quad (53)$$

$$\phi_1^r = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \phi_1^l. \quad (54)$$

设入射波为一单孤子

$$\phi^l = -2d^{-2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{d} - \frac{4\eta}{d^2} \right), \quad (55)$$

则由方程(53)和(54)可得反射波 ϕ^r 和透射波 ϕ^T 的准初始条件为

$$\phi^T(\xi, 0) = \frac{2}{1 + \gamma} \left[-2d^{-2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{d} \right) \right], \quad (56)$$

$$\phi^r(\xi, 0) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \left[-2d^{-2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{d} \right) \right]. \quad (57)$$

由方程(56)和(57)可以看出, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 尘埃微粒的质量和荷电量对反射波 ϕ^r 与透射波 ϕ^T 的准初始振幅都有影响. 对于小的、但有限振幅的长波振动, 如果两种尘埃微粒荷电量相同 $\left(\gamma = \left(\frac{m_{d_1}}{m_{d_2}} \right)^{1/2} \right)$, 当 $m_{d_1} > m_{d_2}$ 时, $\gamma > 1$,

透射波准初始振幅和反射波准初始振幅均小于入射波振幅, 且反射波准初始振幅与入射波振幅异号, 如果入射孤波为压缩型孤波, 则准初始反射孤波为稀疏型孤波. 当 $m_{d_1} < m_{d_2}$ 时, $\gamma < 1$, 透射波准初始振幅将大于入射波振幅, 反射波准初始振幅小于入射波振幅, 但与入射波振幅同号, 如果入射孤波为压缩型孤波, 则准初始反射孤波亦为压缩型孤波. 图 1 和图 2 分别为准初始 ϕ^T/ϕ^l 和 ϕ^r/ϕ^l 随 m_{d_1}/m_{d_2} 的变化情况($Z_{d_1} = Z_{d_2}$). 此结论与文献[19]中离子

等离子体情形基本一致,不同的是对于离子等离子体, $\phi_1^T = n_1^T = u_1^T$, $\phi_1^I = n_1^I = u_1^I$, $\phi_1^R = n_1^R = -u_1^R$, 而对尘埃等离子体, $\phi_1^T = -n_1^T = -u_1^T$, $\phi_1^I = -n_1^I = -u_1^I$, $\phi_1^R = -n_1^R = u_1^R$.

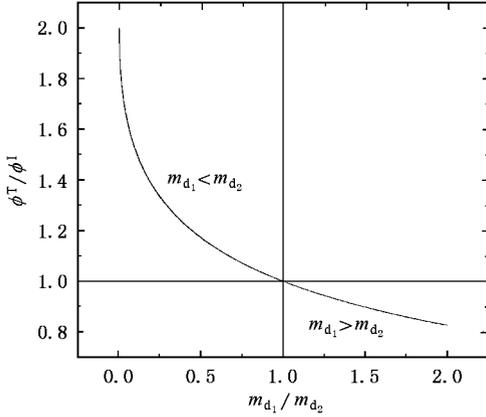


图 1 ϕ^T/ϕ^I 随 m_{d_1}/m_{d_2} 的变化 ($Z_{d_1} = Z_{d_2}$)

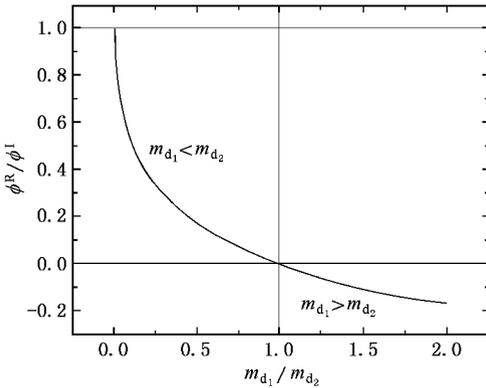


图 2 ϕ^R/ϕ^I 随 m_{d_1}/m_{d_2} 的变化 ($Z_{d_1} = Z_{d_2}$)

对于 KdV 方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - 6\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (58)$$

的任意给定的初始条件

$$\phi(\xi, 0) = -AL^{-2} \text{sech}^2 \frac{\xi}{L}, \quad A > 0, \quad (59)$$

可以由逆散射理论来确定产生的孤子个数以及振幅的大小^[25]. 产生的孤子个数 N_0 是满足下式的最大整数:

$$\sqrt{A + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} - N_0 > 0. \quad (60)$$

产生孤子的振幅将由下式给出:

$$2\left(\sqrt{A + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}} - j\right)^2 L^{-2}$$

$$(j = 1, 2, \dots, N_0). \quad (61)$$

这样即可确定由入射孤子而产生的透射孤子和反射孤子的个数及大小,由方程(56)(57)和(60)可得透射孤子与反射孤子的个数 N_1 和 N_2 分别满足

$$\sqrt{\frac{4}{1+\gamma} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - N_1 > 0, \quad (62)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha(1-\gamma)}{1+\gamma} + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} - N_2 > 0. \quad (63)$$

当 $Z_{d_1} = Z_{d_2}$ 时,由方程(62)和(63)可以看出:对于小的、但有限振幅的长波振动,至少有一个透射孤子,但是最多只有两个透射孤子. 而反射孤子最多一个,且 $\gamma < 1$, 即 $m_{d_1} < m_{d_2}$, 当 $\gamma > 1$, 即 $m_{d_1} > m_{d_2}$ 时将无反射孤子,反射波将是一些微小的振动和辐射. 此结论也与文献[19]中离子等离子体情形一致.

3. 分界面缓慢连续变化情形

3.1. 基本方程

考虑由两种不同尘埃微粒组成的非均匀等离子体, n_a 和 n_b 分别表示质量为 m_a 和 m_b (m_a, m_b 均为无量纲质量)尘埃的无量纲化数密度, n_{a0} 和 n_{b0} 分别表示它们在未受扰动时的值.

考虑尘埃微粒数密度连续变化的情形. 在分界面的区域内 ($x = 0$ 附近), n_{a0} 从 1 逐渐变为零, 而 n_{b0} 将从零逐渐变为 1, 如图 3 所示. 此系统的无量纲化运动方程为

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\alpha n_j u_j}{\partial x} = 0, \quad (64)$$

$$m_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (j = a, b), \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = (n_a + n_b) - n_i, \quad (66)$$

$$n_i = e^{-\phi}, \quad (67)$$

其中 u_j 为质量为 m_j 的尘埃微粒的流速, $m_a = \frac{m'_a}{m_d}$,

$m_b = \frac{m'_b}{m_d}$, $m_d = \frac{m'_a + m'_b}{2}$, 其中 m'_a 和 m'_b 分别为有

量纲的尘埃微粒的质量. 方程(64)–(67)的无量纲化过程与分界面不连续变化情形相同.

3.2. KdV 型孤子的传播

由于假设分界面内尘埃微粒的数密度变化是缓

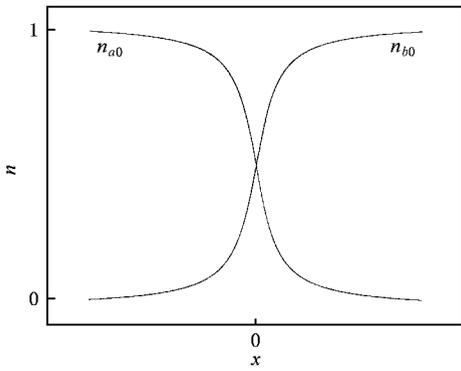


图 3 两种不同尘埃微粒的数密度分布图

慢的,故可不考虑反射波.运用约化摄动法,对于小的、但有限振幅的长波振动,作如下变换:

$$\xi = \epsilon(x - ct), \quad (68)$$

$$\eta = \epsilon^3 x, \quad (69)$$

$$n_j = n_{j0} + \epsilon^2 n_{j1} + \epsilon^4 n_{j2} + \dots, \quad j = a, b, \quad (70)$$

$$u_j = \epsilon^2 u_{j1} + \epsilon^4 u_{j2} + \dots, \quad (71)$$

$$\phi = \epsilon^2 \phi_1 + \epsilon^4 \phi_2 + \dots \quad (72)$$

将方程(68)–(72)代入方程(64)–(66),比较 ϵ 各阶量的大小.由方程(64)的 $\epsilon, \epsilon^3, \epsilon^5$ 得

$$\frac{\partial n_{j0}}{\partial \xi} = 0, \quad (73)$$

$$-c \frac{\partial n_{j1}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial u_{j1}}{\partial \xi} = 0, \quad (74)$$

$$-c \frac{\partial n_{j2}}{\partial \xi} + n_{j0} \frac{\partial u_{j2}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_{j1} u_{j1}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (n_{j0} u_{j1}) = 0. \quad (75)$$

由方程(65)的 ϵ^3, ϵ^5 得

$$-m_j c \frac{\partial u_{j1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = 0, \quad (76)$$

$$-m_j c \frac{\partial u_{j2}}{\partial \xi} + m_j u_{j1} \frac{\partial u_{j1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} = 0. \quad (77)$$

由方程(66)的 $\epsilon^0, \epsilon^2, \epsilon^4$ 得

$$n_{a0} + n_{b0} = 1, \quad (78)$$

$$n_{a1} + n_{b1} + \phi_1 = 0, \quad (79)$$

$$n_{a2} + n_{b2} + \phi_2 - \frac{1}{2} \phi_1^2 - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} = 0. \quad (80)$$

由方程(74)–(76)–(79)可得

$$n_{j1} = -\frac{n_{j0}}{m_j c^2} \phi_1, \quad (81)$$

$$u_{j1} = -\frac{1}{m_j c} \phi_1, \quad (82)$$

$$c^2 = \frac{n_{a0}}{m_a} + \frac{n_{b0}}{m_b}. \quad (83)$$

由方程(75)–(77)–(80)可得

$$2 \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \alpha \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} + \beta \phi_1 = 0, \quad (84)$$

其中

$$\alpha = 1 - \frac{3}{m_a c^2}, \quad (85)$$

$$\beta = \frac{m_b c^2 - 1}{n_{a0} m_b c^2} \frac{\partial n_{a0}}{\partial \eta}. \quad (86)$$

作变换:

$$\eta = 2\tau, \quad (87)$$

$$\phi_1 = \frac{6}{\alpha} \phi', \quad (88)$$

方程(84)化为

$$\phi'_\tau + 6\phi' \phi'_\xi + \phi'_{\xi\xi\xi} + \beta \phi' = 0. \quad (89)$$

方程(89)称为 KdV 型方程. 如果 $\beta = 0$, 方程(89)即为标准 KdV 方程, 它有单孤子解

$$\phi' = a_0 \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{a_0}{2}} [\xi - 2a_0 \tau], \quad (90)$$

其中 a_0 为孤子振幅, $\sqrt{\frac{2}{a_0}}$ 为孤子宽度, $2a_0$ 为孤子速度. 如果 $\beta \neq 0$, 假设有单孤子从分界面的左侧传向分界面, 在分界面内此单孤子在传播过程中其速度和振幅等将会发生变化. 仍假定方程(89)有准孤子解^[13–16]

$$\phi' = \alpha(\tau) \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{\alpha(\tau)}{2}} [\xi - 2\alpha(\tau)\tau], \quad (91)$$

其中

$$\alpha(\tau) = \alpha(\tau_0) \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} \beta d\tau'\right), \quad (92)$$

其振幅可由

$$\frac{\alpha(\tau)}{\alpha(\tau_0)} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \ln\left[\frac{(m_a - m_b)n_{a0}(\tau) - m_a}{(m_a - m_b)n_{a0}(\tau_0) - m_a}\right]\right\} \quad (93)$$

给出. 由此可见, 此单孤子在穿过分界面后, 其振幅变化关系为

$$a_b = a_a \exp\left[-\frac{1}{2} \ln\left(\frac{m_a}{m_b}\right)\right]. \quad (94)$$

考虑量纲化过程: $m_a = \frac{m'_a}{m_d}$, $m_b = \frac{m'_b}{m_d}$, $m_d = \frac{m'_a + m'_b}{2}$, 所以 $m_b = 2 - m_a$, $m_a < 1$ 对应于 $m_a < m_b$, $m_a > 1$ 对应于 $m_a > m_b$. 因此方程(94)可化为

$$a_b = a_a \exp \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_a}{2 - m_a} \right) \right]. \quad (95)$$

a_b/a_a 随 m_a 的变化如图 4 所示. 因此, 如果 $m_a < 1$, 即 $m_b > m_a$, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 入射单孤子穿过分界面后, 孤子的振幅将增大, 速度将变快; 如果 $m_a > 1$, 即 $m_b < m_a$, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 入射单孤子穿过分界面后, 孤子振幅将减小, 速度将减慢. 此结论与文献 [20] 离子等离子体情形一致, 也与分界面不连续情形下尘埃等离子体的结论一致, 但与离子等离子体不同的是, 在离子等离子体中, $n_{j1} = \frac{n_{j0}}{m_j c^2} \phi_1$, $u_{j1} = \frac{1}{m_j c} \phi_1$, 而在尘埃等离子体中, $n_{j1} = -\frac{n_{j0}}{m_j c^2} \phi_1$, $u_{j1} = -\frac{1}{m_j c} \phi_1$, 充分说明了尘埃微粒对等离子体集体效应的影响.

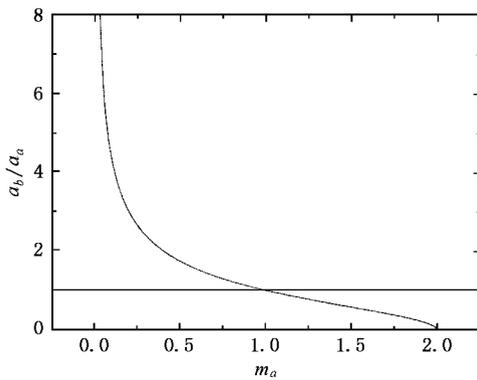


图 4 a_b/a_a 随 m_b 的变化

4. 结 论

本文在低阶近似下, 对于小的、但有限振幅的长

波振动, 运用约化摄动法研究了非均匀尘埃等离子体中孤子的传播情况. 研究表明: 在非均匀尘埃等离子体中, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 孤子可以用 KdV 方程(或 KdV 型方程)来描述, 而且电势孤子的传播情况在定性上与离子等离子体中电势孤子的传播情况一致. 无论是分界面不连续变化还是连续变化, 对于小的、但有限振幅的长波振动, 电势孤子从质量小的尘埃等离子体穿过分界面进入质量大的尘埃等离子体, 电势孤子的振幅将增大, 速度将变快, 反之, 电势孤子从由质量大的尘埃微粒组成的尘埃等离子体穿过分界面进入由质量小的尘埃微粒组成的尘埃等离子体, 电势孤子的振幅将减小, 速度将减缓. 但对尘埃微粒的数密度孤子和速度孤子, 其振幅符号与离子等离子体刚好相反. 当分界面不连续变化时, 对离子等离子体, $\phi_1^T = n_1^T = u_1^T$, $\phi_1^I = n_1^I = u_1^I$, $\phi_1^R = n_1^R = -u_1^R$, 而对尘埃等离子体, $\phi_1^T = -n_1^T = -u_1^T$, $\phi_1^I = -n_1^I = -u_1^I$, $\phi_1^R = -n_1^R = u_1^R$; 当分界面连续变化时, 在离子等离子体中, $n_{j1} = \frac{n_{j0}}{m_j c^2} \phi_1$, $u_{j1} = \frac{1}{m_j c} \phi_1$, 而在尘埃等离子体中, $n_{j1} = -\frac{n_{j0}}{m_j c^2} \phi_1$, $u_{j1} = -\frac{1}{m_j c} \phi_1$. 这些结论充分说明尘埃微粒对等离子体集体效应的影响, 尘埃等离子体并不是在原先的等离子体中加入尘埃微粒的简单混合, 而是尘埃微粒与离子、电子及电磁场等相互作用的整体.

[1] Tsytovich V N and Havnes O 1993 *Commun. Plasma Phys. Control. Fusion* **15** 267

[2] Bingham R, de Angelis U, Tsytovich V N and Havnes O 1991 *Phys. Fluids B* **3** 811

[3] Rao N N, Shukla P K and Yu M Y 1990 *Planet. Space Sci.* **38** 543

[4] Duan W S, Lü K P and Zhao J B 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1088

[5] Wang X L, Chen Y H and Wei R J 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 580

[6] Duan W S, Shi Y R, Hong X R, Lü K P and Zhao J B 2002 *Phys. Lett. A* **295** 133

[7] Duan W S, Hong X R, Shi Y R, Lü K P and Sun J A 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1231

[8] Chen L L and Chen W Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 955 (in Chinese) [陈黎丽、陈伟中 2002 物理学报 **51** 955]

[9] Zhang S Q, Xu G Q and Li Z B 2002 *Chin. Phys.* **11** 993

[10] Mamun A A, Chirns R A and Shukla P K 1996 *Phys. Plasmas* **3** 2610

[11] Mamun A A, Cairns P A and Shukla P K 1996 *Phys. Plasmas* **3** 702

[12] Tagare S G 1997 *Phys. Plasmas* **4** 3167

[13] Ono H 1972 *J. Phys. Soc. Japan* **32** 332

[14] Ono H 1991 *J. Phys. Soc. Japan* **60** 4127

[15] Ono H 1992 *J. Phys. Soc. Japan* **61** 4336

- [16] Wadati M 1990 *J. Phys. Soc. Japan* **59** 4201
Phys. Sin. **48** 1969 (in Chinese) [吕克璞、段文山、赵金保、王本仁、魏荣爵 1999 物理学报 **48** 1969]
- [17] Duan W S , Wang B R and Wei R J 1996 *J. Phys. Soc. Japan* **65** 945
 [21] Singh S V and Rao N N 1998 *Phys. Plasmas* **5** 94
- [18] Duan W S , Wang B R and Wei R J 1997 *Phys. Rev. E* **55** 1773
 [22] Liang X *et al* 2001 *Phys. Plasmas* **8** 1459
- [19] Duan W S , Lü K P , Wang B R and Wei R J 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 705 (in Chinese) [段文山、吕克璞、王本仁、魏荣爵 1998 物理学报 **47** 705]
 [23] Ma J X *et al* 2002 *Phys. Plasmas* **9** 1584
- [20] Lü K P , Duan W S , Zhao J B , Wang B R and Wei R J 1999 *Acta Phys. Sin.* **49** 186 (in Chinese) [刘新芽 2000 物理学报 **49** 186]
 [25] Kawabara T 1976 *J. Phys. Soc. Japan* **41** 1402

The propagation of solitons in an inhomogeneous dusty plasma *

Hong Xue-Ren Duan Wen-Shan[†] Sun Jian-An Shi Yu-Ren Lü Ke-Pu

(College of Physics and Electronic Engineering , Northwest Normal University , Lanzhou 730070 , China)

(Received 26 December 2002 ; revised manuscript received 29 January 2003)

Abstract

The propagation of solitons in an inhomogeneous dusty plasma composed of two kinds of dust grains with different masses is investigated by using the reductive perturbation technique. In the lowest order , if the interface of the two kinds of dust grains is discontinuous , the transmission and reflection waves can be both described by the KdV equation. The numbers and amplitudes of both transmitted and reflected solitons from an incident soliton are given analytically for this case. If the interface of the two kinds of dust grains is continuous , neglecting the reflection , the nonlinear dust acoustic wave can be described by a KdV-type equation in the lowest order. The amplitudes , propagating velocities of these quasi-solitons for this case are also given analytically in this paper.

Keywords : dusty plasmas , soliton , KdV equation , reductive perturbation technique

PACC : 0340K , 5235S , 4735

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008) , the Natural Science Foundation of Gansu Province , China (Grant No. YS021-A22-018) , the Scientific Research Foundation from the Ministry of Human Resource and the Ministry of Education for Returned Chinese Scholars , and the Science Foundation of Northwest Normal University , China (Grant No. NWNUN-KJCXGC-215) .

[†] Corresponding author. E-mail : duanws@nwnu.edu.cn