第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2954-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.12, December, 2003

具有线性型标量势和矢量势的 Klein-Gordon 的束缚态

陈 刚[1)] 赵定烽[2)]

[1)](绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

[2)](南京陆军指挥学院,南京 210045)

(2003 年 1 月 23 日收到;2003 年 3 月 5 日收到修改稿)

给出了当线性型标量势大于或等于其矢量势时的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解,其解可用合流超几何函数表示.

关键词:线性势, Klein-Gordon 方程, 束缚态
PACC:0365

1. 引 言

在强耦合条件下,在势场中运动粒子的相对论效应变得非常重要[1],而在考虑相对论效应时,处于势场中运动粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程来描述.最近寻找 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的精确解引起了人们的广泛兴趣,而且一些典型势阱中的 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的精确束缚态解已经被获得[2—11],但这些解绝大多数是在标量势等于矢量势条件下获得的[6—12].文献[13—15]指出,当标量势大于或等于矢量势时其束缚态解存在,因此得到在标量势大于或等于矢量势条件下其 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的精确束缚态解更具有理论意义.线性势在分析重介子的质谱时是非常有用的,即把它们看成由两个重夸克组成的夸克偶数,两夸克之间有线性势作用,它的 Schrödinger 方程的 s 波精确解可用 Bessel 函数表示[16].本文将在线性型标量势大于或等于其矢量势的条件下,得到其 Klein-Gordon 方程的 s 波精确束缚态解,其解可用合流超几何函数表示.

2. 具有线性势型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[2]指出,具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 s 波 Klein-Gordon 方程($\hbar=\mu=1$)为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+[E-V(r)]^2-[M+S(r)]^2\right\}u(r)=0,$$

$$\left[R(r)=\frac{u(r)}{r}\right]. \tag{1}$$

对于线性势,其标量势和矢量势可设为

$$S(r)=S_0 r, \tag{2}$$

$$V(r)=V_0 r, \tag{3}$$

式中 S_0, V_0 为常数.对于束缚态,必须有 $S_0\geqslant V_0$[13—16].把上述条件代入方程(1)可得

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}-\alpha^2y^2+\gamma\right]u(y)=0, \tag{4}$$

式中

$$y=r+\beta, \tag{5}$$

$$\alpha=\sqrt{S_0^2-V_0^2}, \tag{6}$$

$$\beta=\frac{EV_0+MS_0}{S_0^2-V_0^2}, \tag{7}$$

$$\gamma=\frac{(EV_0+MS_0)^2}{S_0^2-V_0^2}-(M^2-E^2). \tag{8}$$

如果再令

$$z=(4\alpha^2)^{1/4}y, \tag{9}$$

$$\eta=\frac{\gamma}{2\alpha}-\frac{1}{2}, \tag{10}$$

则方程(4)变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\frac{z^2}{4}+\eta+\frac{1}{2}\right]u(z)=0. \tag{11}$$

方程(11)是标准的 Weber 方程,它的解为[17]

$$u(z)=A\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{F}\left(-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right)$$

$$+ Bz\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{F}\left(\frac{1-\eta}{2},\frac{3}{2},\frac{z^2}{2}\right), \tag{12}$$

式中 A，B 为常数. 考虑到波函数的边界条件 $u(z)|_{z\to\infty}=0$,则有 $B=0$,所以

$$u(z) = A\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{F}\left(-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right). \tag{13}$$

为了保证当 $z\to\infty$ 处 $u(z)=0$,合流超几何函数 $\mathrm{F}\left(-\frac{\eta}{2},\frac{1}{2},\frac{z^2}{2}\right)$必须中断成多项式. 这就要求 $-\frac{\eta}{2}$ 为零或负整数,即

$$-\frac{\eta}{2} = -n \qquad (n = 0,1,2,\cdots). \tag{14}$$

把(6),(8)和(10)式代入(14)式,可得

$$(EV_0 + MS_0)^2 - (M^2 - E^2)(S_0^2 - V_0^2) = (4n+1)(S_0^2 - V_0^2)^{3/2}. \tag{15}$$

(15)式为 s 波束缚态所满足的能谱方程,由它决定能级 E_n. 相应的径向波函数(未归一化)为

$$R_n(r) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\alpha(r+\beta)^2}\mathrm{F}\left[-n,\frac{1}{2},\alpha(r+\beta)^2\right]. \tag{16}$$

特别当 $n=0$ 时,基态能量 E_0 由方程

$$(E_0V_0 + MS_0)^2 - (M^2 - E_0^2)(S_0^2 - V_0^2) = (S_0^2 - V_0^2)^{3/2} \tag{17}$$

决定,基态波函数为

$$R_0(r) = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\alpha(r+\beta)^2}. \tag{18}$$

3. 结论及讨论

本文给出了在线性型标量势大于或等于线性型矢量势的条件下其 Klein-Gordon 方程的 s 波精确束缚态解. 它的能谱方程由(15)式给出,未归一化的波函数由(16)式给出. 同时也讨论了基态的能谱方程和未归一化的波函数,即文中的(17)和(18)式.

对于在线性型标量势等于线性型矢量势的条件下,其 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的 s 波精确束缚态解,它们的求解方法中只要适当地令上变量就可转化到 Schrödinger 方程,而线性势的 Schrödinger 方程求解在文献[16]中已有详细的讨论,这里就不再求解. 至于在线性型标量势大于或等于线性型矢量势的条件下其 Dirac 方程的 s 波精确束缚态解,需要作进一步的研究和讨论.

[1] Wang I C, Wong C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[2] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[3] Hou C F, Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561

[4] Hu S Z, Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Ran Y Q, Xue L H, Hu S Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2435 (in Chinese) [冉扬强、薛立徽、胡嗣柱 2002 物理学报 **51** 2435]

[6] Hou C F, Li Y, Zhou Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李　焱、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[7] Guo J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[8] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[9] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[10] Chen G, Lou Z M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1071 (in Chinese) [陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]

[11] Chen G, Lou Z M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1075 (in Chinese) [陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1075]

[12] Chen C Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1579 (in Chinese) [陈昌远等 2003 物理学报 **52** 1579]

[13] Long C, Robson D 1983 *Phys. Rev.* D **27** 644

[14] Fishbane P M *et al* 1983 *Phys. Rev.* D **27** 2433

[15] Su R K, Ma Z Q 1986 *J. Phys.* A **19** 1739

[16] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* (Vol Ⅱ) 2nd ed (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学 (卷Ⅱ) 第二版 (北京:科学出版社)]

[17] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论(北京:北京大学出版社)]

Bound states of Klein-Gordon equation for scalar and vector linear potentials

Chen Gang[1)] Zhao Ding-Feng[2)]

[1)] (*Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing* 312000, *China*)

[2)] (*Nanjing Army Command College, Nanjing* 210045, *China*)

(Received 23 January 2003; revised manuscript received 5 March 2003)

Abstract

The s-wave bound state solutions of Klein-Gordon equation are obtained when a linear-type scalar potential is not less than its vector potential, and its solutions are expressed by the confluent hypergeometric function.

Keywords: linear potential, Klein-Gordon equation, bound state

PACC: 0365