

一类具有两个边界的分段光滑系统中 边界碰撞分岔现象及混沌^{*}

戴 栋 马西奎 李小峰

(西安交通大学电气工程学院 西安 710049)

(2003 年 1 月 14 日收到)

以不连续运行模式下的电流反馈型 Buck-Boost 变换器为例,导出了一类具有三段形式的分段光滑迭代映射方程,数值仿真得到了输入电压变化时的分岔图。结果表明,发生分岔时映射雅可比矩阵的特征值以不连续的方式跳跃出复平面上的单位圆,而且映射总有某个或某些轨道点位于相平面中不同区域的边界上,即映射随输入电压的变化会发生边界碰撞分岔现象,如由周期态到周期态以及由周期态到混沌态的分岔。

关键词:分段光滑系统,边界碰撞分岔,混沌

PACC:0545

1. 引 言

关于全局光滑系统(如 Logistic 映射和 Lorenz 系统)中的各类分岔现象(如倍周期分岔、Hopf 分岔)和混沌现象的研究已经非常深入。但是,在物理及工程领域中还广泛存在着各种分段光滑系统,例如电力电子系统中的 DC/DC 变换器^[1-3,5,6,11-16]、机械系统中的冲击振子^[8,17]。这一类系统通常可由如下连续时间系统

$$\dot{x} = f(x, t, \mu) \quad (1)$$

来表示。式中 $x \in R^n$ 为系统的状态变量, $\mu \in R^p$ 为系统的参数。不同于全局光滑系统,式中函数 f 具有分段光滑的形式,即系统的相空间被一些光滑的曲面(超曲面)分割成数个子区域,在各子区域内函数 f 是光滑的,而在两个子区域相交的边界上,函数 f 不连续或者非光滑。近年来,有关分段光滑系统中分岔现象以及混沌的研究已经引起了人们广泛的的关注。研究结果表明,当分段光滑系统的轨道与某个边界相切时,将会出现一类特有的分岔现象,一般称之为边界碰撞分岔^[4,7,11]。这时,系统的动力学行为会发生剧烈变化,如由周期轨道直接跃变至混沌态。这类分岔现象只能在分段光滑系统中观察到,而在全

局光滑系统中不可能发生。其根本原因在于某些非光滑因素的引入,如 DC/DC 变换器中的开关切换或机械系统中的振子受到冲击,使得系统变得非光滑。Bernardo 和 Feigin 在对连续时间分段光滑系统的研究中,通过对发生边界碰撞分岔附近的周期解的局部线性化得到了具有分段形式的庞加莱映射,并给出了边界碰撞分岔的分类标准^[7]。

在分段光滑的离散时间映射中,同样也会出现映射的不动点或某个周期点位于分段光滑映射的边界上,即与边界发生了碰撞^[1-3,8-10]。而且在发生边界碰撞分岔的参数点附近,映射雅可比矩阵的某个特征值的模将随参数的改变以不连续的方式由小于 1 变为大于 1,即某个特征值在复平面上以不连续的方式穿过单位圆。然而,在全局光滑映射中,发生倍周期分岔时映射雅可比矩阵的特征值则是连续地穿过单位圆。目前,分段光滑映射中边界碰撞分岔的研究仅限于一维和二维的情况。Banerjee 等人采用局部近似方法得到了发生边界碰撞分岔附近的范式,并给出了边界碰撞分岔的分类方法^[1,2,6]。

在以往对分段光滑映射的研究中,通常假设只存在一个边界(即映射具有两段的形式),而对于存在多个边界情况下的分段光滑映射则相对研究得较少。在电力电子系统中,当 DC/DC 变换器处于电流

^{*} 西安交通大学研究生院博士学位论文基金(批准号:DFXJTU2001-4)资助的课题。

连续工作模式下时,系统在两种电路拓扑结构之间切换,可以使用具有两段形式的分段光滑映射对其进行研究。但是,当处于电流不连续工作模式下时,DC/DC变换器将在三种电路拓扑结构之间切换,这时必须使用具有三段形式的分段光滑映射对其进行研究。目前,对于DC/DC变换器中非线性现象的研究主要集中于电流连续工作模式的情况。另外,Banerjee等人给出的一维和二维分段光滑映射中边界碰撞分岔的分类方法也是建立在只有一个边界的前提之下,当存在多个边界时如何对边界碰撞分岔进行分类还研究得很少。实际上,研究多段形式的分段光滑映射中的分岔现象与混沌不仅有着重要的理论意义,还具有实际应用价值。本文给出处于电流不连续运行模式下描述电流反馈型Buck-Boost变换器动力学行为的具有三段形式的分段光滑映射,通过数值模拟研究了随输入电压变化时出现的各种非光滑分岔现象和混沌,并且对映射在发生分岔参数点附近的动力学特性进行了分析。

2. 电路模型及其分段光滑迭代映射方程

DC/DC变换器的基本功能是将给定的输入直流电压转换成另一输出直流电压,以满足不同的需要^[15]。在实际应用中,输入电压和负载往往存在着扰动,因而需要通过施加某种反馈控制以保持输出电压的稳定。大量的研究结果表明,DC/DC变换器在一定的反馈控制策略下会出现包括分岔、准周期以及混沌在内的丰富的非线性现象。本文以电流反馈型Buck-Boost变换器为例,分析DC/DC变换器中特有的一类非线性现象。

2.1. Buck-Boost变换器的工作原理

电流反馈型Buck-Boost变换器电路如图1所示。

根据开关S和二极管D的状态,电路有以下三种工作模式。

(1)工作模式1 开关S闭合,二极管D截止。这时有

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{RC}. \end{cases} \quad (2)$$

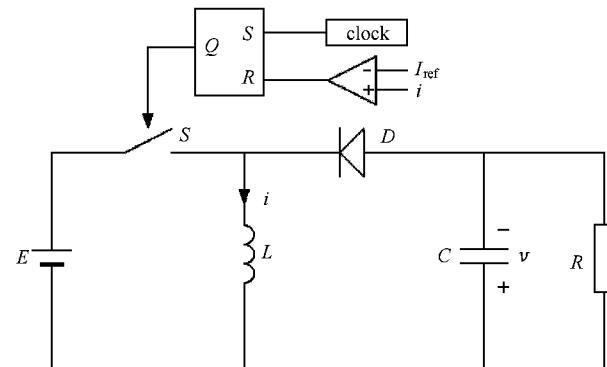


图1 电流反馈型 Buck-Boost 变换器电路原理图 E 为输入电压 i 为流过电感 L 的电流 v 为电容器 C 两端的电压 I_{ref} 为参考电流 开关 S 受触发器输出 Q 控制 ($Q=1$ 时, S 闭合; $Q=0$ 时, S 打开); clock 为具有固定周期的时钟脉冲; D 为二极管。

这时有

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{v}{L}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C} - \frac{v}{RC}. \end{cases} \quad (3)$$

(3)工作模式3 开关 S 打开,二极管 D 截止。这时有

$$\begin{cases} i = 0, \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{RC}. \end{cases} \quad (4)$$

由于工作模式3的存在,电感电流会出现为零的状态,因此称Buck-Boost变换器处于电流不连续工作模式下。需要指出的是,工作模式3在一定参数条件下不会出现,这时,只存在工作模式1和工作模式2,称电路处于电流连续工作模式。

2.2. 分段光滑迭代映射方程

对于以上描述的连续时间系统,可以通过离散化方法得到的分段光滑迭代映射方程来研究其动力学行为。迭代映射的采样时刻一般取为 nT ,即有 $i_n = i(nT)$, $v_n = v(nT)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, T 为 clock 的时钟脉冲周期。

令 t_n 为电流 i 从 nT 时刻开始在模态1下上升到 I_{ref} 所经历的时间,则有

$$t_n = \frac{L}{E}(I_{\text{ref}} - i_n). \quad (5)$$

如果 $t_n \geq T$,则在 $nT - (n+1)T$ 内,变换器只工作于模态1,有

(2)工作模式2 开关 S 打开,二极管 D 导通。

$$\begin{cases} i_{n+1} = i_n + \frac{ET}{L}, \\ v_{n+1} = v_n \exp(-T/RC). \end{cases} \quad (6)$$

如果 $t_n < T$, 则在 $nT - (nT + t_n)$ 内, 变换器工作于模态 1, 且有

$$\begin{cases} i(nT + t_n) = I_{\text{ref}}, \\ v(nT + t_n) = v_n \exp(-t_n/RC). \end{cases} \quad (7)$$

然而, 从 $(nT + t_n)$ 时刻开始, 变换器将工作于模态 2.

当变换器工作于模态 2 时, 在初始条件 $i(nT + t_n) = I_{\text{ref}}$ 和 $v(nT + t_n) = v_n \exp(-t_n/RC)$ 下, 微分方程组(3)的解为

$$\begin{cases} i = \exp(\delta t) [a \cos \omega t + b \sin \omega t], \\ v = -L \exp(\delta t) [(a \delta + b \omega) \cos \omega t + (b \delta - a \omega) \sin \omega t], \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2RC}, \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}}, \\ a &= I_{\text{ref}}, \quad b = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{v_n \exp(-t_n/RC)}{L} + \delta I_{\text{ref}} \right). \end{aligned}$$

令 t_d 为从 $(nT + t_n)$ 时刻开始, 电流 i 在模态 2 下下降到零的时间, 则由(8)式可知应有

$$t_d = \frac{1}{\omega} \arctan \left(-\frac{a}{b} \right). \quad (9)$$

如果 $(t_n + t_d) \geq T$, 在周期 $nT - (n+1)T$ 内, 变换器仅工作于模态 1 和模态 2, 不经历模态 3. 这时有

$$\begin{cases} i_{n+1} = \exp[\delta(T - t_n)] [a \cos \omega(T - t_n) \\ \quad + b \sin \omega(T - t_n)], \\ v_{n+1} = -L \exp[\delta(T - t_n)] [(a \delta + b \omega) \\ \quad \times \cos \omega(T - t_n) + (b \delta - a \omega) \\ \quad \times \sin \omega(T - t_n)]. \end{cases} \quad (10)$$

然而, 如果 $(t_n + t_d) < T$, 则在周期 $nT - (n+1)T$ 内, 变换器的工作状态将先后经历模态 1、模态 2 和模态 3. 这时在模态 3 中, 有

$$\begin{cases} i_{n+1} = 0, \\ v_{n+1} = v_2(t_d) \exp[-(T - t_n - t_d)/RC], \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$v_2(t_d) = -L \exp(\delta t_d) [(a \delta + b \omega) \cos \omega t_d \\ + (b \delta - a \omega) \sin \omega t_d].$$

综合以上分析, 可以得出电流不连续运行模式下电流反馈型 Buck-Boost 变换器的分段光滑迭代映射方程, 表示成如下分段形式:

(1) 当 $i_n \leq \left(I_{\text{ref}} - \frac{ET}{L} \right)$ 时, 有

$$\begin{bmatrix} i_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = f_1(i_n, v_n) = \begin{bmatrix} f_{11}(i_n) \\ f_{12}(v_n) \end{bmatrix}; \quad (12)$$

(2) 当 $i_n > \left(I_{\text{ref}} - \frac{ET}{L} \right)$, 且 $t_n + t_d \geq T$ 时, 有

$$\begin{bmatrix} i_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = f_2(t_n, b) = \begin{bmatrix} f_{21}(t_n, b) \\ f_{22}(t_n, b) \end{bmatrix}; \quad (13)$$

(3) 当 $i_n > \left(I_{\text{ref}} - \frac{ET}{L} \right)$, 且 $t_n + t_d < T$ 时, 有

$$\begin{bmatrix} i_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = f_3(t_n, t_d, b) = \begin{bmatrix} f_{31}(t_n, t_d, b) \\ f_{32}(t_n, t_d, b) \end{bmatrix}; \quad (14)$$

其中 $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{31}$ 和 f_{32} 分别为

$$f_{11} = i_n + \frac{ET}{L},$$

$$f_{12} = v_n \exp(2\delta T),$$

$$f_{21} = \exp[\delta(T - t_n)]$$

$$\times [a \cos \omega(T - t_n) + b \sin \omega(T - t_n)],$$

$$f_{22} = -L \exp[\delta(T - t_n)]$$

$$\times [(a \delta + b \omega) \cos \omega(T - t_n)$$

$$+ (b \delta - a \omega) \sin \omega(T - t_n)],$$

$$f_{31} = 0,$$

$$f_{32} = -L \exp[\delta(2T - 2t_n - t_d)]$$

$$\times [(a \delta + b \omega) \cos \omega t_d + (b \delta - a \omega) \sin \omega t_d].$$

3. 数值结果与分析

本文的数值仿真是基于(11)–(13)式的分段光滑迭代映射方程进行的. 电路参数选取如下: $R = 20\Omega$, $L = 0.7\text{mH}$, $C = 12\mu\text{F}$, $T = 200\mu\text{s}$, $I_{\text{ref}} = 4\text{A}$. 取输入电压 E 为分岔参数, 其变化范围为 1–40V.

3.1. 数值结果

本文的分岔图通过如下方式获得. 首先选定某一具体的分岔参数值, 然后以 $i_0 = 0$, $v_0 = 0$ 为初值迭代 1500 次, 将最后获得的 500 个迭代值(i_n 或 v_n)示于分岔图中. 图 2 给出 E 为 1–40V 范围内的分岔图. 随输入电压 E 的减小, 在 $E = 31.65298\text{V}$ 处, 发生了周期 1 到周期 2 的分岔; 在 $E = 10.81617\text{V}$ 处, 则发生了周期 2 到周期 4 的分岔. 图 3 分别给出 $E = 31.65298\text{V}$ 附近放大的 i_n 分岔图和 $E = 10.81617\text{V}$ 附近放大的 v_n 分岔图. 随输入电压 E 继续减小, 映射约在 $E = 8.9\text{V}$ 附近突然由周期 4 轨道

进入混沌状态,并且在随后的参数区域内,混沌态与周期态交替出现.图4给出 E 为1—10V范围内放大的 i_n 分岔图.图5给出 $E=5$ V和 $E=5.65$ V附近放大的 i_n 分岔图.可以发现,映射不是像全局光滑系统中常见的由倍周期分岔路径到达混沌,而是经由某个周期轨道突然到达混沌.另外,图6还分别给出 E 为1—10V范围内以及 $E=5$ V和 $E=5.65$ V附近的最大李雅普诺夫指数(LLE).

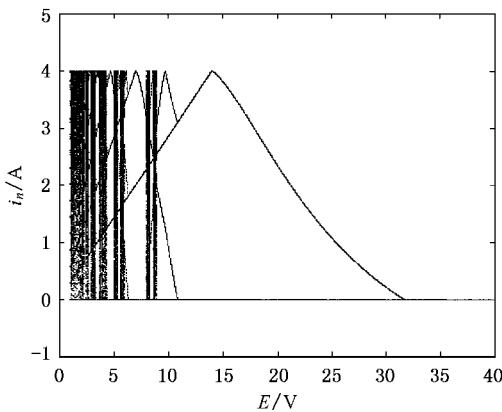


图2 E 为1—40V范围内 i_n 分岔图

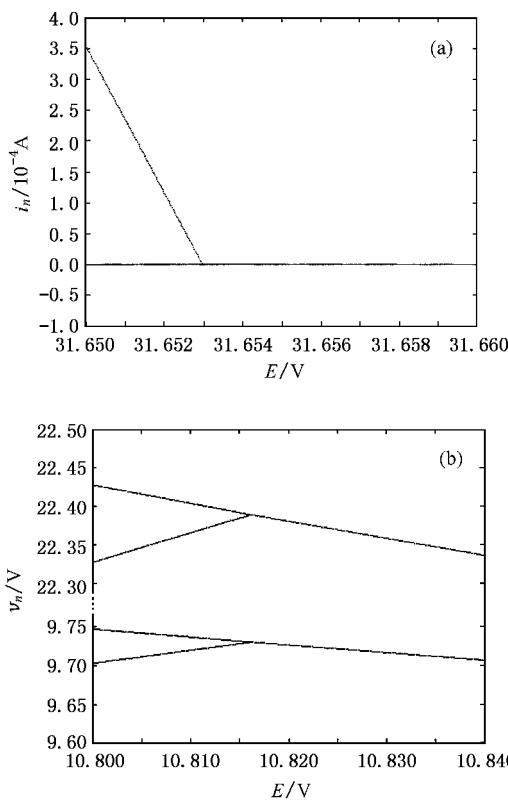


图3 $E=31.65298$ V附近放大的 i_n 分岔图(a)和 $E=10.81617$ V附近放大的 v_n 分岔图(b)

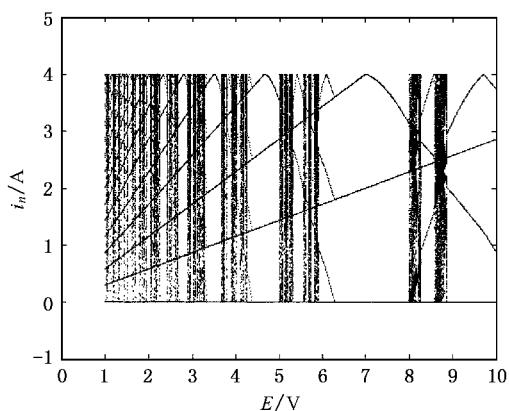


图4 E 为1—10V范围内放大的 i_n 分岔图

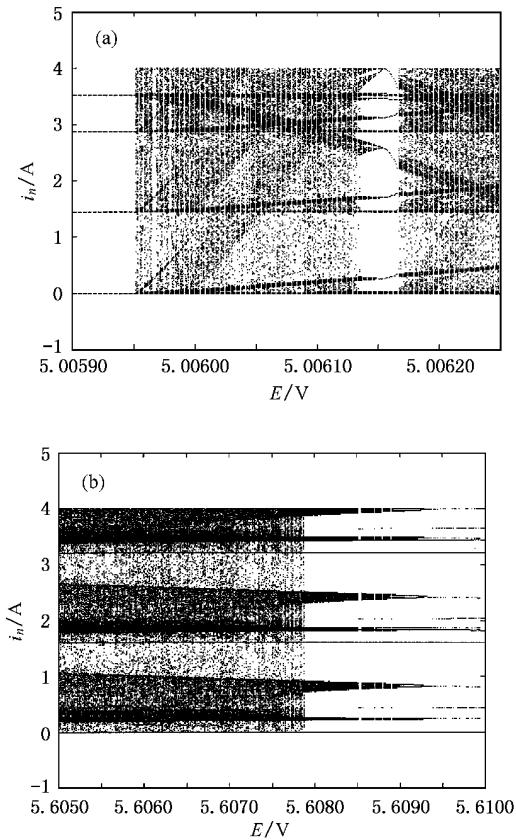


图5 $E=5$ V附近放大的 i_n 分岔图(a)和 $E=5.65$ V附近放大的 i_n 分岔图(b)

3.2. 结果分析

实际应用中,电感电流 i 必须被限定在0到 I_{ref} 之间,在本文中应满足 $0 \leq i_n \leq 4$ A.另外,由图2可以看出在本文的参数条件下, v_n 满足 $0 \leq v_n \leq 30$ V.所以在下面的分析中,只考虑(i_n , v_n)相平面中 $0 \leq i_n \leq 4$ A且 $0 \leq v_n \leq 30$ V的区域.

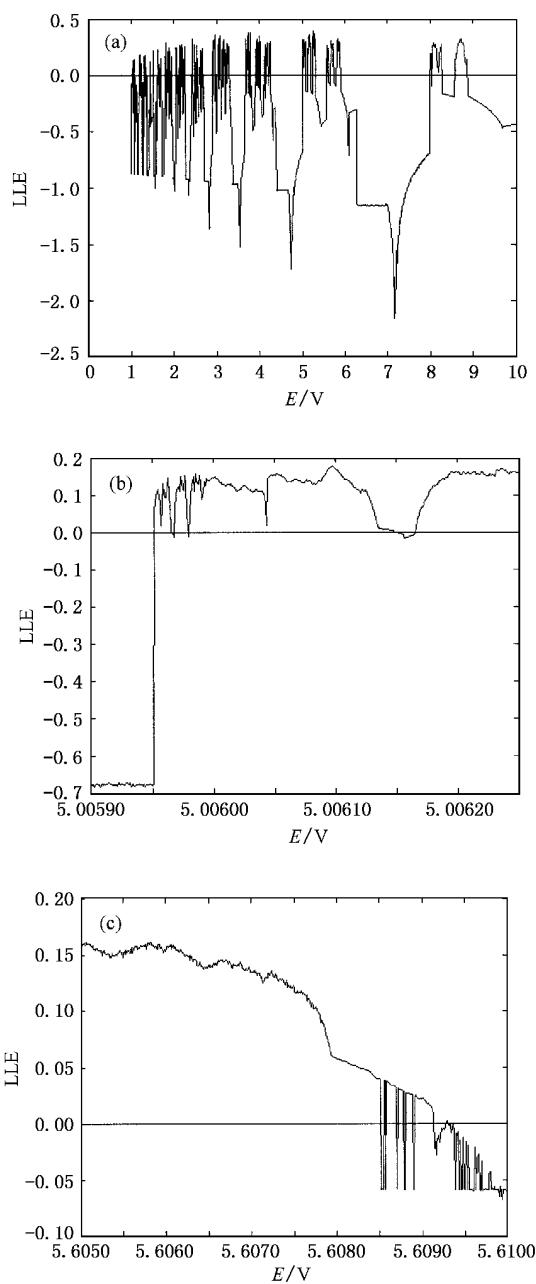


图 6 最大李雅普诺夫指数 E 为 1—10V 范围 (a) 5V 附近 (b) 和 5.65V 附近 (c)

对于相平面中的某个点 (i_n, v_n) , 必可由 (12), (13) 和 (14) 式中某个迭代映射方程得到下一个迭代点 (i_{n+1}, v_{n+1}) 。为分析方便, 我们将满足 (12), (13) 和 (14) 式迭代条件的点 (i_n, v_n) 的集合分别定义为区域 I、区域 II 和区域 III。由于在 $E = 14V$ 处 $I_{\text{ref}} - \frac{ET}{L} = 0$, 所以当 $E > 14V$ 时相平面仅由区域 II 和区域 III 组成, 而当 $E \leq 14V$ 时相平面则由区域 I、区域 II 和区域 III 共同组成。

从图 2 可以看出, 电流反馈型 Buck-Boost 变换器在 $E = 31.65298V$ 与 $E = 10.81617V$ 处发生的倍周期分岔, 与全局光滑系统中的倍周期分岔有着显著的区别。在全局光滑系统中, 分岔点附近的倍周期轨道分枝与分岔发生之前的周期轨道分枝是近似垂直的 (如图 7 所示); 而分段光滑系统中分岔点附近的倍周期轨道分枝与分岔发生之前的周期轨道分枝并不垂直 (如图 3 所示)。当 $E = 31.65298V$ 时, 相平面仅由区域 II 和区域 III 组成, 发生分岔时不动点位于区域 II 和区域 III 的边界上, 如图 8(a) 所示。当 $E = 10.81617V$ 时, 相平面由区域 I、区域 II 和区域 III 共同组成, 发生分岔时也有周期不动点位于区域 II 和区域 III 的边界上, 如图 8(b) 所示。另外, 我们还计算了发生分岔前后映射雅可比矩阵在周期轨道处的特征值。在 $E = 31.65298V$ 附近, 随输入电压 E 的减小, 周期 1 轨道的特征值由 $(0.1022, 0)$ 跃变为 $(-1.0884, 0.2230)$ 。而在 $E = 10.81617V$ 附近, 随输入电压 E 的减小, 周期 2 轨道的特征值由 $(-0.0342, 0)$ 跃变为 $(-2.3639, 0.0562)$ 。

在 $E = 5.005951V$ 处, 随输入电压 E 的增大, 发生了由周期 4 轨道到混沌状态的分岔。图 9 给出发生分岔前后的相图, 可以看出发生分岔时有周期点位于区域 II 和区域 III 的边界上。这表明此处发生的分岔为边界碰撞分岔。计算结果表明, 在 $E = 5.005951V$ 附近, 随输入电压 E 的增大, 周期 4 轨道的特征值由 $(0.0666, 0)$ 跃变为 $(12.1484, 0.0027)$ 。在 $E = 5.006166V$ 处, 随输入电压 E 的增大, 发生了由周期 25 轨道到混沌状态的分岔; 随输入电压 E 的减小, 则又发生周期 25 轨道到周期 50 轨道的分岔。图 10 给出 $E = 5.006166V$ 和 $E = 5.0061562V$ 发生分岔时的相图。由图 10(b) 可以看出, 当 $E = 5.0061562V$ 时在两个边界上都有周期点存在。

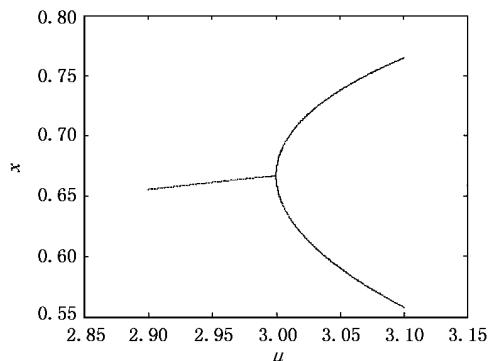
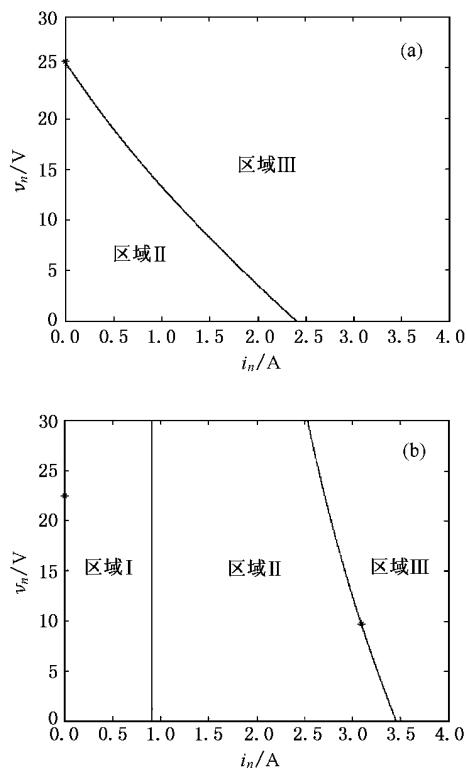
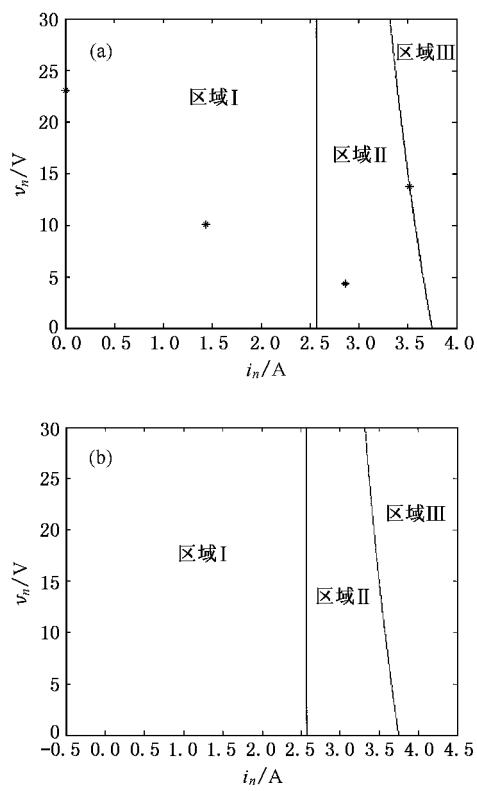
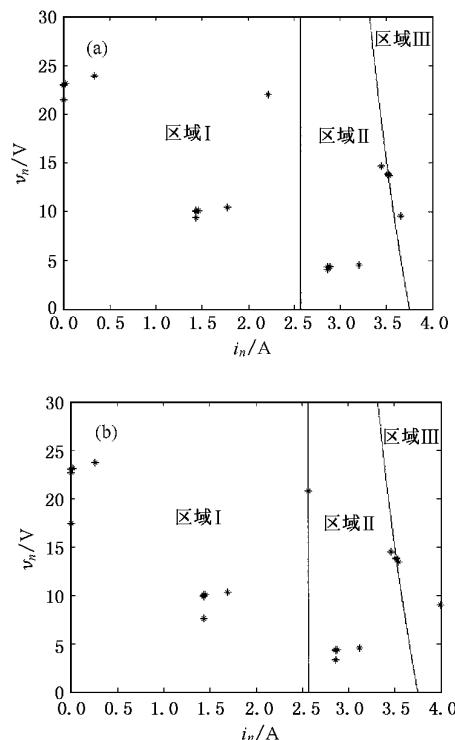
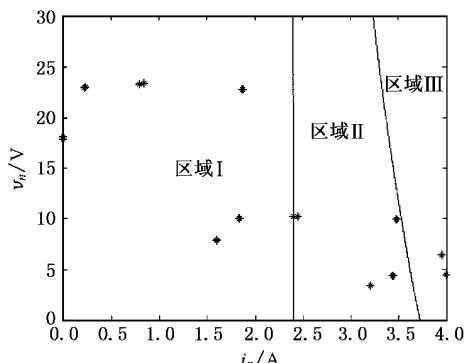


图 7 Logistic 映射 $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ 在 $\mu = 3$ 处的倍周期分岔

图 8 相图 $E = 31.65298V$ (a) 和 $E = 10.81617V$ (b)图 9 相图 $E = 5.005951V$ (a) 和 $E = 5.005952V$ (b)图 10 相图 $E = 5.006166V$ (a) 和 $E = 5.0061562V$ (b)

由图 5(b) 可看出, 在 $E = 5.65V$ 附近随输入电压 E 的减小, 映射先经历周期轨道, 然后突然进入混沌状态, 并且在混沌区域中还夹杂着一些很窄的周期窗口. 图 11 给出 $E = 5.60914V$ 时的相图, 随输入电压 E 的减小, 发生了周期 22 轨道到混沌态的分岔. 图 12 分别给出 $E = 5.609948V$, $E = 5.6099481V$ 和 $E = 5.6099482V$ 时所对应的周期 16、周期 11 和周期 8 轨道的相图. 可以看出, 当 $E = 5.6099481V$ 时, 周期 11 轨道有周期点位于区域 I 和区域 II 的边界上. 此时, 若输入电压 E 有非常小的扰动, 都会使得周期 11 轨道消失, 而产生新的周期 16 轨道或周期 8 轨道.

图 11 $E = 5.60914V$ 的相图

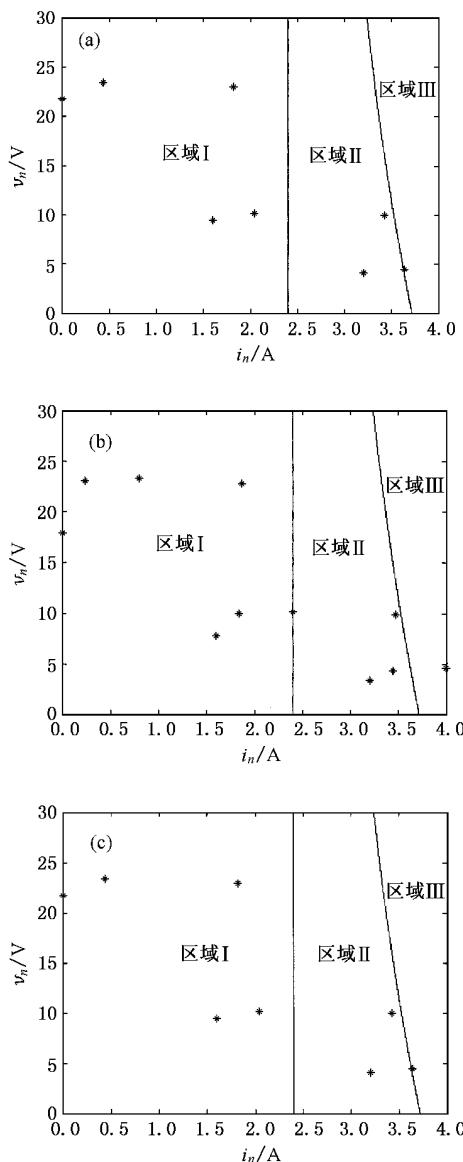


图 12 相图 $E = 5.609948V$ (a), $E = 5.6099481V$ (b)和 $E = 5.6099482V$ (c)

4. 讨论与结论

文献[5]根据数值仿真结果猜测在分段光滑映射中,如果分岔参数空间的某些邻域里只存在混沌状态,而无周期窗口和其他共存吸引子,则将此定义为鲁棒混沌。文献[16]给出具有两段形式的分段光滑映射中的鲁棒混沌产生的条件。但是,本文的数值仿真结果表明,在具有三段形式的分段光滑映射中没有观察到鲁棒混沌。例如图5所示,即使在很小的参数区间内仍然存在着周期窗口。这是因为,当相平面中存在着两个边界时比只存在一个边界时更容易发生混沌态到周期态的边界碰撞分岔。

数值仿真结果还表明,不连续运行模式下的电流反馈型 Buck-Boost 变换器在输入电压 E 变化时,其三段形式的分段光滑迭代映射会出现一系列非光滑分岔现象。例如:周期 1 到周期 2 或周期 25 到周期 50 的倍周期分岔。但与全局光滑系统不同的是,分岔点附近的倍周期轨道分枝与分岔前的周期轨道分枝并不垂直;还存在着周期 16 到周期 11 再到周期 8 的分岔;周期 4、周期 22 或周期 25 到混沌的分岔。当发生分岔时,总有某个或某些轨道点位于相平面中不同区域的边界上,这就说明发生的分岔为边界碰撞分岔。本文并未给出相平面中存在两个甚至多个边界时边界碰撞分岔的分类方法,这还有待于进一步的研究。

- [1] Banerjee S *et al* 2000 *IEEE Trans. CAS I* **47** 633
- [2] Banerjee S *et al* 2000 *IEEE Trans. CAS I* **47** 389
- [3] Zhusubaliyev Z T *et al* 2001 *Int. J. Bifurc. Chaos* **11** 2977
- [4] Maggio G M *et al* 2000 *IEEE Trans. CAS I* **47** 1160
- [5] Yuan G *et al* 1998 *IEEE Trans. CAS I* **45** 707
- [6] Banerjee S and Grebogi C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4052
- [7] Bernardo M D *et al* 1999 *Chaos Solit. Fract.* **10** 1881
- [8] Nusse H E *et al* 1994 *Phys. Rev. E* **49** 1073
- [9] Nusse H E and Yorke J A 1995 *Int. J. Bifurc. Chaos* **5** 189

- [10] Nusse H E and Yorke J A 1992 *Physica D* **57** 39
- [11] Bernardo M D *et al* 1997 *Int. J. Bifurc. Chaos* **7** 2755
- [12] Bernardo M D *et al* 1998 *Nonlinearity* **11** 859
- [13] Bernardo M D *et al* 2001 *Int. J. Bifurc. Chaos* **11** 1121
- [14] Iu H H C and Tse C K 2001 *IEEE Trans. CAS I* **48** 233
- [15] Tse C K and Bernardo M D 2002 *Proc. IEEE* **90** 768
- [16] Banerjee S *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 3049
- [17] Ma M Q *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1679 (in Chinese) [马明全等 2000 物理学报 **49** 1679]

Border collision bifurcations and chaos in a class of piecewise smooth systems with two boundaries^{*}

Dai Dong Ma Xi-Kui Li Xiao-Feng

(School of Electrical Engineering, Xi 'an Jiaotong University, Xi 'an 710049, China)

(Received 14 January 2003)

Abstract

A class of piecewise smooth maps with three zones is derived to describe the dynamics of a current-programmed Buck-Boost converter operating in a discontinuous mode. The numerical simulation is carried out and the bifurcation diagrams with the input voltage as a parameter are obtained. It is shown that, when a bifurcation occurs, some eigenvalues of the Jacobian matrix jumps over the unit circle in a discontinuous way, and there are always some orbit points lying on the boundaries which separate different regions in the phase plane. It is concluded that border collision bifurcations could occur when the input voltage varies, for example, a bifurcation from a periodic orbit to another periodic orbit or chaotic orbit.

Keywords : piecewise smooth system, border collision bifurcation, chaos

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Doctorate Foundation of Xi 'an Jiaotong University, China (Grant No. DFXJTU2001-4).