第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2945-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.12,December,2003

相对论力学系统的形式不变性与 Lie 对称性

方建会 陈培胜 张 军 李 红

(石油大学应用物理系,东营 257061)

(2003 年 2 月 26 日收到;2003 年 3 月 24 日收到修改稿)

研究相对论力学系统的形式不变性和 Lie 对称性.给出相对论力学系统在无限小变换下形式不变性和 Lie 对称性的定义、判据和守恒量,得到形式不变性和 Lie 对称性的关系,并举例说明结果的应用.

关键词:相对论,力学系统,形式不变性,Lie 对称性

PACC:0320,0330

1.引 言

关于力学系统对称性与守恒量理论的研究一直是数学、力学、物理学等领域的重要课题.寻求力学系统守恒量的近代方法主要是:研究作用量在无限小变换下不变性的 Noether 对称性方法[1]和研究运动微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 对称性方法[2].近十多年来,Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论的研究取得了一系列重要成果[3—14].形式不变性是梅凤翔[15]最近提出的不同于 Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性,它是指运动动方程中出现的动力学函数在经无限变换后仍满足原来的方程.文献[15—19]对经典力学系统的形式不变性与 Noether 对称性,形式不变性与 Lie 对称性进行了研究.本文研究相对论力学系统的形式不变性与 Lie 对称性,给出相对论力学系统形式不变性和 Lie 对称性的定义、判据和守恒量,得到形式不变性与 Lie 对称性的关系,并举例说明结果的应用.

2.相对论力学系统的 Lagrange 方程

设力学系统由 N 个质点组成,系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s\,(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,则系统的相对论性 d'Alembert 原理为[20]

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T^*}{\partial q_s}-Q_s\right)\delta q_s=0, \tag{1}$$

式中

$$T^*=\sum_{i=1}^{N}m_{0i}c^2\left(1-\sqrt{1-\dot{\boldsymbol{r}}_i^2/c^2}\right) \tag{2}$$

为系统的相对论性广义动能.设系统受到的约束是理想的完整约束,则由原理(1)可得系统的相对论性 Lagrange 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T^*}{\partial q_s}=Q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

将广义力 Q_s 分为有势的 Q_s' 和非有势的 Q_s'',有

$$Q_s'=-\frac{\partial V}{\partial q_s},$$

$$Q_s=Q_s'+Q_s''=-\frac{\partial V}{\partial q_s}+Q_s''. \tag{4}$$

(3)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L^*}{\partial q_s}=Q_s''\qquad(s=1,2,\cdots,n), \tag{5}$$

式中 $L^*=T^*-V$ 为系统的相对论性 Lagrange 函数.一般而言,$L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,$Q_s''=Q_s''(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$.

引入 Euler 算子

$$E_s=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n), \tag{6}$$

则(5)式可写为

$$E_s(L^*)=Q_s''\qquad(s=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

3.相对论力学系统的形式不变性

取无限小变换

$$\bar{t}=t+\Delta t,$$

$$\bar{q}_s(\bar{t})=q_s(t)+\Delta q_s\qquad(s=1,2,\cdots,n). \tag{8}$$

在一级近似下,其展开式为

$$\bar{t}=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$\bar{q}_s=q_s+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}). \tag{9}$$

式中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 为无限小单参数群变

换的生成元.取无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}. \tag{10}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n} (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{11}$$

二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{n} (\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s \dot{\xi}_0 - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{12}$$

在变换(9)式下,Lagrange 函数 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 变成 $\bar{L}^* = L^*\left(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{q}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)$,非势广义力 $Q''_s = Q''_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 变成 $\bar{Q}''_s = Q''_s\left(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{q}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)$.

定义 1 如果在无限小变换(9)式下,方程(7)的形式保持不变,即

$$E_s(\bar{L}^*) = \bar{Q}''_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{13}$$

则称这种不变性为相对论力学系统(5)的形式不变性.

将 $\bar{L}^*$,$\bar{Q}''_s$ 展开,有

$$\bar{L}^* = L^*(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(L^*) + o(\varepsilon^2), \tag{14}$$

$$\bar{Q}''_s = Q''_s(t, \dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(Q''_s) + o(\varepsilon^2). \tag{15}$$

判据 1 对相对论力学系统(5),如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$E_s(X^{(1)}(L^*)) - X^{(1)}(Q''_s) = 0, \tag{16}$$

则在无限小变换(9)式下,系统是形式不变性的.

证 将 Euler 算子作用于(14)式,去掉 ε^2 及更高阶小量项,得

$$E_s(\bar{L}^*) = E_s(L^*) + \varepsilon E_s(X^{(1)}(L^*)). \tag{17}$$

将(7)式代入(17)式,并利用(15)式,得

$$E_s(\bar{L}^*) = \bar{Q}''_s + \varepsilon[E_s(X^{(1)}(L^*)) - X^{(1)}(Q''_s)]. \tag{18}$$

将(16)式代入(18)式便得(13)式.

相对论力学系统的形式不变性在一定条件下可导致守恒量.

定理 1 在无限小变换(9)式下,如果相对论力学系统(5)是形式不变性的,且存在规范函数 $G_F = G_F(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L^* \dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L^*) + \sum_{s=1}^{n} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) Q''_s = -\dot{G}_F, \tag{19}$$

则系统存在如下守恒量:

$$I = L^* \xi_0 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_s} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G_F = \text{const}. \tag{20}$$

将(20)式对 t 求导后,用(19)式代入,并注意到(5)式便可得证.

4. 相对论力学系统的 Lie 对称性

方程(7)可写为

$$F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = E_s(L^*) - Q''_s = 0. \tag{21}$$

Lie 方法的基本思想是使运动微分方程(21)在无限小变换(9)式下保持不变.

定义 2 如果运动微分方程(21)在无限小变换(9)式下保持不变,即

$$F_s\left(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{q}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}^2}\right) = 0 \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{22}$$

则称这种不变性为相对论力学系统(5)的 Lie 对称性.

展开 F_s 有

$$F_s\left(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{q}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}^2}\right) = F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(2)}(F_s) + o(\varepsilon^2) \quad (s = 1, 2, \cdots, n). \tag{23}$$

判据 2 对相对论力学系统(5),如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足

$$X^{(2)}(E_s(L^*)) - X^{(1)}(Q''_s) = 0, \tag{24}$$

则相应的不变性是系统的 Lie 对称性.

证 将(21)式代入(23)式,去掉 ε^2 及更高阶小量项得

$$F_s\left(\bar{t}, \bar{\boldsymbol{q}}, \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}}, \frac{\mathrm{d}^2\bar{\boldsymbol{q}}}{\mathrm{d}\bar{t}^2}\right) = \varepsilon[X^{(2)}(E_s(L^*)) - X^{(2)}(Q''_s)] = \varepsilon[X^{(2)}(E_s(L^*)) - X^{(1)}(Q''_s)]. \tag{25}$$

将(24)式代入(25)式便得(22)式.

相对论力学系统 Lie 对称性导致的守恒量由下述定理给出:

定理 2 在无限小变换(9)式下,如果相对论力学系统(5)是 Lie 对称性的,且存在规范函数 $G_L = G_L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L^* \dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L^*) + \sum_{s=1}^{n} (\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) Q''_s = -\dot{G}_L, \tag{26}$$

则系统存在如下守恒量:

$$I = L^{*}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L^{*}}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_L = \text{const}. \tag{27}$$

将(27)式对 t 求导后,用(26)式代入,并注意到(5)式便可得证.

5. 形式不变性与 Lie 对称性的关系

由(16)和(24)式可知,相对论力学系统的形式不变性与 Lie 对称性一般是不同的. 关于它们之间的关系有如下定理:

定理 3　如果相对论力学系统(5)在无限小变换(9)式下是形式不变性的,则当无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足(24)式时,形式不变性也是 Lie 对称性,否则形式不变性不是 Lie 对称性.

定理 4　如果相对论力学系统(5)在无限小变换(9)式下是 Lie 对称性的,则当无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足(16)式时,Lie 对称性也是形式不变性,否则 Lie 对称性不是形式不变性.

相对论力学系统的形式不变性和 Lie 对称性导致的守恒量分别由定理 1 和定理 2 给出. 如果相对论力学系统在给定无限小变换(9)式下即具有形式不变性又具有 Lie 对称性,由定理 1 和定理 2 知,这个形式不变性和 Lie 对称性导致相同的守恒量.

本文结果具有普遍意义,对相对论情况和经典情况都适用. 当 $|\dot{r}_i| \leqslant c$ 时,相对论性广义动能 T^{*} 化为经典动能 $T = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_{0i}\dot{r}_i^2$,本文结果化为经典情况下的结果.

6. 算　例

设相对论力学系统的 Lagrange 函数

$$L^{*} = m_0c^2\left(1 - \sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}\right) - V, \tag{28}$$

所受的非势广义力为 $Q''_1 = \dot{q}_1$,$Q''_2 = \dot{q}_2$(势能 V 为常数). 研究其形式不变性和 Lie 对称性.

方程(16)给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1}\right)\Big\{\frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}} \times [(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2]\Big\} - (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) = 0, \tag{29}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial}{\partial q_2}\right)\Big\{\frac{m_0}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}} \times [(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dot{q}_2]\Big\} - (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) = 0. \tag{30}$$

取

$$\xi_0 = 0,\quad \xi_1 = 1,\quad \xi_2 = 1, \tag{31}$$

则(29)和(30)式满足. 故对生成元(31)式,系统是形式不变性的.

方程(24)给出

$$X^{(2)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{q}_1}{\sqrt{(1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}}\right)\right] - (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) = 0, \tag{32}$$

$$X^{(2)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\dot{q}_2}{\sqrt{(1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}}\right)\right] - (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) = 0. \tag{33}$$

对生成元(31),(32)和(33)式也满足,故系统也是 Lie 对称性的.

对生成元(31)式,由(19)和(26)式可求得

$$G_F = G_L = -(q_1 + q_2). \tag{34}$$

由定理 1 和定理 2 知,系统的形式不变性和 Lie 对称性导致的守恒量相同,为

$$I = \frac{m_0(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)}{\sqrt{1 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/c^2}} - (q_1 + q_2) = \text{const}. \tag{35}$$

若取

$$\xi_0 = t,\quad \xi_1 = q_1,\quad \xi_2 = q_2, \tag{36}$$

则(29)和(30)式满足,而(32)和(33)式不满足,故对生成元(36)式,系统是形式不变性的,但不是 Lie 对称性的. 由于对生成元(36)式,由(19)式得不到规范函数 G_F,故系统的形式不变性不导致守恒量.

[1]　Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. KI II 235
[2]　Lutzky M 1979 *J*. *Phys*. *A*:*Math*. *Gen*. **12** 973
[3]　Liu D 1990 *Sci*. *China* A **20** 1189 (in Chinese) [刘　端 1990 中国科学 A 辑 **20** 1189]

[4] Zhao Y Y, Mei F X 1993 *Advances in Mechanics* **23** 360 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1993 力学进展 **23** 360]

[5] Mei F X 1993 *Sci. China* A **23** 709 (in Chinese) [梅凤翔 1993 中国科学 A辑 **23** 709]

[6] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Constrained Systems and Their Symmetries* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京 北京工业大学出版社)]

[7] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups And Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

[8] Zhao Y Y, Mei F X 1999 *Symmetries and Conserved Quantities of Mechanics System* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量 (北京:科学出版社)]

[9] Fang J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 836

[10] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]

[11] Guo Y X, Jiang L Y, Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181

[12] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[13] Fang J H 2002 *Chin. Phys.* **11** 313

[14] Luo S K 2002 *Chin. Phys.* **11** 429

[15] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[16] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[17] Wang S Y, Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[18] Li R J, Qiao Y F, Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[19] Fang J H, Xue Q Z, Zhao S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2183 (in Chinese) [方建会、薛庆忠、赵嵩卿 2002 物理学报 **51** 2183]

[20] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 61 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12** 61]

Form invariance and Lie symmetry of relativistic mechanical system

Fang Jian-Hui Chen Pei-Sheng Zhang Jun Li Hong

(*Department of Applied Physics, University of Petroleum, Dongying* 257061, *China*)

(Received 26 February 2003; revised manuscript received 24 March 2003)

Abstract

We study the form invariance and Lie symmetry of a relativistic mechanical system. Firstly, we give the definition and criterion and conserved quantity of the form invariance and Lie symmetry in the system. Next, the relation between the form invariance and Lie symmetry of the system is obtained. Finally, we give an example to illustrate the application of the result.

Keywords: relativity, mechanical system, form invariance, Lie symmetry

PACC: 0320, 0330