

# 单模非线性光学系统的弛豫速率与随机共振\*

康艳梅 徐健学† 谢 勇

(西安交通大学建筑工程与力学学院非线性动力学研究所, 西安 710049)

(2002 年 12 月 13 日收到, 2003 年 2 月 25 日收到修改稿)

应用变分法研究了一个单模非线性光学系统的弛豫速率对噪声强度的依赖性, 并由线性响应理论考察了该系统的随机共振行为. 研究表明当系统没有偏置时, 单稳与多稳情形下的松弛速率对噪声强度的依赖性表现出很大的不同, 揭示了对称的一维单稳系统中的随机共振现象, 并针对一维单稳系统中随机共振存在的一般条件进行了分析.

关键词: 弛豫速率, 随机共振, 变分法, 线性响应理论

PACC: 0540, 4265, 0250, 0200

## 1. 引 言

噪声无处不在, 近年来一些与噪声有关的现象, 如随机共振、噪声诱导共振等噪声增强有序现象已经引起了广泛的研究兴趣<sup>[1-22]</sup>. 在这些研究中, 弛豫速率作为衡量随机系统从非定态向全局定态的演化快慢的物理量, 是一个较为重要的概念. 在弱噪声情形下, 对于多稳系统, 弛豫速率就是刻画随机系统从准稳态演化至最终定态的时间尺度的倒数, 往往与随机力作用下的跨势垒逃逸问题, 以及不同势阱之间的噪声诱导跃迁等联系在一起. 例如, 过阻尼对称双稳系统中的随机共振现象发生的实质就被认为是弛豫速率与周期输入信号的频率相互匹配的结果. 特别是在随机共振的理论研究当中, 弛豫速率往往显得更为重要<sup>[9-12]</sup>.

弛豫速率的解析工作最早可追溯到 Kramers. 著名的 Kramers 公式给出了当势垒与噪声强度之比较高时噪声诱导扩散的逃逸速率<sup>[23]</sup>. 由这个公式可以得到弱噪声条件下双稳系统的弛豫速率. 但是, 当势垒与噪声强度之比不很高时, 弛豫速率的确定往往需要依赖于数值方法. 对于高斯白噪声激励的随机系统, 弛豫速率的求解可以归结为相应的 Fokker-Planck 方程的最小正特征值问题, 因而当势垒与噪声强度之比不很高或者势函数不光滑时, 变分法、矩

阵连分法、特征函数分析法等都被用于弛豫速率的计算(参见文献 [12, 24, 25] 及其引用文献). 最近, 文献 [14] 借助于变分法研究了在固定的噪声环境下如何利用过阻尼四次双稳势系统的随机共振恢复弱信号的问题. 在那里已给出了应用变分法计算该双稳系统的最小正特征值的具体推导步骤, 但给出的部分表达式较为复杂. 本文对文献 [14] 的部分公式进行简化, 并将变分法用于研究在调制噪声强度的条件下, 一个单模光学非线性系统的松弛速率对噪声强度的依赖性及其系统所表现出的随机共振行为.

对于与非线性光学有关的系统, 噪声有各种各样合理的物理根源, 包括注入激光中所包含的混沌噪声或涨落等<sup>[12]</sup>. 由随机过阻尼双稳或欠阻尼单稳振子作为研究模型, 文献 [9, 15] 已经在随机共振的背景下研究了一些非线性光学特性, 如共振谐波吸收或噪声诱导吸收等. 而在本文所考察的单模光学系统对应于不同的参数可能表现为三稳、双稳或单稳等丰富的非线性动力学现象, 利用该系统能够揭示出较为一般的单模光学系统的信息传输特性.

## 2. 单模光学系统的弛豫特性

本文考虑如下具有六次势函数的单模光学系统的唯象动力学方程<sup>[26]</sup>为

\* 国家自然科学基金(批准号: 19972051 和 10172067)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: jxxu@mail.xjtu.edu.cn

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^5}{5} + \frac{(1+C)x^3}{3} - Cx + y + \zeta(t), \quad (1)$$

其中  $y$  为无量纲的入射光场,  $x$  为无量纲的出射光场,  $C$  为系统的控制参数,  $\zeta(t)$  为高斯白噪声, 其相关函数满足  $\zeta(t+\tau)\zeta(t) = 2D\delta(\tau)$ . 这里  $\delta(\cdot)$  为 Dirac delta 函数,  $D$  为噪声强度. 方程 (1) 的确定性部分是一个非线性行为较为复杂的光学模型, 其稳定的不动点的个数在参数平面  $C$ - $y$  上的分布如图 1 所示.

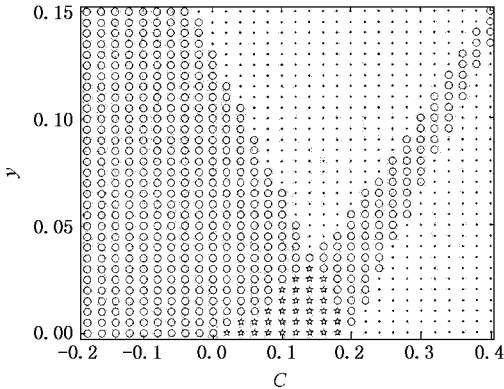


图 1 确定性单模光学系统的稳定的不动点个数在参数平面上的示意图 ☆为三稳, ○为双稳, ·为单稳

设  $p(x, t)$  表示系统 (1) 的状态概率密度函数, 则系统 (1) 的 Fokker-Planck (FP) 方程为

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x^5}{5} + \frac{(1+C)x^3}{3} - Cx + y \right) \times p(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t), \quad (2)$$

其中  $p(x, t)$  满足自然边界条件  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{d^n}{dx^n} p(x, t) = 0$ .

令方程 (2) 等号左端为零, 对右端进行积分, 并结合边界条件, 可得它的定态解为

$$p_s(x) = N \exp \left( -\frac{U(x)}{D} \right), \quad (3)$$

其中  $U(x) = \frac{x^6}{30} - \frac{(1+C)x^4}{12} + \frac{Cx^2}{2} - yx$  为势函数.

(3) 式也称为系统 (1) 的平稳分布.

弛豫速率决定着 FP 方程 (2) 的初始非平衡概率密度函数的时间演化, 它对于考察光学系统 (1) 在随机力作用下的瞬态演化过程及其寿命有重要意义. 由于这个弛豫速率就是 FP 方程 (2) 的最小正特征值, 记为  $\lambda_{\min}$ , 而 FP 方程 (2) 可以变换为自伴的微分算子, 下面就用来自伴特征值问题的变分法 (参见文献 [14] 及有关教材) 来计算  $\lambda_{\min}$ . 由变分法可知,  $\lambda_{\min}$

为如下特征方程

$$|K - \lambda M| = 0 \quad (4)$$

的最小正特征根, 其中  $M = (m_{ij})$  为正定矩阵,  $K = (k_{ij})$  为半正定矩阵,  $k_{ij} = D \langle ijx^{i+j-2} \rangle_s$ ,  $m_{ij} = \langle x^{i+j} \rangle_s$  ( $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ ). 这里  $\langle \cdot \rangle_s$  为关于平稳分布 (3) 式取均值, 涉及到的无穷限积分是由 IMSL 函数库中的子程序 QDAGI 完成的. 这里给出的  $k_{ij}$  的表达式与文献 [14] 中的表达式相比已大为简化. 如果把特征方程 (4) 的所有的根按从小到大顺序排列, 则  $\lambda_{\min}$  排在第二个 (第一个为特征根零对应着 FP 方程 (2) 的定态解). 我们从  $n = 5$  开始逐渐加 1 直到满足容许误差  $|\lambda_{\min}^{(n)} - \lambda_{\min}^{(n-1)}| \leq 10^{-6}$  来近似确定这个弛豫速率, 结果如图 2.

图 2 给出当输入光场  $y = 0$  时, 弛豫速率对噪声强度的依赖性. 由图 2 可知, 尽管系统是对称的, 但容易看到, 在单稳和多稳情形下弛豫速率对噪声强度的依赖特征并不相同, 前者是非单调的, 后者是单调的. 注意到在单稳情形, 势函数曲线上有 4 个拐点, 准一的极小值点位于两个最靠近原点的拐点之间. 结合数值模拟, 单稳情形下弛豫速率对噪声强度的依赖行为可以解释为当噪声强度几乎为零时, 系统的动力学还停留在系统在阱底的线性化区域, 此时系统的弛豫速率为方程 (2) 在势阱的最低点线性化后的最小正特征值 (即  $U''(x_{\min})$ ,  $x_{\min}$  表示势阱的最低点的位置); 随噪声强度的增强, 但仍不足以使越过拐点的动力学占主要地位时, 噪声导致系统的松弛时间延长, 弛豫速率减小; 当噪声强度超过一定值时, 越过拐点的动力学已经越来越重要, 于是噪声导致系统的松弛时间缩短, 弛豫速率持续变大. 可以看出, 正是由于势函数曲线上拐点的存在, 使得本文所考虑的单稳系统的弛豫速率对噪声强度的依赖

行为非常不同于标准的具有单稳势  $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$  ( $a > 0, b \geq 0$ ) 的一维系统的情形. 对于双稳情形, 缘于噪声诱导的随机跃迁随噪声强度的增强而趋于频繁, 弛豫速率对噪声强度的依赖行为更易于理解. 当输入光场  $y \neq 0$ , 即系统有偏置时, 情况与图 2 不完全相符, 类似于前面的分析可知, 当偏置较大时, 在多稳情形弛豫速率对噪声强度的依赖性也会呈现出类似于图 2(a) 所示趋势, 亦即随偏置的增加, 在单稳或多稳情形下弛豫速率对噪声强度的依赖行为渐趋于一致. 但当系统有偏置时, 在噪声强度十分靠近零时, 由于有限计算精度的限制, 弛豫速率对噪声强

度的依赖性变得不太有规律,因而这里没有给出相应的图形.

### 3. 单模光学系统的谱放大因子

考虑光学系统(1)受弱周期场调制的情形,这时方程(1)变为

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x^5}{5} + \frac{(1+C)x^3}{3} - Cx + y + A \sin(\Omega t) + \xi(t). \quad (5)$$

相应于方程(5)的FP方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = L_0 P(x,t) + AL_1 \sin(\Omega t) P(x,t), \quad (6)$$

其中  $L_0$  为 FP 方程(2)等号右端的微分算子,也称作未扰动 FP 算子,  $L_1 = -\frac{\partial}{\partial x}$ . 假定  $A \ll 1$ , 下面根据线性响应理论<sup>[9,21]</sup>来考察系统(5)的随机共振行为. 设 FP 方程(6)的长时间解为

$$p_{as}(x,t) = p_s(x) + Ap_1(x,t), \quad (7)$$

注意到  $L_0 p_s(x) = 0$ , 可知  $p_1(x,t)$  满足(保留到  $O(A)$ ):

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = L_0 p_1(x,t) + L_1 \sin(\Omega t) P_s(x) \quad (8)$$

其形式解为

$$p_1(x,t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^t \exp[L_0(t-t')] \times L_1 \sin(\Omega t') p_s(x) dt'. \quad (9)$$

于是外力  $A \sin(\Omega t)$  对系统(5)的长时间响应均值在一次谐波意义上的贡献为

$$\langle x(t) \rangle_1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} R(t-t') \sin(\Omega t') dt' \quad (10)$$

其中

$$R(\tau) = \begin{cases} -\int_{-\infty}^{\infty} x \exp(L_0 \tau) \frac{\partial p_s}{\partial x} dx, & \tau > 0, \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (11)$$

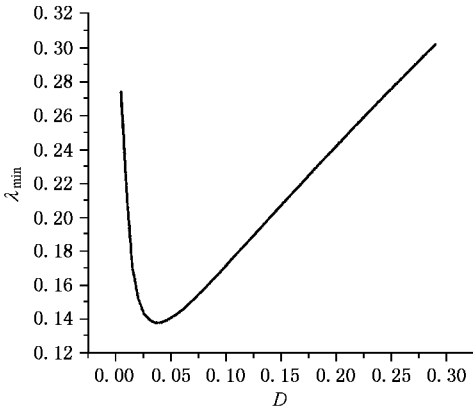
为系统(5)的长时间响应均值对外力  $A \sin(\Omega t)$  的响应函数.

由波动-耗散关系<sup>[9,23,24]</sup>可得

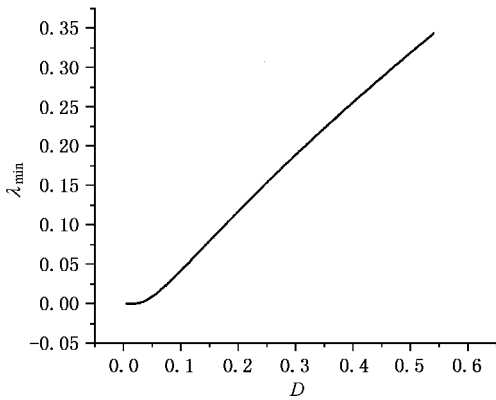
$$R(t) = -\frac{1}{D} \frac{d}{dt} K_{xx}(t), \quad (12)$$

其中

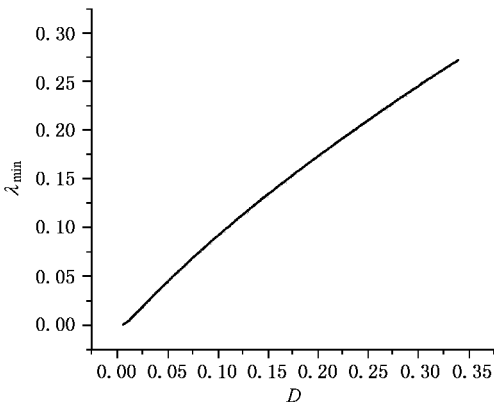
$$K_{xx}(t) = \langle x(t)x(0) \rangle_s - \langle x \rangle_s^2 \approx (\langle x^2 \rangle_s - \langle x \rangle_s^2) \exp(-\lambda_{\min} t) \quad (13)$$



(a)单稳  $C=0.3, y=0.0$



(b)双稳  $C=-0.1, y=0.0$



(c)三稳  $C=0.1, y=0.0$

图2 弛豫速率对噪声强度的依赖性



为系统 (1) 的平稳自相关函数。(13) 式中后一个近似等式的导出是考虑到系统 (1) 的相关函数的瞬态行为主要是由弛豫速率支配的。把 (13) 式代入 (12) 式, 并作傅里叶变换, 得

$$\chi(\omega) = \frac{1}{D} \frac{\lambda_{\min}(\langle x^2 \rangle_s - \langle x \rangle_s^2)}{\lambda_{\min}^2 + \omega^2} (\lambda_{\min} - i\omega). \quad (14)$$

对 (10) 式应用卷积定理, 则得系统 (5) 的长时间响应均值的一次谐波的傅里叶变换系数  $\frac{1}{2} A |\chi(\Omega)|$ , 因而系统 (5) 的一阶谐波谱放大因子<sup>[11]</sup>为

$$|\chi(\Omega)|^2 = \frac{1}{D^2} (\langle x^2 \rangle_s - \langle x \rangle_s^2)^2 \frac{\lambda_{\min}^2}{\lambda_{\min}^2 + \Omega^2}, \quad (15)$$

其中  $\lambda_{\min}$  为算子  $L_0$  的最小正特征值。

现在根据 (15) 式考察系统 (5) 的随机共振行为。谱放大因子对噪声强度的依赖性如图 3 和图 4 所示。图 3 为当势垒与噪声强度之比较高时的双稳情形谱放大因子。从图 3 可见, 由 Kramers 公式与由变分法给出的谱放大因子差别非常小, 这说明了由变分法给出的结果很精确。从图 4 可以看到, 无论是多稳情形还是单稳情形, 谱放大因子随噪声强度都呈现出漂亮的单峰结构。

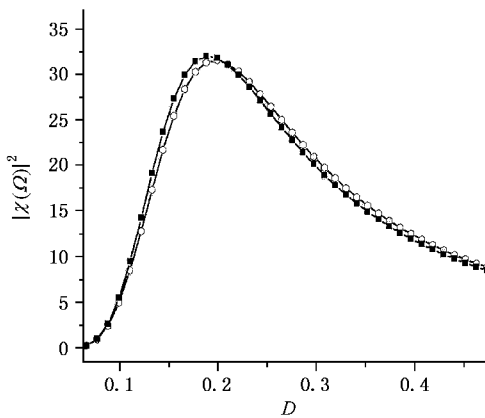
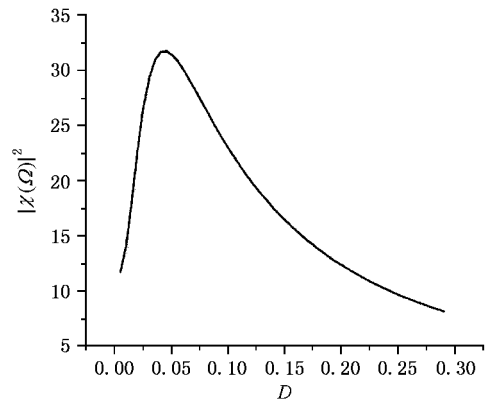
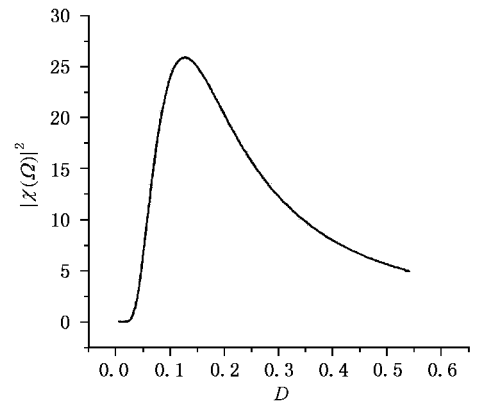


图 3 理论(Kramers)与数值(变分法)得到的谱放大因子的比较  $\Omega=0.05, C=-0.5, y=0.0$

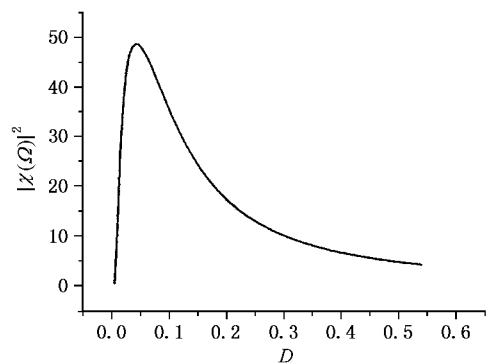
对于单模双稳系统, 随机共振的发生是由于周期信号的周期与平均首通时间在某个噪声强度存在匹配关系  $T \approx 2T_k(D)$ , 其中  $T$  为信号的周期,  $T_k(D)$  为平均首通时间。注意到  $T_k(D) = \frac{1}{\lambda_{\min}(D)}$ , 所以  $\lambda_{\min}(D) \approx \frac{\Omega}{\pi}$ 。比较图 3(b) 与图 3(c) 容易看出



(a) 单稳  $C=0.3, y=0.0$



(b) 双稳  $C=-0.1, y=0.0$



(c) 三稳  $C=0.1, y=0.0$

图 4 谱放大因子对噪声强度的依赖性  $\Omega=0.1$



这种近似关系成立。同时, 比较图 3(c) 与图 3(c), 可以看到这种近似的匹配关系对于我们所考虑的三稳情形也成立。

## 4. 讨 论

为了论证单稳系统的随机共振,在特征方程(4)中取矩阵  $M, K$  为  $2 \times 2$  阶矩阵,则可得到

$$\text{弛豫速率的一个近似 } \tilde{\lambda}_{\min} = \frac{D}{\langle x^2 \rangle_s - \langle x \rangle_s^2}.$$

对于单稳系统,在弱噪声范围内,这个近似值与由变分法给出的结果差异非常小,如图5所示.把  $\tilde{\lambda}_{\min}$  代入(15)式,得

$$|\chi(\Omega)|^2 \approx \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\min}^2 + \Omega^2}. \quad (16)$$

由于  $\tilde{\lambda}_{\min}$  有一个极小值,由(16)式可知谱放大因子存在峰值.这个随机共振峰的位置与具体的调制频率的关系并不大,它主要依赖于系统本身的松弛性质.由此可以把单稳系统的随机共振理解为系统在弱噪声作用下发生慢化时系统的固有平均运动与外部周期信号发生相关振动的结果.虽然第二节给出

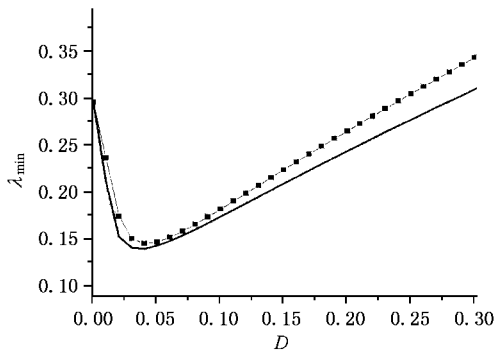


图5 弛豫速率( $C = 0.3, \gamma = 0.0$ )的比较 ■为变分法结果, —为  $\tilde{\lambda}_{\min}$  值

的对单稳系统的弛豫速率的性质和解释是针对本文的单稳势而言的,但可以肯定对于其他有拐点的单稳势系统也有类似的性质和解释.因此,可以推测,只要单稳系统的势函数曲线上存在拐点,这个单稳系统就会发生随机共振.这里需要说明的是,尽管一维单稳系统的随机共振在文献[16]中已有报道,但那里考察的是过阻尼的非对称的单稳四次势振子,而本文在所考虑的对称的六次势系统也观察到了单稳随机共振现象,并且指出了单稳系统发生随机共振的一般条件.因此,本文的结果是已有的一维单稳系统的随机共振结果的进一步推广.

## 5. 结 论

通过对一个单模光学系统的松弛速率对噪声强度依赖行为的研究,得知当系统无偏置时,单稳与多稳情形下的松弛速率对噪声强度的依赖性表现出很大的不同.通过对该系统随机共振现象的研究得知,不论在多稳或单稳情形下,随机共振现象都会发生,并对单稳系统发生随机共振的一般条件给予了分析.本文的结果是已有的一维单稳系统随机共振的结果的一个推广.此外,文献[19]指出线性响应理论的适用范围是  $\epsilon/D < 1$ ,因此本文的研究思路适合于周期信号的幅值  $\epsilon$  或频率  $\Omega$  较大情形下的随机非线性系统的共振行为,而且这种思路适合于多维情形.

[1] Gammaitoni L et al 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223  
 [2] Hu G, Nicolis G and Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030  
 [3] Hu G et al 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 69  
 [4] Wang J F et al 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2305 (in Chinese) [王嘉赋等 1997 *物理学报* **46** 2305]  
 [5] Qian M and Zhang X J 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 299  
 [6] Gong Y F et al 1998 *Phys. Lett. A* **243** 351  
 [7] Gong P L and Xu X J 2001 *Phys. Rev. E* **63** 31906  
 [8] Gong P L, Xu J X and Hu S J 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 885  
 [9] Bartussek R, Hänggi P and Jung P 1994 *Phys. Rev. E* **49** 3930  
 [10] Kang Y M, Xu J X and Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 802 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢勇 2003 *物理学报* **52** 802]  
 [11] Jung P 1993 *Phys. Rep.* **234** 175

[12] Hu G 1994 *Stochastic Force and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Science and Technology Education Publishing House) (in Chinese) [胡岗 1994 *随机力与非线性系统* (上海:上海科技教育出版社)]  
 [13] Dykman M I et al 1993 *J. Stat. Phys.* **70** 479  
 [14] Xu B H et al 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 633  
 [15] Dykman M I et al 1998 *Phys. Rev. E* **54** 2366  
 [16] Evstigneev M, Pankov V and Prince R H 2001 *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 2595  
 [17] Stocks N G, Stein N D and McClintock P V E 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** L385  
 [18] Lindner J F et al 2001 *Phys. Rev. E* **63** 51107  
 [19] Casado-Pascual J, Gómez-Ordóñez J and Morillo M 2002 *Fluctuation Noise Lett.* **2** L125

- [ 20 ] Mao X M , Sun K and Ouyang Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 1106  
 [ 21 ] Yang H B *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 508 ( in Chinese ) [ 杨洪波等 2000 物理学报 **49** 508 ]  
 [ 22 ] Zhang L Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 ( in Chinese ) [ 张良英等 2003 物理学报 **52** 1174 ]  
 [ 23 ] Risken H 1984 *The Fokker-Planck Equation :Methods of Solution and Applications* ( Berlin :Springer )  
 [ 24 ] Häng P and Thomas H 1982 *Phys. Rep.* **88** 207  
 [ 25 ] Häng P *et al* 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 251  
 [ 26 ] Wu F G *et al* 1998 *J. Optoelectron. · Laser* **9** 279 ( in Chinese ) [ 吴福根等 1998 光电子·激光 **9** 279 ]

## Relaxation rate and stochastic resonance of a single-mode nonlinear optical system \*

Kang Yan-Mei Xu Jian-Xue Xie Yong

( *Institute of Nonlinear Dynamics , School of Architectural Engineering and Mechanics , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 ,China* )

( Received 13 December 2002 ; revised manuscript received 25 February 2003 )

### Abstract

The variational method is applied to a single-mode stochastic nonlinear optical system and the dependence of its relaxation rate and spectral amplification factor on the noise intensity based on the linear response theory is investigated. The investigation shows that when the biased input is vanishing ,the relaxation rate has different dependence in monostable and multistable cases. The investigation also shows that the stochastic resonance occurs in one-dimensional symmetric monostable potential and the possible condition for it is pointed out.

**Keywords** : stochastic resonance , nonlinear optical system , variational method , linear response theory

**PACC** : 0540 , 4265 , 0250 , 0200

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 19972051 and 10172067 ).