第 52 卷 第 11 期 2003 年 11 月
1000-3290/2003/52(11)/2706-06
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.52,No.11,November,2003
©2003 Chin.Phys.Soc.

静磁场中双极化态弱平面引力波对高斯束的扰动能量*

李芳昱[1)†]　石东平[1)2)]　代洪霞[1)3)]

1)(重庆大学物理系,重庆　400044)
2)(重庆渝西学院物理系,重庆　402168)
3)(重庆工商大学物理系,重庆　400033)

(2003 年 2 月 12 日收到;2003 年 3 月 18 日收到修改稿)

讨论了处于静磁场中双极化态弱平面引力波对高斯束的一阶和二阶扰动能量,数值计算表明,引力波对整个电磁体系的能量扰动很小.换言之,背景电磁场在引力波作用下其总能量不会发生明显改变,但在局部区域中产生的扰动能流则可能引起可供观测的效应.

关键词:双极化态弱平面引力波,高斯束,电磁响应,扰动能量
PACC:0430,0440,0480

1. 引　　言

传统的引力波检测方案(如韦伯棒、大型激光干涉仪和预期的空间引力波天线阵列等)只限于检测 10^{-7}—10^3 Hz 频带的天体引力波[1—5].近年来,精质暴胀宇宙模型 QIM(quintessential inflationary models)预期了峰值能谱处在 GHz 频带的高频遗迹引力波[6—9],上述高频引力波的谐振频带远离 10^{-7}—10^3 Hz 范围,因而对于高频引力波的探测只有另辟途径.由于广义相对论预言的引力波的传播速度恰好等于真空中的光速,所以它与电磁波可望产生理想的相干效应.引力波的电磁响应是引力理论目前的研究热点之一,人们认为引力波可由电磁方法产生,也可由电磁方法进行探测[8,10—18].最近,有人提出了利用超导量子流体在实验室微波频段实现引力波和电磁波间相互转换的方案[14],目前它已成为人们关注的热点之一.该方案所预期的典型频段数量级约为 10^{10} Hz,引力波的无量纲振幅数量级约为 10^{-31},这与 QIM 所预期的高频遗迹引力波在频段和振幅数量级上大致一致.关于引力波对电磁场的一阶扰动能流,我们已经作过较深入的讨论[15—18],但对于整个体系相应的能量扰动机理却尚不清楚.本文拟研究静态磁场中双极化态弱平面引力波场对高斯束的作用.计算结果表明,引力波对高斯束的总能量基本没有贡献,但文献[8,15,18]的研究表明,引力波对高斯束(或平面电磁波)扰动后,可望在系统的局部区域产生与背景电磁波束传播方向相正交的切向能流.因此,高斯束(或背景电磁波)在引力波作用下虽然没有明显的能量变化,但在局部区域却可望产生与背景电磁场相垂直的一阶扰动能流.这一特性可望对引力波的电磁探测提供一种新的显示方案.

2. 静态磁场中双极化态弱平面引力波对高斯束的扰动能量

本文采用国际单位制.假定双极化态弱平面引力波(同频圆形极化引力波)沿 z 轴正方向传播,其表达式为

$$\begin{aligned} h_{xx} &= -h_{yy} = A_{\oplus}\cos(kz-\omega t),\\ h_{xy} &= h_{yx} = -A_{\otimes}\sin(kz-\omega t), \end{aligned}\tag{1}$$

根据上式,写出度规的协变和逆变形式为

$$\begin{aligned} &g_{00}=1,\quad g_{11}=-1+h_{xx},\quad g_{22}=-1+h_{yy},\\ &g_{33}=-1,\quad g_{12}=h_{xy}=g_{21}, \end{aligned}\tag{2}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10175096)及湖北省引力与量子实验室开放基金(批准号:GQ0101)资助的课题.

† E-mail:fangyuli@cqu.edu.cn.

$$g^{00}=1,\quad g^{11}=-1-h_{xx},\quad g^{22}=-1-h_{yy},$$
$$g^{33}=-1,\quad g^{12}=-h_{xy}=g^{21}. \tag{3}$$

设背景高斯束的对称轴为 z 轴,其电场分量沿 x 方向,即[19]

$$\tilde{E}_x^{(0)}=\psi=\frac{\psi_0}{[1+(z/f)^2]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\cos\Big[(kz-\omega t)-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\Big], \tag{4}$$

其中 $r^2=x^2+y^2$,$k=\frac{2\pi}{\lambda}$,$f=\frac{\pi W_0^2}{\lambda}$,$R=z+\frac{f^2}{z}=\frac{f^2+z^2}{z}$,$W=W_0(1+z^2/f^2)^{1/2}$,$\psi_0$ 为振幅,W_0 为高斯束的光腰半径(即 $z=0$ 平面上高斯束的半径),δ 为位相因子.对应的磁场分量可由 $\tilde{\boldsymbol{B}}^{(0)}=-\frac{i}{\omega}\nabla\times\tilde{\boldsymbol{E}}^{(0)}$ 求出(此处的 i 相当于位相超前 $\pi/2$),结果为 $\tilde{\boldsymbol{B}}_x^{(0)}=0$,

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{B}}_y^{(0)}=&\frac{\psi_0 fz}{\omega(f^2+z^2)^{3/2}}\Big[\frac{2r^2f^2}{W_0^2(f^2+z^2)}-1\Big]\\&\times\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\sin\Big[(kz-\omega t)-\arctan\frac{z}{f}\\&+\frac{kr^2}{2R}+\delta\Big]+\frac{\psi_0 f}{\omega(f^2+z^2)^{1/2}}\\&\times\Big[k+\frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)^2}-\frac{f}{f^2+z^2}\Big]\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\\&\times\cos\Big[(kz-\omega t)-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_z^{(0)}=&\frac{2\psi_0 yf^3}{\omega W_0^2(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\sin\Big[(kz-\omega t)\\&-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\Big]\\&-\frac{k\psi_0 yfz}{\omega(f^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\cos\Big[(kz-\omega t)\\&-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\Big].\end{aligned} \tag{5}$$

这里设背景静磁场 $\hat{B}^{(0)}$ 的方向沿 y 轴正向,定域于 $-l/2\leqslant z\leqslant l/2$.这时电磁场张量可以表示为

$$F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{(0)}+\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}, \tag{6}$$

其中 $F_{\mu\nu}^{(0)}$,$\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ 分别为背景电磁场张量和引力波对背景场的一阶扰动电磁场张量.对于非零的 $F_{\mu\nu}^{(0)}$ 和 $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$,有 $|F_{\mu\nu}^{(0)}|\gg|\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}|$.$\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ 的分量可通过求解弯曲时空的 Maxwell 方程得到.使用弱线性引力场度规提升指标,得到电磁场张量的混合形式和逆变形式为

$$\begin{aligned}F_\alpha^\mu&=g^{\mu\nu}F_{\nu\alpha}=(\eta^{\mu\nu}-h^{\mu\nu})(F_{\nu\alpha}^{(0)}+\tilde{F}_{\nu\alpha}^{(1)})\\&=F_\alpha^{\mu(0)}+\tilde{F}_\alpha^{\mu(1)}+\tilde{F}_\alpha^{\mu(2)},\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}F^{\mu\nu}&=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\alpha\beta}=(\eta^{\mu\alpha}-h^{\mu\alpha})(\eta^{\nu\beta}-h^{\nu\beta})(F_{\alpha\beta}^{(0)}+\tilde{F}_{\alpha\beta}^{(1)})\\&=F^{\mu\nu(0)}+\tilde{F}^{\mu\nu(1)}+\tilde{F}^{\mu\nu(2)}+0(h^3),\end{aligned} \tag{8}$$

其中上角(0),(1)和(2)分别为背景电磁场、引力波对电磁场引起的一阶扰动和二阶扰动,$\eta^{\mu\nu}$ 为 Minkowski 度规.

由于引力波同高斯束(或电磁波)和静态磁场直接作用所产生的一阶扰动的振幅数量级比为 $\frac{h\tilde{B}^{(0)}}{h\hat{B}^{(0)}}$[15,18],由(5)式可知 $\tilde{B}^{(0)}$ 与 ψ/c 为同一数量级,这里选择 $\psi/c\approx10^{-3}\,\mathrm{T}$,$\hat{B}^{(0)}\approx10\,\mathrm{T}$,所以上述比值为 10^{-4}.因此,从观测效应上看,前者可以忽略.简言之,高斯束在这里的贡献主要表现为:它同引力波在静态磁场 $\hat{B}^{(0)}$ 中直接作用产生一阶扰动 $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ 间的相干谐振.即当一阶扰动 $\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ 的频率 ω_g(引力波的频率)与高斯束频率 ω_e 相等($\omega_e=\omega_g=\omega$)时,$\tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ 与高斯束产生谐振响应.求解弯曲时空的 Maxwell 方程[20,21]可以得到引力波对背景静态磁场的一阶扰动.参照文献[15,18],可得扰动解为

1)区域Ⅰ($-l/2\leqslant z\leqslant l/2$,背景静磁场 $\hat{B}_y^{(0)}=\hat{B}^{(0)}$)

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{01}^{(1)}&=\frac{\tilde{E}_x^{(1)}}{c}=-\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}k(z+l/2)\sin(kz-\omega t)\\&\quad-\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}\sin(kz)\sin(\omega t),\\ \tilde{F}_{13}^{(1)}&=\tilde{B}_y^{(1)}=-\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}k(z+l/2)\sin(kz-\omega t)\\&\quad+\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}\sin(kz)\sin(\omega t),\\ \tilde{F}_{02}^{(1)}&=\frac{\tilde{E}_y^{(1)}}{c}=-\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}k(z+l/2)\cos(kz-\omega t)\\&\quad-\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}\sin(kz)\cos(\omega t),\\ \tilde{F}_{32}^{(1)}&=\tilde{B}_x^{(1)}=\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}k(z+l/2)\cos(kz-\omega t)\\&\quad-\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}\sin(kz)\cos(\omega t).\end{aligned} \tag{9}$$

2)区域Ⅱ($l/2\leqslant z\leqslant l_0$,背景静磁场 $\hat{B}_y^{(0)}=0$)

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{01}^{(1)}&=\frac{\tilde{E}_x^{(1)}}{c}=-\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}kl\sin(kz-\omega t),\\ \tilde{F}_{13}^{(1)}&=\tilde{B}_y^{(1)}=-\frac{1}{2}A_\oplus\hat{B}^{(0)}kl\sin(kz-\omega t),\\ \tilde{F}_{02}^{(1)}&=\frac{\tilde{E}_y^{(1)}}{c}=-\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}kl\cos(kz-\omega t),\\ \tilde{F}_{32}^{(1)}&=\tilde{B}_x^{(1)}=\frac{1}{2}A_\otimes\hat{B}^{(0)}kl\cos(kz-\omega t).\end{aligned} \tag{10}$$

为了满足边界条件,式中 l 应满足关系式 $l=n\lambda$

(n 为整数),而 l_0 为二阶扰动能流保持为平面电磁波形式的有效区域.

由于 $z \leqslant -l/2$ 为零效应区,这里不予考虑,因此背景电磁场张量及其一阶扰动张量的协变形式分别为

$$F_{01}^{(0)} = \frac{\tilde{E}_x^{(0)}}{c}, \quad F_{12}^{(0)} = -\tilde{B}_z^{(0)},$$
$$F_{13}^{(0)} = \hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)}, \tag{11}$$
$$\tilde{F}_{01}^{(1)} = \frac{\tilde{E}_x^{(1)}}{c}, \quad \tilde{F}_{02}^{(1)} = \frac{\tilde{E}_y^{(1)}}{c},$$
$$\tilde{F}_{13}^{(1)} = \tilde{B}_y^{(1)}, \tilde{F}_{23}^{(1)} = -\tilde{B}_x^{(1)}. \tag{12}$$

将(7)和(8)式展开,并把(11)和(12)式代入,即可分别得到混合形式和逆变形式电磁场张量的背景、一阶和二阶小量的表达式.

引力波场中电磁场能量动量张量的一般表达式为

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\Big[-F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big], \tag{13}$$

将(6)—(8)式代入(13)式,$T^{\mu\nu}$ 则可以分解为下列三部分:

$$T^{\mu\nu} = \overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu} + \overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu} + \overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu}, \tag{14}$$

其中 $\overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu}$ 为背景电磁场的能量动量张量,$\overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu}$ 和 $\overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu}$ 分别为引力波对背景电磁场的一阶和二阶扰动.对于非零的 $\overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu}$,$\overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu}$ 和 $\overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu}$,有 $|\overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu}| \geqslant |\overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu}| \geqslant |\overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu}|$.于是得到电磁场的各阶能量动量张量为

$$\overset{(0)}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\Big(-F^{\mu}_{\alpha}{}^{(0)}F^{\nu\alpha(0)} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^{(0)}F^{\alpha\beta(0)}\Big), \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\Big[&-(F^{\mu}_{\alpha}{}^{(0)}\tilde{F}^{\nu\alpha(1)} + \tilde{F}^{\mu}_{\alpha}{}^{(1)}F^{\nu\alpha(0)}) \\ &+ \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\tilde{F}_{\alpha\beta}^{(1)}F^{\alpha\beta(0)} + F_{\alpha\beta}^{(0)}\tilde{F}^{\alpha\beta(1)}) \\ &- \frac{1}{4}h^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^{(0)}F^{\alpha\beta(0)}\Big],\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{T}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\Big[&-(\tilde{F}^{\mu}_{\alpha}{}^{(0)}\tilde{F}^{\nu\alpha(2)} + \tilde{F}^{\mu}_{\alpha}{}^{(1)}\tilde{F}^{\nu\alpha(1)} + \tilde{F}^{\mu}_{\alpha}{}^{(2)}\tilde{F}^{\nu\alpha(0)}) \\ &+ \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\tilde{F}_{\alpha\beta}^{(1)}\tilde{F}^{\alpha\beta(1)} + \tilde{F}_{\alpha\beta}^{(0)}\tilde{F}^{\alpha\beta(2)}) \\ &- \frac{1}{4}h^{\mu\nu}(F_{\alpha\beta}^{(0)}\tilde{F}^{\alpha\beta(1)} + \tilde{F}_{\alpha\beta}^{(1)}F^{\alpha\beta(0)})\Big].\end{aligned} \tag{17}$$

它们对应的 00 分量即能量密度,表达式为

$$\overset{(0)}{T}{}^{00} = \frac{1}{2\mu_0}\Big[(\hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)})^2 + (\hat{B}_z^{(0)})^2 + \Big(\frac{\tilde{E}_x^{(0)}}{c}\Big)^2\Big], \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{T}{}^{00} = \frac{1}{\mu_0}\Big[&(\hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)})\tilde{B}_y^{(1)} + \frac{\tilde{E}_x^{(0)}\tilde{E}_x^{(1)}}{c^2} \\ &+ \frac{h_{xx}}{2}(\hat{B}_y^{(0)} + \tilde{B}_y^{(0)})^2 + \frac{h_{xx}}{2}\Big(\frac{\tilde{E}_x^{(0)}}{c}\Big)^2\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\overset{(2)}{T}{}^{00} = \frac{1}{2\mu_0}\Big[&(\tilde{B}_x^{(1)})^2 + (\tilde{B}_y^{(1)})^2 + \Big(\frac{\tilde{E}_x^{(1)}}{c}\Big)^2 \\ &+ \Big(\frac{\tilde{E}_y^{(1)}}{c}\Big)^2 + 2\hat{B}_y^{(0)}(-h_{xy}\tilde{B}_x^{(1)} + h_{xx}\tilde{B}_y^{(1)}) \\ &- 2h_{xy}\tilde{B}_x^{(1)}\tilde{B}_y^{(0)} + 2h_{xx}\tilde{B}_y^{(0)}\tilde{B}_y^{(1)} - (h_{xx}\tilde{B}_z^{(0)})^2 \\ &+ (h_{xy}\tilde{B}_z^{(0)})^2 + 2h_{xx}\frac{\tilde{E}_x^{(0)}\tilde{E}_x^{(1)}}{c^2} + 2h_{xy}\frac{\tilde{E}_x^{(0)}\tilde{E}_y^{(1)}}{c^2}\Big].\end{aligned} \tag{20}$$

将背景电磁场(4)和(5)式及扰动解(9)和(10)式代入(18)—(20)式,并对结果取时间平均值(具有观测意义的量),经过相当冗长的计算,可以得到背景电磁场及扰动电磁场在各个区域的平均能量密度.为便于轴对称条件下的积分,将结果用柱坐标表示.

1)区域Ⅰ($-l/2 \leqslant z \leqslant l/2$,背景静磁场 $\hat{B}_y^{(0)} = \hat{B}^{(0)}$)

$$\begin{aligned}\langle \overset{(0)}{T}{}^{00} \rangle =& \frac{f^2\psi_0^2}{4c^2\mu_0(f^2+z^2)}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}} + \frac{f^2\psi_0^2 r^2\sin^2\phi}{4\mu_0\omega^2W_0^4(f^2+z^2)^3} \\ &\times(4f^2 + k^2z^2W_0^4)\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}} + \frac{f^6\psi_0^2z^2}{4\mu_0\omega^2f^4(f^2+z^2)^3} \\ &\times\Big[\frac{2f^2r^2}{W_0^2(f^2+z^2)} - 1\Big]^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}} + \frac{f^2\psi_0^2}{4\mu_0\omega^2(f^2+z^2)} \\ &\times\Big[k + \frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)} - \frac{f}{f^2+z^2}\Big]^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}} \\ &+ \frac{1}{2\mu_0}(\hat{B}^{(0)})^2,\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\langle \overset{(1)}{T}{}^{00} \rangle =& -\frac{\psi_0A_{\oplus}B^{(0)}f^3kr^2z(z+l/2)}{2\mu_0\omega W_0^2(f^2+z^2)^{5/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}} \\ &\times\cos\Big[\frac{kr^2z}{2(f^2+z^2)} - \arctan\frac{z}{f} + \delta\Big] \\ &+ \frac{\psi_0A_{\oplus}B^{(0)}f^3r^2z}{4\mu_0\omega W_0^2(f^2+z^2)^{5/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}} \\ &\times\sin\Big[\frac{kr^2z}{2(f^2+z^2)} - \arctan\frac{z}{f} + \delta\Big] \\ &- \frac{\psi_0A_{\oplus}B^{(0)}f^3r^2z}{4\mu_0\omega W_0^2(f^2+z^2)^{5/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}} \\ &\times\sin\Big[2kz + \frac{kr^2z}{2(f^2+z^2)} - \arctan\frac{z}{f} + \delta\Big] \\ &+ \frac{\psi_0A_{\oplus}B^{(0)}f}{8\mu_0\omega(f^2+z^2)^{1/2}}\Big[-\frac{f}{f^2+z^2} \\ &+ \frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)^2} + \frac{kf^2+klz+3kz^2}{f^2+z^2}\Big]\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\end{aligned}$$

$$\times\cos\left[\frac{kr^2 z}{2(f^2+z^2)}-\arctan\frac{z}{f}+\delta\right]$$

$$+\frac{\psi_0 A_{\oplus}B^{(0)}f}{8\mu_0\omega(f^2+z^2)^{1/2}}\left[\frac{f}{f^2+z^2}\right.$$

$$\left.-\frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)^2}-\frac{k(f^2-z^2)^2}{(f^2+z^2)^2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}$$

$$\times\cos\left[2kz+\frac{kr^2 z}{2(f^2+z^2)}-\arctan\frac{z}{f}+\delta\right],\tag{22}$$

$$\langle T^{00}_{(2)}\rangle=\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)(B^{(0)})^2k^2(l+2z)^2}{32\mu_0}$$

$$+\frac{(6A_{\oplus}^2-2A_{\otimes}^2)(B^{(0)})^2\sin^2(kz)}{16\mu_0}$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^6r^2\sin^2\phi}{2(f^2+z^2)^3\omega^2W_0^4\mu_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^2k^2r^2z^2\sin^2\phi}{8(f^2+z^2)^3\omega^2\mu_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$+\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^6r^2\sin^2\phi}{4(f^2+z^2)^3\omega^2W_0^4\mu_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right)$$

$$+\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^4kr^2\sin^2\phi}{4(f^2+z^2)^3\omega^2W_0^2\mu_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\sin\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right)$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^2k^2r^2z^2\sin^2\phi}{16(f^2+z^2)^3\omega^2\mu_0}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right).\tag{23}$$

2)区域Ⅱ($z\geqslant l/2$,背景静磁场 $\hat{B}_y^{(0)}=0$)

$$\langle T^{00}_{(0)}\rangle=\frac{f^2\psi_0^2}{4c^2\mu_0(f^2+z^2)}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}+\frac{f^2\psi_0^2r^2\sin^2\phi}{4\mu_0\omega^2W_0^4(f^2+z^2)^3}$$

$$\times(4f^2+k^2z^2W_0^4)\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}+\frac{f^6\psi_0^2z^2}{4\mu_0\omega^2f^4(f^2+z^2)^3}$$

$$\times\left[\frac{2f^2r^2}{W_0^2(f^2+z^2)}-1\right]^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}+\frac{f^2\psi_0^2}{4\mu_0\omega^2(f^2+z^2)}$$

$$\times\left[k+\frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)^2}-\frac{f}{f^2+z^2}\right]^2\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}},\tag{24}$$

$$\langle T^{00}_{(1)}\rangle=\frac{\psi_0A_{\oplus}\hat{B}^{(0)}klfz}{4\mu_0\omega(f^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}$$

$$\times\left[-\frac{2f^2r^2}{W_0^2(f^2+z^2)}+1\right]$$

$$\times\cos\left(-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\right)$$

$$+\frac{\psi_0A_{\oplus}\hat{B}^{(0)}klf}{4\mu_0\omega(f^2+z^2)^{1/2}}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}$$

$$\times\left[k+\frac{kr^2(f^2-z^2)}{2(f^2+z^2)^2}-\frac{f}{f^2+z^2}\right]$$

$$\times\sin\left(-\arctan\frac{z}{f}+\frac{kr^2}{2R}+\delta\right).\tag{25}$$

$$\langle T^{00}_{(2)}\rangle=\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)k^2l^2(B^{(0)})^2}{8\mu_0}$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^6r^2\sin^2\phi}{2\mu_0\omega^2W_0^4(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2+A_{\otimes}^2)\psi_0^2k^2f^2r^2z^2}{8\mu_0\omega^2(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$+\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^6r^2\sin^2\phi}{4\mu_0\omega^2W_0^4(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right)$$

$$+\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2f^4kr^2z\sin^2\phi}{4\mu_0\omega^2W_0^2(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\sin\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right)$$

$$-\frac{(A_{\oplus}^2-A_{\otimes}^2)\psi_0^2k^2r^2f^2z^2\sin^2\phi}{16\mu_0\omega^2(f^2+z^2)^3}\mathrm{e}^{-\frac{2r^2}{W^2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2z}{f^2+z^2}-2\arctan\frac{z}{f}+2\delta\right).\tag{26}$$

有趣的是,从计算结果(21)—(26)式可以发现,双极化态弱平面引力波的 + 型极化分量对高斯光束的扰动能流和扰动能量均有贡献,但由于 + 型极化分量对高斯光束的扰动能流与背景场能流具有相同的角分布,因而它将被背景能流淹没而无法观测;× 型极化分量对高斯光束的一阶扰动能量没有贡献,但却有不为零的一阶扰动能流.它在柱坐标系中的切向分量表达式为(令 $\delta=\pi/2$)

当 $-l/2\leqslant z\leqslant l/2$ 时

$$\langle S^{\phi}_{\otimes}{}^{(1)}\rangle=\left\{\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0krfz(l+2z)}{8\mu_0(f^2+z^2)^{3/2}}\right.$$

$$\times\sin\left(\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)$$

$$+\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0f^3r(l+2z)}{4\mu_0W_0^2(f^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)$$

$$+\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0frz}{4\mu_0(f^2+z^2)^{3/2}}\sin(kz)$$

$$\times\sin\left(kz+\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)$$

$$+\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0 f^3 r}{2\mu_0 k W_0^2(f^2+z^2)^{3/2}}\sin(kz)$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)\Bigg\}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\sin^2\phi. \tag{27}$$

当 $l/2\leqslant z\leqslant l_0$ 时

$$\langle S_{\otimes}^{\phi(1)}\rangle=\Bigg\{\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0 klfrz}{4\mu_0(f^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\times\sin\left(\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)$$

$$+\frac{A_{\otimes}B^{(0)}\psi_0 lf^3 r}{2\mu_0 W_0^2(f^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\times\cos\left(\frac{kr^2}{2R}-\arctan\frac{z}{f}\right)\Bigg\}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{W^2}}\sin^2\phi. \tag{28}$$

经过简单计算,得知高斯束(背景电磁场)的切向能流(即 ϕ 方向的能流)在 $\phi=\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 时为零,但由(27)和(28)式看出,当 $\phi=\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 时,$\langle S_{\otimes}^{\phi(1)}\rangle$ 却恰好取极大值,因而它是通过上述平面惟一的非零电磁能流(或者用量子的语言来表述为光子流),这是令人满意的.因此该方向的切向能流具有现实的观测意义.任何一个观测到的通过上述平面的光子流均表示纯引力-电磁扰动,这对于显示极弱的引力-电磁扰动信号极为有益.扰动能流不为零扰动能量却为零的原因是,在背景电磁场能量中,当在任何时间内流入和流出背景电磁系统的扰动能量相等(但局部区域的扰动能流并不为零)时,系统的总扰动能量却并不变化,这包括扰动能量密度为零的情形.

3. 数值计算

根据目前的技术水平和实验能力,本文取如下值进行数值计算:高斯束的光腰半径 $W_0=0.05\mathrm{m}$,振幅 $\psi_0=3\times10^5\mathrm{V\cdot m^{-1}}$,初相 $\delta=\pi/2$,背景静磁场 $\hat{B}^{(0)}=30\mathrm{T}$(根据 QIM 的预期值[6—9]),引力波的振幅 $A_{\oplus}$ 和 $A_{\otimes}$ 约取 10^{-30} 数量级,频率取 $\nu=\omega/2\pi=3\times10^{10}\mathrm{Hz}$,在 z 方向的研究区域取 $l=0.1\mathrm{m}$ 和 $l_0=0.3\mathrm{m}$.

能量密度(时间平均值)的体积分为

$$\bar{E}=\int_{-l/2}^{l_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{W_0}\langle T^{00}\rangle r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z, \tag{29}$$

即为积分区域内的平均能量.取半径为 W_0、高为 $-l/2\leqslant z\leqslant l_0$ 的圆柱形区域为积分区间,计算所得各阶平均能量见表 1.

表 1 背景电磁场及各阶扰动能量的计算值

各阶平均能量/J	区域 I ($-l/2\leqslant z\leqslant l/2$)	区域 II ($l/2\leqslant z\leqslant l_0$)	合 计
背景电磁场	2.81×10^{5}	3.11×10^{-4}	2.81×10^{5}
一阶扰动	1.86×10^{-28}	9.14×10^{-28}	1.10×10^{-27}
二阶扰动	1.85×10^{-52}	1.39×10^{-51}	1.57×10^{-51}

对于频率为 $\nu=3\times10^{10}\mathrm{Hz}$ 的高斯束,每个光量子的能量为 $h\nu\approx10^{-23}\mathrm{J}$,从表 1 可以看出,光量子能量比起一阶扰动能量高出 4 个数量级,换言之,引力波对电磁波能量的扰动,在半径 $W_0=5\mathrm{cm}$、高$(l/2+l_0)=35\mathrm{cm}$ 的圆柱内的累积还不足一个同频率光量子能量的 $1/10^4$,也即净增光子数不足一个.二阶扰动能量为高阶小量,它比一阶扰动能量小 24 个数量级.由于能流密度矢量与能量密度和光速的关系是 $\boldsymbol{S}=w\boldsymbol{c}$,又因为真空中光速为 c,所以尽管能量密度较小,对应的能流却可以具有能够观测的效应.文献[15]对一阶扰动能流作了数值估算,结果表明径向和轴向方向的扰动能流因为被背景场能流淹没而不能进行观测,只有通过 $\phi=\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 平面的切向扰动能流具有实际的可观测意义.根据表 1 的数据,大致可以估算出纯扰动光子流约为 $10^6\mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$,这与文献[15]所给出的在 $10^{-2}\mathrm{m^2}$ 的面积上可望产生约 $10^4\mathrm{s^{-1}}$ 的纯扰动光子流在数量级上相一致.因此在引力波的电磁探测方案中,人们应特别关注引力波对电磁场的作用引起的一阶扰动能流.数值计算表明,用电磁方法探测引力波,应重点观测电磁波传播行为(能流的大小、方向、极化和位相等)的改变而不是系统总能量的净增量.

将本文的结果与超导量子流体的高频引力-电磁转换方案[14]相结合,可能是一个值得进一步研究的方向,进一步的方案将另文讨论.

[1] Mchugh M P *et al* 2000 *Int. J. Mod. Phys.* D **9** 229

[2] McKenzie K *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 231102

[3] Strain K LIGO II Configuration Options, http://www.phys.u.edu/LIGO/LIGO/DOCS/con-g 1.pdf
[4] Sahay S K 2002 Studies in Gravitational Wave Data Analysis, gr-qc/0209019
[5] Seto N 2002 *Phys. Rev.* D **66** 122001
[6] Giovannini M 1999 *Phys. Rev.* D **60** 123511; astro-ph/9903004
[7] Giovannini M 1999 *Class. Quantum Grav.* **16** 2905; hep-ph/9903263
[8] Li F Y and Tang M X 2002 *Int. J. Mod. Phys.* D **11** 1049
[9] Giovannini M 1999 *Phys. Rev.* D **60** 83511
[10] Grishchuk L P and Sazhin M V 1975 *Sov. Phys. JEPT* **41** 787
[11] Grishchuk L P and Sazhin M V 1983 *Sov. Phys. JEPT* **53** 1128
[12] Tang M X, Li F Y and Luo J 1997 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Editions) **6** 161
[13] Cruise A M 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 2525
[14] Raymond Y 2002 Chiao, Superconductors as Quantum Transducers and Antennas for Gravitational and Electromagnetic Radiation, gr-qc/0204012
[15] Li F Y and Tang M X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1546
[16] Li F Y and Tang M X 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 12
[17] Li F Y *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 461
[18] Li F Y, Tang M X and Luo J 2000 *Phys. Rev.* D **62** 44018
[19] Yariv A 1975 *Quantum Electronics* 2nd ed (New York: Wiley)
[20] Weber J 1979 *General Relativity and Gravitational Waves* (Beijing: Science Press) p48 (in Chinese) [Weber J 1979 广义相对论与引力波(北京 科学出版社)第 48 页]
[21] Weinberg S 1984 *Gravitation and Cosmology* (Beijing: Science Press) p140 (in Chinese) [Weinberg S 1984 引力论和宇宙论(北京 科学出版社)第 140 页]

Perturbation to the energy of Gaussian beam by a doubly polarized weak gravitational plane wave in a static magnetic field*

Li Fang-Yu[1)†] Shi Dong-Ping[1)2)] Dai Hong-Xia[1)3)]

[1)] (*Department of Physics, Chongqing University, Chongqing* 400044, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Western Chongqing University, Chongqing* 402168, *China*)

[3)] (*Department of Physics, Chongqing Industry and Commerce University, Chongqing* 400033, *China*)

(Received 12 February 2003; revised manuscript received 18 March 2003)

Abstract

First-order and second-order perturbations to the energy of Gaussian beam by a doubly polarized weak gravitational plane wave in static magnetic fields are discussed. The results of numerical estimation show that the perturbation to Gaussian beams by weak gravitational plane waves is very small, i.e. the total energy of the background fields would not change obviously in the influence of gravitational waves, but the perturbative power flux produced in the local region may be observable.

Keywords: doubly polarized weak gravitational plane waves, Gaussian beam, electromagnetic response, perturbative energy

PACC: 0430, 0440, 0480

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10175096), and the Foundation of Gravitational and Quantum Laboratory, Hubei Province, China (Grant No. GQ0101).

† E-mail: fangyuli@cqu.edu.cn.