

Tavis-Cummings 模型中三体纠缠态纠缠量的演化特性^{*}

左战春 夏云杰[†]

(曲阜师范大学物理系, 曲阜 273165)

(2002 年 12 月 12 日收到 2003 年 2 月 25 日收到修改稿)

研究两个全同二能级原子与单模场相互作用的 Tavis-Cummings 模型中的量子纠缠. 在场和两原子初始分别为真空场和纠缠或非纠缠状态下, 得出体系状态将演化为三体近似 W 纠缠态. 通过对纠缠量的计算得出: 该三体近似 W 纠缠态纠缠量的演化特性将随三体所处的初始状态、原子间及原子与场间的耦合系数、失谐程度、原子反转粒子数的变化而变化. 值得一提的是可得出原子间耦合作用强度对纠缠量的非线性效应, 并且纠缠量展现出与原子反转粒子数一致的周期振荡现象.

关键词: W 纠缠态, 纠缠量, 反转粒子数

PACC: 0365, 4250

1. 引言

在 Jaynes-Cummings 模型^[1]基础上发展而来的 Tavis-Cummings(T-C)模型处理的是两个二能级原子与单模场相互作用的模型. 目前对 T-C 模型的研究已经是硕果累累^[2,3], 黄春佳等人^[4]研究了定态双原子与单模场相互作用中场熵的压缩特性, Bogoliubov 等人^[5]对加入克尔非线性介质项或斯塔克分裂项的 T-C 模型推广的解进行了讨论, Seke 等人^[6]研究了多原子与福克态光场相互作用下(其中包括了 T-C 模型中的情况), 原子反转数呈现的振荡现象. 但对于 T-C 模型中关于量子通讯和量子信息方面特性的研究甚少.

量子纠缠态^[7]是量子力学中的一个奇妙现象, 对于量子通信和量子计算意义重大, 是 Bell 基的制备, 量子隐形传态^[8-10]、量子密钥分配^[11]、量子纠错^[12]和量子计算的基础. 近年来, 人们已经对于量子纠缠态的纠缠程度进行了广泛研究. 对于二体纠缠态, 人们已经相继提出了描述其纠缠程度的物理量——形成纠缠度^[13]、提纯纠缠度^[13]、部分熵纠缠度^[13]、相对熵纠缠度^[14]等等, 对于二体纠缠态的纠

缠程度问题已经得到了精确的描述和解决. 但由于三体或多体系统的复杂性, 至今为止, 人们对于三体或多体纠缠态的量化一直处于探讨之中. Bennett 等人提出了多粒子纯态纠缠的精确和渐近测量方案. Wong 等人^[15]提出了潜在的多粒子纠缠测量. Horodecki 等人^[16]对于任意纠缠测量需满足的限定条件给予证明.

最近 Zheng 和 Guo 提出了一种产生两原子纠缠态的方案^[17], 并用来实现量子逻辑门和量子隐形传态. 文献 18 根据纠缠张量方法, 提出了用于表示三体及三体中两两间的纠缠程度的物理量——纠缠量. 本文根据该纠缠量的定义, 对初始状态为二原子处于 Einstein-Podolsky-Rosen(EPR)纠缠态或非纠缠态两种情况, 讨论了体系纠缠量随时间演化特性及其受原子的反转粒子数的影响.

2. 模 型

在 Schrödinger 绘景中, T-C 模型中两个全同定态的二能级原子与单模场相互作用体系总的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_{z_1} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_{z_2} + \hbar \omega a^\dagger a$$

[†]E-mail: yjxia@qfnu.edu.cn

$$+ gh(a^+ \sigma_{-1} + a\sigma_{+1}) + gh(a^+ \sigma_{-2} + a\sigma_{+2}) + \epsilon h(\sigma_{-1}\sigma_{+2} + \sigma_{+1}\sigma_{-2}), \quad (1)$$

式中 ω_0 为原子的本征跃迁频率, ω 为腔场频率, $|a\rangle$ 和 $|b\rangle$ 分别为原子的激发态和基态, $\sigma_{z_1} = |a_1\rangle\langle a_1| - |b_1\rangle\langle b_1|$, $\sigma_{+1} = |a_1\rangle\langle b_1|$, $\sigma_{-1} = |b_1\rangle\langle a_1|$ 分别为原子 1 的赝自旋算符, $\sigma_{z_2} = |a_2\rangle\langle a_2| - |b_2\rangle\langle b_2|$, $\sigma_{+2} = |a_2\rangle\langle b_2|$, $\sigma_{-2} = |b_2\rangle\langle a_2|$ 分别为原子 2 的赝自旋算符, a, a^+ 分别为光子的湮没和产生算符, g 为原子-光场间的耦合常量, ϵ 为原子间偶极-偶极相互作用强度.

2.1. 初始状态为耦合双原子处于 EPR 纠缠态, 光场为真空态

初始时刻 ($t=0$) 原子-光场体系的状态波函数为

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1, b_2, 0\rangle + |b_1, a_2, 0\rangle). \quad (2)$$

任意时刻的体系状态波函数为

$$|\psi(t)\rangle = C_1(t)|a_1, b_2, 0\rangle + C_2(t)|b_1, b_2, 1\rangle + C_3(t)|b_1, a_2, 0\rangle. \quad (3)$$

在相互作用绘景中求解问题是方便的, 将(1)和(3)式代入相互作用绘景中的 Schrödinger 方程

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = V_I(t) |\psi(t)\rangle, \quad (4)$$

求解该方程, 并考虑到初始条件, 则得到

$$C_1(t) = C_3(t) = \exp\left(\frac{-i(\Delta + \epsilon)t}{2}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\lambda t + i \frac{\Delta - \epsilon}{2\sqrt{2}\lambda} \sin\lambda t\right), \quad (5)$$

$$C_2(t) = \frac{-i\sqrt{2}g}{\lambda} \exp\left(\frac{i(\Delta - \epsilon)t}{2}\right) \sin\lambda t, \quad (6)$$

其中 $\lambda = \frac{\sqrt{8g^2 + (\Delta - \epsilon)^2}}{2}$.

2.2. 初始状态为原子 1 处于激发态, 原子 2 处于基态, 光场为真空态

初始时刻体系状态波函数为

$$|\psi(0)\rangle = |a_1, b_2, 0\rangle. \quad (7)$$

重复以上计算可得到

$$C_1(t) = \frac{\exp(i\epsilon t)}{2} + \exp\left(\frac{-i(\Delta + \epsilon)t}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \cos\lambda t + i \frac{\Delta - \epsilon}{4\lambda} \sin\lambda t\right), \quad (8)$$

$$C_2(t) = \exp\left(\frac{i(\Delta - \epsilon)t}{2}\right) \frac{-ig}{\lambda} \sin\lambda t, \quad (9)$$

$$C_3(t) = -\frac{\exp(i\epsilon t)}{2} + \exp\left(\frac{-i(\Delta + \epsilon)t}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \cos\lambda t + i \frac{\Delta - \epsilon}{4\lambda} \sin\lambda t\right), \quad (10)$$

其中 $\lambda = \frac{\sqrt{8g^2 + (\Delta - \epsilon)^2}}{2}$.

可见, 两种初始状态下, 体系都将演变为三体二能级近似 W 纠缠态. 与三体 GHZ 纠缠态相比, W 纠缠态是三体二能级纠缠态中“最强壮”的纠缠态, 因为即使丢失其中一个粒子, 剩余的两个粒子仍处于纠缠态.

3. 理论推导与分析

根据文献 [18] 提出的关于三体纠缠态纠缠量的公式, 对该体系的纠缠量进行计算. 其中三体纠缠量及三体中两两间的纠缠量的公式如下:

$$E_3 = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 M_{ijk}(1,2,3) M_{ijk}(1,2,3) \quad (11)$$

$$E_2(m,n) = \frac{1}{3} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij}(m,n) M_{ij}(m,n), \quad (12)$$

$$M_{ij}(m,n) = K_{ij}(m,n) - \lambda_i(m)\lambda_j(n), \quad (13)$$

$$M_{ijk}(1,2,3) = K_{ijk}(1,2,3) - \lambda_i(1)M_{jk}(2,3) - \lambda_j(2)M_{ik}(1,3) - \lambda_k(3)M_{ij}(1,2) - \lambda_i(1)\lambda_j(2)\lambda_k(3), \quad (14)$$

$$\lambda_i(1) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{1} \otimes \hat{1}), \quad (15)$$

$$\lambda_j(2) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{1}), \quad (16)$$

$$\lambda_k(3) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{1} \otimes \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_k), \quad (17)$$

$$K_{ij}(1,2) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{1}), \quad (18)$$

$$K_{ik}(1,3) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_k), \quad (19)$$

$$K_{jk}(2,3) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{1} \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k), \quad (20)$$

$$K_{ijk}(1,2,3) = \text{Tr}(\rho \cdot \hat{\sigma}_i \otimes \hat{\sigma}_j \otimes \hat{\sigma}_k), \quad (21)$$

其中 $\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k$ 为泡利矩阵, $\hat{1}$ 为单位矩阵, ρ 为体系的密度算符.

对该问题中的三体纠缠量进行求解, 可得到

$$E_3 = 8|C_1|^2|C_2|^2|C_3|^2 + 64|C_1|^4|C_2|^4|C_3|^4, \quad (22)$$

$$E_2(1,2) = \frac{1}{3}(8|C_1|^2|C_3|^2 + 16|C_1|^4|C_3|^4), \quad (23)$$

$$E_2(1,3) = \frac{1}{3}(8|C_1|^2|C_2|^2 + 16|C_1|^4|C_2|^4), \quad (24)$$

$$E_2(2,3) = \frac{1}{3}(8|C_2|^2|C_3|^2 + 16|C_2|^4|C_3|^4). \tag{25}$$

三体 W 纠缠态的纠缠量各种条件下随时间的演化行为如图 1 至图 4 所示。

由各图可以看出,该三体近似 W 纠缠态的纠缠量随时间的演化表现为周期性振荡行为,并且振荡特性与原子反转粒子数相一致.为了与其进行比较,计算了原子 1 和原子 2 的反转粒子数并画出其随时间演化的曲线(如图 5).

$$W_1(t) = a_1|\rho_{a_1}|a_1 - b_1|\rho_{a_1}|b_1 = |C_1(t)|^2 - |C_2(t)|^2 - |C_3(t)|^2, \tag{26}$$

$$W_2(t) = a_2|\rho_{a_2}|a_2 - b_2|\rho_{a_2}|b_2 = |C_3(t)|^2 - |C_2(t)|^2 - |C_1(t)|^2, \tag{27}$$

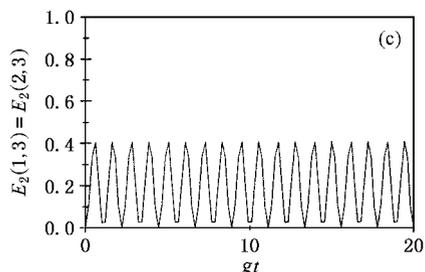
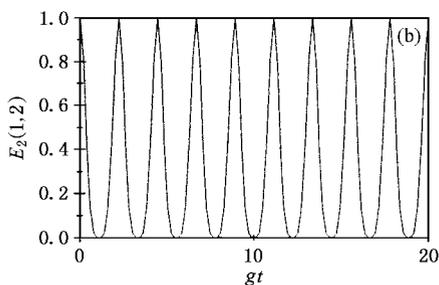
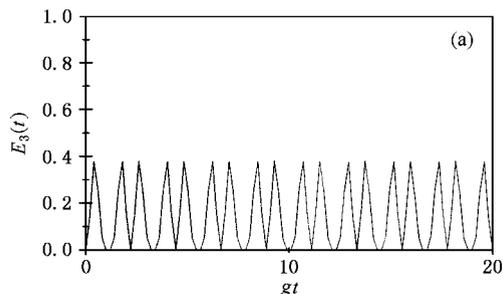


图 1 第一种情况时体系的纠缠量随时间演化

$$\Delta = g, \epsilon = g$$

其中 ρ_{a_1}, ρ_{a_2} 分别为原子 1、原子 2 的约化密度算符。

可以看出,原子反转粒子数呈现的振荡现象与原子间的耦合作用强度有关.对于初始二原子处于纠缠态的情况,当原子间耦合作用与原子与场间耦合相比过弱时,原子反转粒子数呈现出周期振荡现象,但达不到最大反转数.当耦合强度增大到一定值时,振荡消失,原子反转粒子数始终为零,原子相当于处在俘获状态;而对于初始二原子处于非纠缠态的情况,原子反转粒子数出现振荡幅度较大的周期振荡,并且反转数可达到最大和最小,即原子在激发态与基态间稳定跃迁.这说明了原子间的耦合强度对原子的反转粒子数表现出非线性效应,另外也可得到原子反转粒子数与初始时原子与场体系的状态有关。

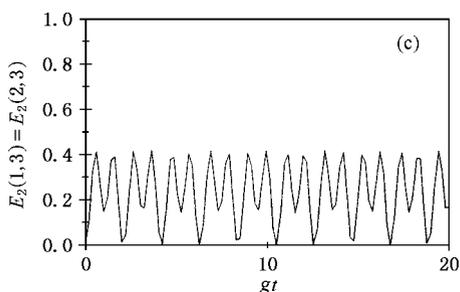
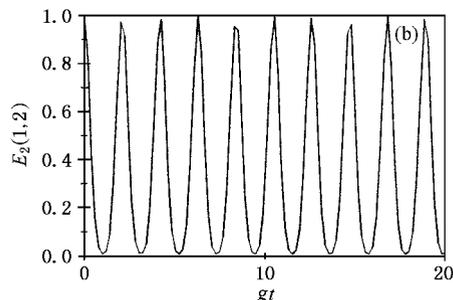
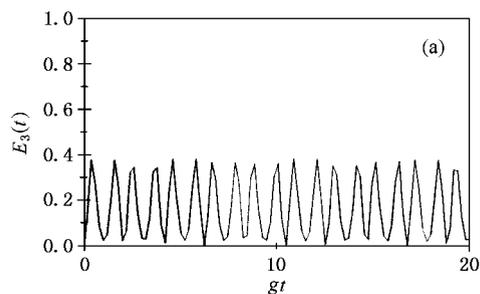


图 2 第一种情况共振时体系的纠缠量随时间的演化

$$\Delta = 0, \epsilon = g$$

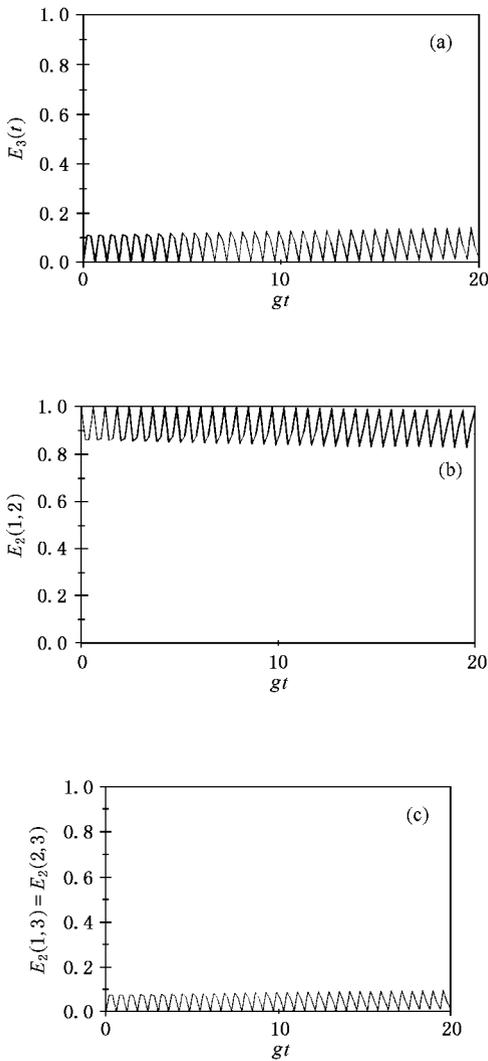


图3 第一种情况共振时体系的纠缠量随时间的演化 $\Delta = 0$, $\varepsilon = 10g$

比较各图可以看出该体系纠缠量主要表现出以下演化特性.

3.1. 周期振荡性

各图中体系的纠缠量都呈现出明显的随时间变化的周期振荡性.而且周期的大小与单模场及二原子构成体系的初始状态有关,与两原子间和原子与场间的耦合系数、失谐程度及原子反转粒子数的影响有关.

3.2. 体系三体纠缠量与三体中两两间的纠缠量有关

观察图1至图4可见,体系的三体纠缠量与三体中两两间纠缠量的振荡周期相等,而且三体纠缠量相当于两两间纠缠量的叠加,两两间纠缠量可影响整个

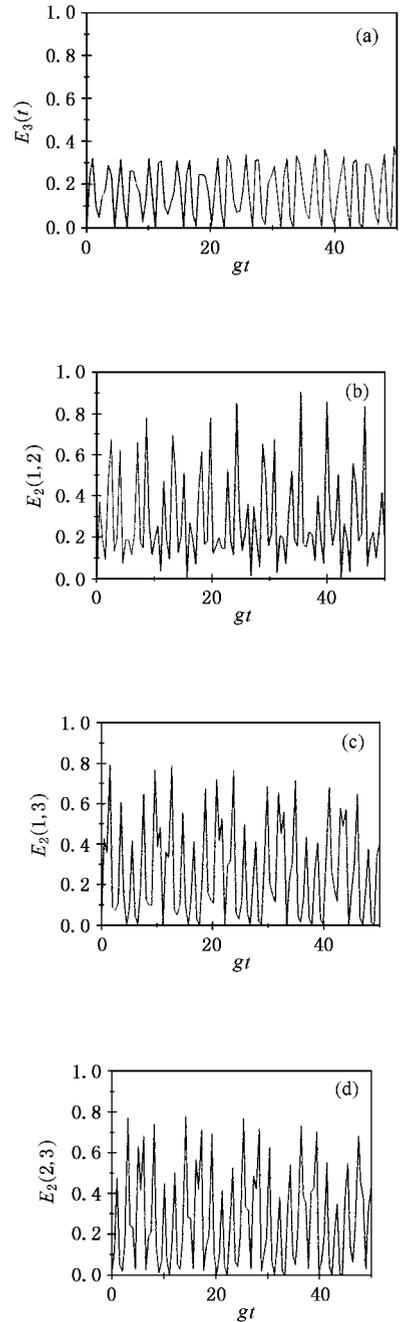


图4 第二种情况时体系的纠缠量随时间演化 参数见图1

体系的三体纠缠量,两两间纠缠越紧密,即纠缠量越大,三体的纠缠也越紧密,三体纠缠量也越大,反之三体纠缠量则越小.若两两间纠缠有疏有密,有大有小,则叠加后,相互抵消对三体纠缠起到了削弱作用.

3.3. 纠缠量随初始时场与二原子所处状态的不同而不同

对照图1与图4,可以看出,初始状态不同,周期

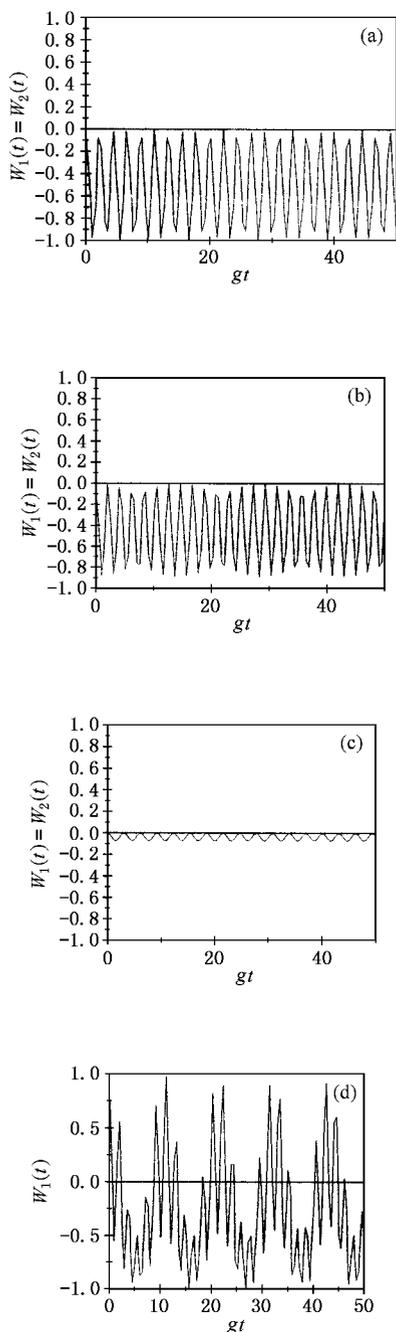


图5 原子1和原子2的反转粒子数随时间的演化 (a)–(c)为第一种情况 (d)为第二种情况. (a) $\Delta = g$, $\epsilon = g$ (b) $\Delta = 0$, $\epsilon = g$, (c) $\Delta = 0$, $\epsilon = 10g$ (d) $\Delta = g$, $\epsilon = g$

的改变不太明显,但振荡形式发生了明显改变.当初始为二原子纠缠时,二原子间的纠缠量振荡并不剧烈,周期性明显,甚至还可达到最大纠缠量1.而初始二原子非纠缠时,振荡相对混乱,周期性不明显,二者间纠缠量难以达到最大纠缠量.而且三体中的两两间纠缠量受初始状态的影响更大些,初始二原子处于纠

缠时,得到两个原子与场的二体纠缠量相等;初始时二原子处于非纠缠时,得到原子1分别与原子2和场的二体纠缠量呈现互补式的变化,二者的相互抵消作用导致三体纠缠量趋于稳定的振荡.

3.4. 纠缠量与失谐程度有关

对照图1与图2,可以看出,随失谐量的增加,纠缠量变化的周期变小,频率变快,但振荡却趋于稳定.当原子与场间失谐量为零时,对于初始为二原子处于纠缠态时,二原子的纠缠量呈现出明显的振荡现象,原子与场间的纠缠量呈现相对稳定的振荡,而初始为二原子处于非纠缠态时,原子1分别与场和原子2的纠缠量相等,而原子2与场间的纠缠量呈现出振荡现象,这说明失谐量的影响在共振情况下的特殊性.

3.5. 纠缠量随二原子间偶极-偶极相互作用强度的变化而变化

对照图2与图3,可以看出,在二原子耦合量远远小于原子与场间的耦合量时,体系纠缠量呈现出相对稳定的振荡,随原子间耦合系数的增加,振荡愈加剧烈,周期变小,三体中两两间纠缠量呈现出明显的振荡现象.但当二原子耦合量远远大于原子与场间的耦合量时,三体纠缠量却趋于零,即此时可达到非纠缠态,其原因是随二原子间偶极-偶极相互作用强度的增大,使二原子间强烈纠缠,甚至二原子纠缠态只在最大纠缠态附近振荡,而二原子与场间的纠缠量都为零,即在非纠缠态附近振荡,这样两两纠缠量的叠加导致三体纠缠量趋于零,整个三体纠缠体系趋近于非纠缠态.可见,原子间的偶极-偶极相互作用对纠缠程度的影响是一种非线性效应.

3.6. 纠缠量受原子反转粒子数的影响

对照图1至图4与图5,可以看出,纠缠量与原子反转粒子数密切相关,纠缠量的振荡与原子反转粒子数的振荡现象一致.对于第一种情况初始二原子处于纠缠态,当二原子耦合作用弱时,原子的反转粒子数呈现周期稳定的振荡,导致原子1与原子2的纠缠量的振荡现象,又由于叠加上原子与场此时的稳定振荡,使得三体纠缠量较为稳定;当二原子耦合作用足够强时,原子的反转粒子数趋于零,从而引起二原子间纠缠为最大纠缠,而原子与场间为非纠缠,导致三体纠缠在非纠缠态附近振荡.对于第二种情况,初始二原子处于非纠缠态,原子反转数振荡幅度较大,从而使得纠缠量的振荡幅度较大,表现出相对较混乱.

可见 纠缠量受原子反转粒子数的影响更大些.

3.7. 该体系近似三体 W 纠缠态与理想 W 纠缠态的比较

理想三体 W 纠缠态表示为 $|\psi_w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1,0,0\rangle + |0,0,1\rangle + |0,1,0\rangle)$ 通过对纠缠量的计算可得到: $E_3(1,2,3) \approx 0.4$, $E_2(1,2) = E_3(1,3) = E_2(2,3) \approx 0.36$, 与该体系的纠缠量相比, 体系三体纠缠量最大时可达理想三体纠缠量, 一般比理想纠缠量低, 呈现振荡情况. 而三体中两两间纠缠量与理想三体两两间纠缠量相比, 有时可超出理想情况, 甚至可达到纠缠量的最大值 1, 当然此时另外的两两间纠缠量一定会很小, 起到抵消的削弱作用, 从而使得叠加后的三体纠缠量不会超出理想值.

最终可得到: 在原子间耦合量适当时, 特别在原子与场共振时, 该三体 W 纠缠体系的纠缠量可呈现

出与原子反转粒子数一致的周期振荡现象.

4. 结 论

通过对 T-C 模型中两个定态二能级原子与单模场相互作用体系状态波函数的计算和对纠缠量演化特性的分析, 得到体系将演化为近似三体 W 纠缠态, 纠缠量呈现出周期振荡现象. 对腔中二原子与腔场的相互作用的纠缠量问题进行了研究, 以期在纠缠态的制备等实验中得到一些启示. 三体 W 纠缠态纠缠量振荡现象的研究对于研究纠缠量与原子的布居数的关系, 纠缠量与量子纠缠程度关系等方面有重要意义, 而且对于多体纠缠程度量化问题起到了基础作用, 我们将在未来的工作中深入研究纠缠量在其他量子光学体系方面的特点.

-
- [1] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing Science Press) p81 (in Chinese) [彭金生、李高翔著 1996 近代量子光学导论(北京: 科学出版社) 第 81 页]
- [2] Wang C Z and Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 (in Chinese) [王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989]
- [3] Li C X and Fang M F 2003 *Chin. Phys.* **12** 294
- [4] Huang C J et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 805 (in Chinese) [黄春佳等 2002 物理学报 **51** 805]
- [5] Bogoliubov N M et al 1996 *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 6305
- [6] Seke J and Rattay F 1989 *Phys. Rev. A* **39** 171
- [7] Zeng J Y, Pei S Y and Long G L 2001 *New Progresses of Quantum Mechanics* (Beijing: Peking University Press) p282 (in Chinese) [曾谨言、裴寿镛、龙桂鲁 2001 量子力学新进展(第二辑)(北京: 北京大学出版社) 第 282 页]
- [8] Bennett C H et al 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [9] Ye L and Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 996
- [10] Zheng Y Z et al 2002 *Chin. Phys.* **11** 537
- [11] Deutsch D et al 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2818
Deutsch D et al 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2202
- [12] Shor P W 1995 *Phys. Rev. A* **52** 2493
- [13] Bennett C H et al 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
- [14] Vedral V et al 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [15] Wong A and Christensen N 2001 *Phys. Rev. A* **63** 44301
- [16] Horodecki M, Horodecki P and Horodecki R 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2014
- [17] Zheng S B and Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [18] Tong Z Y and Kuang L M 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 469

The evolution property of three-body entanglement measure in Tavis-Cummings model

Zuo Zhan-Chun Xia Yun-Jie

(*Department of Physics , Qufu Normal University , Qufu 273165 , China*)

(Received 12 December 2002 ; revised manuscript received 25 February 2003)

Abstract

This paper studies the quantum entanglement of the Tavis-Cummings model for two steady identical two-level atoms interacting with a single-mode field. When the field is vacuum and the two atoms stay in Einstein-Podolsky-Rose entangled state or disentangled state initially, we obtain that the system will evolve to a three-body approximate W entangled state. The entanglement measure will change with the variation of system initial state, coupling coefficients, detuning degree and atomic population inversion. It should be noted that the atomic coupling coefficient exhibits the nonlinear effect and the entanglement measure oscillates periodically in accordance with atomic population inversion.

Keywords : W entangled state, entanglement measure, population inversion

PACC : 0365, 4250