

介观耗散传输线的量子化

王忠纯

(盐城师范学院物理系, 盐城 224002)

(2002 年 12 月 20 日收到 2003 年 4 月 18 日收到修改稿)

从耗散传输线的经典运动方程出发, 将传输线中的单模信号进行量子化, 研究了传输线在激发相干态下的量子效应. 结果表明, 传输线的量子涨落不仅与电路参数和电路的状态有关, 还与传输线的位置有关.

关键词: 介观传输线, 耗散, 单模, 激发相干态

PACC: 7335, 0365

1. 引言

随着纳米技术和纳米电子学的发展, 电路日趋微型化, 电子器件的工作速度越来越高. 当电路介观化时, 必须考虑量子效应. 上世纪 70 年代, Louisell 研究了 LC 电路的量子效应^[1], 近年来许多文献对 RLC 或 LC 介观电路的量子涨落问题进行了广泛的研究^[3-10], 但研究的都是集中性的元件, 对于具有分布电感和分布电容的传输线电路的量子涨落问题研究很少. Louisell 曾提出无损耗传输线的量子化方案^[1]. 文献 [14] 采用 Louisell 的量子化方案研究了压缩真空态下介观无损耗传输线中电流和电流梯度的量子涨落. 本文从耗散传输线的经典运动方程出发, 在给出耗散传输线中的一个前进模的基础上, 设法引入正则变量将其量子化, 然后计算了传输线在激发相干态下的量子涨落, 分析了此量子涨落的特点, 指出文献 [1] 中的结论可看成是本文的特例.

2. 耗散传输线的量子化

对于双线或同轴传输线, 当电路中存在频率较高的交变电流时会出现分布参数效应. 设单位长度传输线的电感、电容、电阻和电导分别为 L, C, R 和 G (见图 1), 满足方程^[2]

$$-\frac{\partial v}{\partial z} = Rj + L \frac{\partial j}{\partial t}, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial j}{\partial z} = Gv + C \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (2)$$

由以上两式可得电报方程

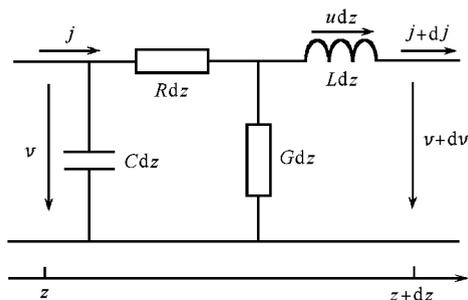


图 1 耗散传输线的等效电路

$$LC \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} + (LG + RC) \frac{\partial j}{\partial t} + RGj = 0. \quad (3)$$

由方程 (3) 解出传输线中电流的一个前进模为

$$j(z, t) = e^{-\sigma z} [A^* e^{i(\omega t - \beta z)} + A e^{-i(\omega t - \beta z)}], \quad (4)$$

式中 ω 为信号的角频率, σ 为衰减系数, β 为相位系数, σ 和 β 均为实数,

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{2} \left[(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2) \right]^{\frac{1}{2}} - (\omega^2 LC - RG) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$\beta = \left\{ \frac{1}{2} \left[(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2) \right]^{\frac{1}{2}} + (\omega^2 LC - RG) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

单位长度传输线电感上的电压(见图 1)为

$$u = L \frac{\partial j}{\partial t} = i\omega L e^{-\sigma z} [A^* e^{i(\omega t - \beta z)} - A e^{-i(\omega t - \beta z)}]. \quad (7)$$

为了去除衰减因子, 定义两个新的实量 $\xi(z, t), \eta(z, t)$,

$$j(z, t) = \xi(z, t) e^{-\sigma z}, \quad (8)$$

$$u(z, t) = \frac{\omega^2}{z_0} e^{-\sigma z} \chi(z, t), \quad (9)$$

式中 z_0 为传输线的长度, 则

$$\xi(z, t) = A^* e^{\xi(\omega t - \beta z)} + A e^{-\xi(\omega t - \beta z)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \chi(z, t) &= \frac{Lz_0}{\omega^2} e^{\sigma z} \frac{\partial j}{\partial t} = \frac{Lz_0}{\omega^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= i \frac{Lz_0}{\omega} [A^* e^{\xi(\omega t - \beta z)} - A e^{-\xi(\omega t - \beta z)}], \quad (11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\omega^2}{Lz_0} \eta, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -Lz_0 \xi, \quad (13)$$

易见 $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = 0$, ξ, η 为正则变量, 满足正则方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (14b)$$

由(12)和(14a)式, $\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\omega^2}{Lz_0} \eta$, 积分得 $H(\xi, \eta) =$

$\frac{\omega^2}{2Lz_0} \eta^2 + f(\xi)$, $f(\xi)$ 为只含变量 ξ 的函数. $\frac{\partial H}{\partial \xi} =$

$\frac{df}{d\xi}$, 将该式代入(14b)式, 并利用(13)式, 可得 $\frac{df}{d\xi} =$

$Lz_0 \xi$. 积分得 $f(\xi) = \frac{1}{2} Lz_0 \xi^2$, 积分中取积分常数为零, 则系统哈密顿量为

$$H = \frac{\omega^2 \eta^2}{2Lz_0} + \frac{1}{2} Lz_0 \xi^2. \quad (15)$$

令

$$[\xi, \eta] = i\hbar, \quad (16)$$

就实现了介观耗散传输线的量子化. 量子化后 A^* 和 A 成为算符. 将(10)和(11)式代入(16)式

$$[\xi, \eta] = i \frac{Lz_0}{\omega} [A^* e^{\xi(\omega t - \beta z)} + A e^{-\xi(\omega t - \beta z)},$$

$$A^* e^{\xi(\omega t - \beta z)} - A e^{-\xi(\omega t - \beta z)}]$$

$$= i \frac{2Lz_0}{\omega} [A, A^*] = i\hbar,$$

$$[A, A^*] = \frac{\hbar\omega}{2Lz_0}. \quad (17)$$

令

$$A = a \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}}, \quad A^* = a^+ \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}}, \quad (18)$$

将(18)式代入(17)式, 可得 $[a, a^+] = 1$, 可见由(18)式引入的算符 a, a^+ 就是湮没算符和产生算符. 将

(18)式代入(10)和(11)式, ξ, η 可用 a, a^+ 表示为

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}} [a^+ e^{\xi(\omega t - \beta z)} + a e^{-\xi(\omega t - \beta z)}], \quad (19)$$

$$\eta = i \sqrt{\frac{\hbar Lz_0}{2\omega}} [a^+ e^{\xi(\omega t - \beta z)} - a e^{-\xi(\omega t - \beta z)}], \quad (20)$$

将(19)和(20)式代入(15)式, 可得哈密顿算符

$$H = \frac{1}{2} \hbar\omega (a^+ a + a a^+) = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right). \quad (21)$$

这是一个谐振子的哈密顿算符. 由此可见, 去除衰减因子 $e^{-\sigma z}$ 后, 耗散传输线上的一个前进模与一个谐振子等效. 注意到湮没算符、产生算符在 Heisenberg 图像和 Schrödinger 图像中的关系为^[11]

$$a_H = a e^{-i\omega t}, \quad a_H^+ = a^+ e^{i\omega t}, \quad (22)$$

且在 Heisenberg 图像和 Schrödinger 图像中哈密顿量形式相同

$$H_H = \hbar\omega \left(a_H^+ a_H + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(a^+ a + \frac{1}{2} \right), \quad (23)$$

则

$$\xi_H = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}} (a_H^+ e^{-i\beta z} + a_H e^{i\beta z}), \quad (24)$$

$$\eta_H = i \sqrt{\frac{\hbar Lz_0}{2\omega}} (a_H^+ e^{-i\beta z} - a_H e^{i\beta z}). \quad (25)$$

由 Heisenberg 算符的运动方程

$$\frac{\partial \xi_H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\xi_H, H_H], \quad (26)$$

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\eta_H, H_H], \quad (27)$$

不难推得

$$\frac{\partial \xi_H}{\partial t} = \frac{\omega^2}{Lz_0} \eta_H, \quad \frac{\partial \eta_H}{\partial t} = -Lz_0 \xi_H.$$

以上 Heisenberg 图像中的运动方程与经典运动方程(12)和(13)形式相同, 这正是预期的结果.

3. 激发相干态下耗散传输线的量子涨落

设 $t=0$ 时系统处在激发相干态^[12]

$$|m, \alpha\rangle = \frac{a^+ m |\alpha\rangle}{\alpha |a^m a^+ m| \alpha} \frac{1}{2}, \quad (28)$$

由于 $t=0$ 时 H 图像与 S 图像中的算符相同, 所以下求 $t=0$ 时的量子涨落时, 略去算符的下标“H”. 由(8)(24)(9)和(25)式, 传输线中的电流算符和

单位长度传输线电感上的电压算符分别为

$$j = \xi e^{-\alpha z} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}} e^{-\alpha z} (a^+ e^{-i\beta z} + a e^{i\beta z}), \quad (29)$$

$$u = \frac{\omega^2}{z_0} e^{-\alpha z} \eta = i\omega^2 \sqrt{\frac{\hbar L}{2z_0\omega}} e^{-\alpha z} (a^+ e^{-i\beta z} - a e^{i\beta z}), \quad (30)$$

j, u 满足对易关系

$$[j, u] = \frac{\omega^2}{z_0} e^{-2\alpha z} [\xi, \eta] = i \frac{\hbar\omega^2}{z_0} e^{-2\alpha z}, \quad (31)$$

j, u 不对易, 传输线中的电流与单位长度导线电感上的电压不能同时确定.

$$\begin{aligned} \bar{j} &= m |\alpha| |j|_{m, \alpha} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}} e^{-\alpha z} m |\alpha| |a^+ e^{-i\beta z} + a e^{i\beta z}|_{m, \alpha} \quad (32) \end{aligned}$$

利用正规有序化公式^[13]

$$a^n a^{+m} = \sum_{l=0}^{\min(m, n)} \frac{m! n!}{l!(m-l)!(n-l)!} a^{+(m-l)} a^{n-l}, \quad (33)$$

可得

$$\begin{aligned} \alpha |a^m a^{+m}| \alpha &= m! \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} |\alpha|^{2k} \\ &= m! L_m(-|\alpha|^2), \quad (34) \end{aligned}$$

式中 $L_m(-|\alpha|^2)$ 为拉盖尔多项式^[11]. 将(28)(33)和(34)式代入(32)式, 可得电流的平均值

$$\begin{aligned} \bar{j} &= \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2Lz_0}} (m+1) e^{-\alpha z} Y_m^{(1)}(|\alpha|^2) (\alpha^* e^{-i\beta z} + \alpha e^{i\beta z}) \\ &= \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{Lz_0}} (m+1) e^{-\alpha z} Y_m^{(1)}(|\alpha|^2) |\alpha| \cos(\beta z + \varphi), \quad (35) \end{aligned}$$

式中^[8]

$$\begin{aligned} Y_m^{(1)}(|\alpha|^2) &= \frac{1}{L_m(-|\alpha|^2)} \\ &\times \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(k+1)(k!) (m-k)!} |\alpha|^{2k}, \quad (36) \end{aligned}$$

φ 为相干态的本征值 α 的辐角. 同理得单位长度传输线电感上电压的平均值为

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \omega^2 \sqrt{\frac{2\hbar L}{\omega z_0}} (m+1) e^{-\alpha z} Y_m^{(1)}(|\alpha|^2) |\alpha| \\ &\times \sin(\beta z + \varphi). \quad (37) \end{aligned}$$

激发相干态下 \bar{j}, \bar{u} 一般不为零. 进一步求出

$$\begin{aligned} \overline{j^2} &= \frac{\hbar\omega}{2Lz_0} e^{-2\alpha z} \left[\mathcal{X}(m+2) \mathcal{Y}(m+1) |\alpha|^2 Y_m^{(2)}(|\alpha|^2) \right. \\ &\left. \times \cos \mathcal{X}(\beta z + \varphi) + \mathcal{X}(m+1) \gamma_m - 1 \right], \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{u^2} &= \frac{\hbar L \omega^3}{2z_0} e^{-2\alpha z} \left[-\mathcal{X}(m+2) \mathcal{Y}(m+1) |\alpha|^2 Y_m^{(2)}(|\alpha|^2) \right. \\ &\left. \times \cos \mathcal{X}(\beta z + \varphi) + \mathcal{X}(m+1) \gamma_m - 1 \right], \quad (39) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} Y_m^{(2)}(|\alpha|^2) &= \frac{1}{L_m(-|\alpha|^2)} \\ &\times \sum_{k=0}^m \frac{m!}{(k+2)(k+1)(k!) (m-k)!} |\alpha|^{2k}, \quad (40) \end{aligned}$$

$$\gamma_m = \frac{L_{m+1}(-|\alpha|^2)}{L_m(-|\alpha|^2)}. \quad (41)$$

电流的量子涨落

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta j)^2} &= \bar{j}^2 - \bar{j}^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2Lz_0} e^{-2\alpha z} \left\{ \mathcal{X}(m+2) \mathcal{Y}(m+1) |\alpha|^2 \right. \\ &\times Y_m^{(2)}(|\alpha|^2) \cos \mathcal{X}(\beta z + \varphi) \\ &- \mathcal{X}(m+1) \gamma_m |\alpha|^2 [Y_m^{(1)}(|\alpha|^2)]^2 \\ &\left. \times \cos^2(\beta z + \varphi) + \mathcal{X}(m+1) \gamma_m - 1 \right\}. \quad (42) \end{aligned}$$

单位长度传输线电感上电压的量子涨落

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta u)^2} &= \bar{u}^2 - \bar{u}^2 \\ &= \frac{\hbar L \omega^3}{2z_0} e^{-2\alpha z} \left\{ -\mathcal{X}(m+2) \mathcal{Y}(m+1) |\alpha|^2 \right. \\ &\times Y_m^{(2)}(|\alpha|^2) \cos \mathcal{X}(\beta z + \varphi) \\ &- \mathcal{X}(m+1) \gamma_m |\alpha|^2 [Y_m^{(1)}(|\alpha|^2)]^2 \\ &\left. \times \sin^2(\beta z + \varphi) + \mathcal{X}(m+1) \gamma_m - 1 \right\}. \quad (43) \end{aligned}$$

由(42)和(43)式可见, 激发相干态下单模介观耗散传输线中存在量子涨落, 量子涨落的大小不仅与电路参数(L, C, R, G, z_0)、前进模的状态参量(m, α)有关, 一般还与传输线上的位置 z 有关. 这是具有分布参数的传输线电路与集中性元件 LC 电路的主要差异. 量子涨落一方面随 z 的变化呈现周期性的变化, 另一方面随 z 的增大按指数规律衰减. 注意到拉盖尔多项式 $L_m(-|\alpha|^2)$ 在 $m=0$ 及 $\alpha=0$ 时, 其值均为 1, (28)式给出的激发相干态包含了相干态和 Fock 态.

当 $\alpha=0$ 时, 激发相干态退化为 Fock 态 $|m, \gamma_m\rangle = 1$. 由(42)和(43)式得 Fock 态下单模耗散传输线的量子涨落

$$\overline{(\Delta j)^2} = (2m+1) \frac{\hbar\omega}{2Lz_0} e^{-2\alpha z}, \quad (44)$$

$$\overline{(\Delta u)^2} = (2m+1) \frac{\hbar L \omega^3}{2z_0} e^{-2\alpha z}. \quad (45)$$

当 $m = 0$ 时, 激发相干态退化到相干态 $|\alpha\rangle$. 注意到 $m = 0$ 时, $Y_0^{(1)}(|\alpha|^2) = 1$, $Y_0^{(2)}(|\alpha|^2) = \frac{1}{2}$, $\gamma_0 = 1 + |\alpha|^2$, 则相干态下单模耗散传输线的量子涨落为

$$\overline{(\Delta j)^2} = \frac{\hbar\omega}{2Lz_0} e^{-2\alpha}, \quad (46)$$

$$\overline{(\Delta u)^2} = \frac{\hbar L\omega^3}{2z_0} e^{-2\alpha}, \quad (47)$$

$$\overline{(\Delta j)^2} \cdot \overline{(\Delta u)^2} = \frac{\hbar^2 \omega^4}{4z_0^2} e^{-4\alpha}. \quad (48)$$

这与直接由对易关系式(31)得出的结果相一致.

在 Fock 态中, 当 $m = 0$ 即真空态时(44)和(45)式变成(46)和(47)式, 传输线在真空态和相干态时的量子涨落相同. 由(44)–(48)式也可看到, 即使在 Fock 态和相干态下, 传输线上的量子涨落也与传输线上的位置 z 有关. 对于理想无损耗传输线, $R = 0$,

$G = 0$, $\sigma = 0$, $\beta = \omega \sqrt{LC}$, 则真空态或相干态下传输线中的电流和单位长度导线电感上电压的量子涨落之积 $\overline{(\Delta j)^2} \cdot \overline{(\Delta u)^2} = \frac{\hbar^2 \omega^4}{4z_0^2}$, 与传输线上的位置 z 无关, 与信号角频率 ω 的四次方成正比, 与传输线长度 z_0 的平方成反比. 此时(29)式给出的电流算符与文献[1]中的情况相同.

4. 结 论

激发相干态下单模介观耗散传输线存在量子涨落. 量子涨落的大小一般既随传输距离的增大按指数规律衰减, 又随传输线位置的变化呈现周期性变化. 在 Fock 态和相干态, 量子涨落不再有与位置有关的周期性变化, 但一般仍随传输距离的增大而衰减. 无损耗传输线可看成是本文的特例.

- [1] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)
- [2] Xie C F and Rao K J 1999 *Electromagnetic Field and Wave* (Beijing: Higher Education Press) p 207 in Chinese [谢处方、饶克谨 1999 电磁场与电磁波(北京: 高等教育出版社)第 207 页]
- [3] Chen B et al 1995 *Phys. Lett. A* **205** 121
- [4] Wang J S 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁 1998 物理学报 **47** 1187]
- [5] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 965 (in Chinese) [顾永建 2000 物理学报 **49** 965]
- [6] Wang Z Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1808 (in Chinese) [汪仲清 2002 物理学报 **51** 1808]
- [7] Gu Y J 2001 *Chin. Phys.* **10** 490
- [8] Cui Y S 1999 *Chin. J. Quantum Electron.* **16** 310 (in Chinese) [崔元顺 1999 量子电子学报 **16** 310]
- [9] Ji Y H, Lei M S and Ouyang C Y 2002 *Chin. Phys.* **11** 163
- [10] Liang X T and Fan H Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 486
- [11] Liang K M 1978 *Mathematical Physics* (Beijing: Higher Education Press) p 542 in Chinese [梁昆森 1978 数学物理方法(北京: 高等教育出版社)第 542 页]
- [12] Agarwal G S and Tara K 1991 *Phys. Rev. A* **43** 492
- [13] Guo G C 1990 *Quantum Optics* (Beijing: Higher Education Press) p 176 in Chinese [郭光灿 1990 量子光学(北京: 高等教育出版社)第 176 页]
- [14] Wang Z C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1230 (in Chinese) [王忠纯 2003 物理学报 **52** 1230]

The quantization of a mesoscopic dissipation transmission line

Wang Zhong-Chun

(*Department of Physics ,Yancheng Teachers College , Yancheng 224002 , China*)

(Received 20 December 2002 ; revised manuscript received 18 April 2003)

Abstract

Starting from the classical equation of motion a dissipation transmission line ,the mesoscopic dissipation transmission line is quantized. The quantum effects of the line under excited coherent states are investigated. The results indicate that the quantum fluctuations of the line are not only determined by the circuit parameter and the states of the circuit ,but also dependent on the position of the line .

Keywords : mesoscopic transmission line , dissipation , single mode , excited coherent state

PACC : 7335 , 0365