第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2941-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.12,December,2003

Hamilton 系统的 Mei 对称性、Noether 对称性和 Lie 对称性*

罗绍凯

(长沙大学数学力学与数学物理研究所,长沙 410003)

(2002 年 12 月 24 日收到;2003 年 3 月 10 日收到修改稿)

研究 Hamilton 系统的形式不变性即 Mei 对称性,给出其定义和确定方程.研究 Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量.给出一个例子说明本文结果的应用.

关键词:Hamilton 系统,Mei 对称性,Noether 对称性,Lie 对称性,守恒量

PACC:0320,0220

1. 引 言

动力学系统的对称性与守恒量在现代数学、力学和物理学中占有重要地位.利用对称性寻求系统守恒量的方法主要有:Noether 对称性[1]、Lie 对称性[2]和 Mei 的形式不变性[3].Noether 对称性是利用动力学系统的 Hamilton 作用量泛函在无限小变换下的不变性寻求系统的守恒量,对称性与守恒量之间一一对应.Lie 对称性是动力学方程在无限小变换下的不变性,Lie 对称性不一定总导致守恒量,而要满足 Noether 等式或 Killing 方程才导致守恒量.Mei 的形式不变性是一种新的对称性,是指动力学方程中的动力学函数在无限小变换下仍满足原方程的形式不变,它不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性.Mei 的形式不变性不一定总导致守恒量,正如 Lie 对称性一样,也是在满足 Noether 等式或 Killing 方程的条件下导致守恒量.因此,与 Lie 对称性、Mei 的形式不变性相应的守恒量都是 Noether 守恒量.鉴于 Mei 的形式不变性与 Lie 对称性在寻求系统的守恒量方面具有同等的地位,为了使三种对称性的称谓相统一,我们把 Mei 的形式不变性称为 Mei 对称性,把形式不变性的判据称为 Mei 对称性的确定方程.

2000 年,Mei 研究了 Lagrange 系统的形式不变性,提出一种寻求动力学系统守恒量的新方法[3].这种新的对称性受到学术界的关注,被迅速拓展到 Appell 系统[4—7]、Nielsen 系统[8,9]、Chaplygin 系统[10]、Birkhoff 系统[11—15]、非完整约束系统[16]、变质量系统[5]、相对论系统和转动相对论系统[6,14,15],形成了利用对称性寻求系统守恒量的一种新的通用性的方法.但是,关于 Hamilton 系统的 Mei 对称性研究尚未见报道.

Hamilton 系统动力学已被广泛应用于现代物理学领域,Hamilton 系统的对称性与守恒量在量子场论及其相关领域中占有重要位置[17,18].1989 年,Li[19]研究了 Hamilton 正则系统的 Noether 对称性与守恒量.1999 年以来,Mei[20]和 Zhang 等[21]研究了 Hamilton 正则系统的 Lie 对称性与守恒量.本文研究 Hamilton 正则系统的 Mei 对称性与守恒量.首先给出 Hamilton 系统的 Mei 对称性定义;其次建立 Hamilton 系统的 Mei 对称性确定方程;然后分别研究 Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性、Lie 对称性之间的关系,寻求系统的守恒量;最后给出两个例子说明本文结果的应用.

2. Hamilton 系统的 Mei 对称性及其确定方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s($s=1,\cdots,n$)确定.系统的运动微分方程可写为

* 国家自然科学基金(批准号:10272021,10372053)、河南省自然科学基金(批准号:934060800)和湖南省教育厅科研基金(批准号:02C033)资助的课题.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,\cdots,n), \tag{1}$$

式中 $L(t,q_s,\dot{q}_s)=T(t,q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)$ 为系统的 Lagrange 函数，T 为动能，V 为势能. 非奇异 Lagrange 系统的方程(1)经过 Legendre 变换，并引进 Hamilton 函数 $H(t,q_s,p_s)$，可表为正则形式

$$\begin{aligned}\dot{q}_s &= \frac{\partial H}{\partial p_s},\\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s},\\ H &= p_s\dot{q}_s - L,\\ p_s &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,\cdots,n),\end{aligned} \tag{2}$$

式中 p_s 为广义动量，q_s 和 p_s 为正则变量. Hamilton 正则方程(2)可展开为显式

$$\begin{aligned}\dot{q}_s &= g_s(t,q_k,p_k),\\ \dot{p}_s &= h_s(t,q_k,p_k) \quad (s,k=1,\cdots,n).\end{aligned} \tag{3}$$

完整保守系统，广义力有广义势的完整系统，以及 Lagrange 力学逆问题系统等，都是 Lagrange 系统，因此它们的运动方程都有 Hamilton 正则形式(2)式.

引入时间，广义坐标和广义动量的无限小变换

$$\begin{aligned}t^* &= t+\Delta t,\\ q_s^*(t^*) &= q_s(t)+\Delta q_s,\\ p_s^*(t^*) &= p_s(t)+\Delta p_s \quad (s=1,\cdots,n).\end{aligned} \tag{4}$$

其展开式为

$$\begin{aligned}t^* &= t+\varepsilon\xi_0(t,q_k,p_k),\\ q_s^* &= q_s+\varepsilon\xi_s(t,q_k,p_k),\\ p_s^* &= p_s+\varepsilon\eta_s(t,q_k,p_k) \quad (s,k=1,\cdots,n),\end{aligned} \tag{5}$$

式中 ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_s,η_s 称为无限小生成元. 引入无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}. \tag{6}$$

它的一次扩展为

$$\begin{aligned}X^{(1)} &= X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\\ &\quad+(\dot{\eta}_s-\dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}.\end{aligned} \tag{7}$$

定义 如果 Hamilton 函数 $H(t,q_s,p_s)$ 在无限小变换(5)式下使得 Hamilton 正则方程(2)的形式保持不变，即

$$\begin{aligned}\dot{q}_s &= \frac{\partial H^*}{\partial p_s},\\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H^*}{\partial q_s} \quad (s=1,\cdots,n)\end{aligned} \tag{8}$$

成立，则称这种不变性为 Hamilton 系统(2)的 Mei 对称性.

定理 1 对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果无限小变换(5)式的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial p_s}X^{(0)}(H)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial q_s}X^{(0)}(H)=0 \quad (s=1,\cdots,n),\end{aligned} \tag{9}$$

则系统(2)是 Mei 对称性的.

证 展开 H^*，有

$$\begin{aligned}H^* &= H(t^*,q_s^*,p_s^*)\\ &= H(t,q_s,p_s)+\varepsilon X^{(1)}(H)+o(\varepsilon^2)\\ &= H(t,q_s,p_s)+\varepsilon X^{(0)}(H)+o(\varepsilon^2).\end{aligned} \tag{10}$$

将(10)式代入方程(8)，并利用方程(2)，忽略 ε^2 及以上高阶小量项，便得(9)式.

把方程(9)称为 Hamilton 系统的 Mei 对称性确定方程.

3. Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性

Hamilton 系统(2)的 Mei 对称性不一定总导致守恒量. 下面的定理给出系统的 Mei 对称性导致守恒量的条件.

定理 2 对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果无限小变换(5)式的生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Mei 对称性确定方程(9)，且存在规范函数 $G(t,q_s,p_s)$ 使下列 Noether 等式

$$\begin{aligned}&p_s\dot{\xi}_s-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\dot{\xi}_0=-\dot{G},\\ &\eta_s=\frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\end{aligned} \tag{11}$$

成立，或者使下列 Killing 方程

$$\begin{aligned}&p_s\frac{\partial \xi_s}{\partial p_k}-H\frac{\partial \xi_0}{\partial p_k}=-\frac{\partial G}{\partial p_k} \quad (k=1,\cdots,n),\\ &p_s\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+p_s\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s\\ &\quad-H\frac{\partial \xi_0}{\partial t}-H\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}=-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s},\\ &\eta_s=\frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0)\end{aligned} \tag{12}$$

成立，则系统的 Mei 对称性将导致如下守恒量：

$$I = p_s\xi_s - H\xi_0 + G = \text{const}. \tag{13}$$

下面给出定理 2 的逆定理.

定理 3　对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果有满足 Noether 等式(11)或 Killing 方程(12)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 使 Mei 对称性确定方程(9)成立，那么系统(2)存在的守恒量(13)式是相应于 Mei 对称性的守恒量.

比较方程(9)和方程(11)，(12)可以看出，Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Noether 对称性一般是不同的.

4. Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性

下面的定理给出 Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性之间的关系，并给出相应的逆定理.

定理 4　对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果无限小变换(5)式的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足 Mei 对称性确定方程(9)，而且使下列 Lie 对称性确定方程

$$\dot{\xi}_s - \dot{\xi}_0 g_s = X^{(0)}(g_s),$$

$$\dot{\eta}_s - \dot{\xi}_0 h_s = X^{(0)}(h_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{14}$$

成立，那么系统(2)的 Mei 对称性导致 Lie 对称性.

定理 5　对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果无限小变换(5)式的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足 Lie 对称性确定方程(14)，且使 Mei 对称性确定方程(9)成立，那么系统(2)的 Lie 对称性导致 Mei 对称性.

定理 6　对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果有满足 Mei 对称性确定方程(9)的无限小生成元 ξ_0，ξ_s, η_s，使 Lie 对称性确定方程(14)成立，且存在规范函数 $G(t, q_s, p_s)$ 满足下列结构方程

$$H\dot{\xi}_0 - \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s - p_s\dot{\xi}_s + X^{(0)}(H) = \dot{G}, \tag{15}$$

那么系统(2)的 Mei 对称性将导致如下守恒量：

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const}. \tag{16}$$

定理 7　对于给定的 Hamilton 系统(2)，如果有满足 Lie 对称性确定方程(14)的无限小生成元 ξ_0，ξ_s, η_s，使 Mei 对称性确定方程(9)成立，且存在规范函数 $G(t, q_s, p_s)$ 使结构方程(15)成立，那么系统(2)存在的守恒量(16)式是相应于 Mei 对称性的守恒量.

由定理 4、定理 5 可知，Hamilton 系统的 Mei 对称性与 Lie 对称性一般是不同的.

由于结构方程(15)等价于 Noether 等式(11)，它们都归结为 Killing 方程(12)，比较定理 2 和定理 6 可知，Mei 对称性和 Lie 对称性都是在满足 Noether 等式的条件下导致 Noether 守恒量. 在利用对称性寻求系统守恒量的理论研究与应用过程中，Mei 对称性与 Lie 对称性具有同等的地位. 但是，从力学角度看，在上述三种对称性中，Mei 对称性最易理解、也最直接.

5. 算　例

已知单自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q, \tag{17}$$

于是有

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, \tag{18}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 + q, \tag{19}$$

$$g = p, \qquad h = -1, \tag{20}$$

$$X^{(0)}(H) = \xi + p\eta. \tag{21}$$

Mei 对称性的确定方程(9)给出

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} + \eta + p\frac{\partial \eta}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} + p\frac{\partial \eta}{\partial q} = 0. \tag{22}$$

如果取

$$\xi_0 = 1, \quad \xi = 0, \quad \eta = 0, \tag{23}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi = 1, \quad \eta = 0, \tag{24}$$

则(22)式满足，且分别对应系统的 Mei 对称性. 把生成元(23)和(24)式分别代入 Noether 等式(11)，可找到规范函数

$$G_1 = 0, \tag{25}$$

$$G_2 = t, \tag{26}$$

使等式(11)成立，因此由(13)式得到系统存在相应的守恒量

$$I_1 = -H = \text{const}. \tag{27}$$

$$I_2 = p + t = \text{const}. \tag{28}$$

由于存在规范函数(25)和(26)式使得生成元(23)和(24)式分别满足 Noether 等式(11)，相应的 Mei 对称性导致 Noether 对称性，因此系统存在形如(27)和(28)式的守恒量.

生成元(23)和(24)式分别满足 Lie 对称性确定方程(14)，相应的 Mei 对称性导致 Lie 对称性，而且由结构方程(15)可分别得到规范函数(25)和(26)

式.因此,由(16)式可得系统存在的守恒量(27)和(28)式.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Math. Phys.* **2** 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 105

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[5] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[7] Luo S K 2002 *J. Changsha Univ.* **16**(4) 1 (in Chinese) [罗绍凯 2002 长沙大学学报 **16**(4) 1]

[8] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[9] Fang J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会 2002 物理学报 **51** 2183]

[10] Ge W K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 939 (in Chinese) [葛伟宽 2002 物理学报 **51** 939]

[11] Mei F X 2001 *J. Beijing Inst. Technol.* **10** 138

[12] Cheng X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 53

[13] Luo S K 2002 *Res. Dyn. Vibr. Contr.* (Beijing: Mechanical Industry Press) p1 (in Chinese) [罗绍凯 2002 动力学、振动与控制研究(北京 机械工业出版社) p1]

[14] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[15] Luo S K 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 257

[16] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[17] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[18] Li Z P 1999 *Constrained Hamiltonian Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1999 约束 Hamiltonian 系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[19] Li Z P 1989 *J. Xinjiang Univ.* **6**(3) 37 (in Chinese) [李子平 1989 新疆大学学报 **6**(3) 37]

[20] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)]

[21] Zhang Y, Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816 (in Chinese) [张 毅、薛 纭 2001 物理学报 **50** 816]

Mei symmetry, Noether symmetry and Lie symmetry of Hamiltonian system*

Luo Shao-Kai

(*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics*, *Changsha University*, *Changsha* 410003, *China*)

(Received 24 December 2002; revised manuscript received 10 March 2003)

Abstract

The Mei symmetry, i.e. the form invariance, of a Hamiltonian system is studied. The definition and the determining equation of Mei symmetry in the Hamiltonian system are given. The relations among the Mei symmetry, the Noether symmetry and the Lie symmetry are studied, and the conserved quantities of Hamiltonian system are obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: Hamiltonian system, Mei symmetry, Noether symmetry, Lie symmetry, conserved quatntity

PACC: 0320, 0220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021, 10372053), the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 934060800), and the Scientific Research Foundation of the Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 02C033).