第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2957-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52, No.12, December, 2003

具有含时平方反比项的谐振子的路径积分求解*

王 平 杨新娥 宋小会
(天津大学理学院应用物理系,天津 300072)
(2003 年 1 月 24 日收到;2003 年 3 月 18 日收到修改稿)

使用含时坐标变换把一个质量含时的带有平方反比项的谐振子系统变换为对应的质量不含时谐振子系统.利用变换前、后传播子之间的关系并通过 Feynman 路径积分的方法求出质量含时的带有平方反比项的谐振子系统的传播子与精确波函数.并对包含有更多的附加势的谐振子系统进行了讨论.

关键词:谐振子,坐标变换,路径积分,传播子
PACC:0365

1. 引 言

谐振子模型是量子力学中少有的可精确求解而又十分重要的模型,对各种不同类型的谐振子的精确求解一直是量子力学中的热点问题之一.该模型广泛应用于许多不同的领域,如量子场、分子物理、量子化学、等离子体物理等.在对其求解的过程中也相应发展了许多不同的方法,如不变量方法、幺正变换方法和路径积分方法等[1—14].其中由 Feynman 提出的路径积分方法以其对含时与不含时系统用统一的求解方法而一直吸引了人们的极大兴趣(当然用路径积分方法求解系统波函数只是路径积分的应用之一),但在提出之时可精确求解的系统只有很少几个.近几年来,此方法经过 Khandekar, Lawande 和 Dhara 等[2,3]大量富有成效的工作其可求解范围已大大拓展了.本文将以此为基础,对最近广泛讨论的一类含平方反比项的含时谐振子给出其精确波函数,用此方法还可以求解更多的包含有附加势的谐振子系统.

2. 具有含时平方反比项的谐振子

最近,人们发现一类谐振子在量子力学的许多领域[5,9]中有重要应用,因而吸引了人们的极大兴趣.其势函数如下:

$$V = \frac{1}{2}M(t)w^2(t)x^2 + \frac{g}{M(t)x^2}. \tag{1}$$

已有用不变量方法、幺正变换等不同的方法对其进行了研究[6,10,13].我们在此将用路径积分方法来求出其精确波函数.

(1)式所描述的系统的 Lagrangian 函数为

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}M(t)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}M(t)w^2(t)x^2 - \frac{g}{M(t)x^2}. \tag{2}$$

所对应的传播子可表示为

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\mathrm{d}t\right]D[x(t)], \tag{3}$$

式中 $L(\cdot)$ 表示经典的 Lagrangian 函数,$D[x(t)]$ 表示所有起始于 $x(t_a)=x_a$ 和终止于 $x(t_b)=x_b$ 两固定端点的可能路径.

下面我们使用含时坐标变换,令

$$q = \sqrt{M(t)}\,x. \tag{4}$$

于是,(2)式变形为

$$L(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\Omega^2(t)q^2 - \frac{g}{q^2} - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{M}}{M}q^2\right)$$
$$= L_0(q,\dot{q},t) - \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{M}}{M}q^2\right), \tag{5}$$

式中 $M=M(t)$,且有

$$L_0(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\Omega^2(t)q^2 - \frac{g}{q^2}, \tag{6}$$

$$\Omega^2(t) = \frac{1}{4}M^{-2}\dot{M}^2 - \frac{1}{2}M^{-1}\ddot{M} + w^2(t). \tag{7}$$

(5)式所对应的传播子可表示为

* 南开大学、天津大学刘徽应用数学中心资助的课题.

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)$$
$$=\int\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}L(q,\dot q,t)\mathrm{d}t\right]D[q(t)]. \qquad (8)$$

(3)式与(8)式分别表示的传播子之间的关系为

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)$$
$$=(M_bM_a)^{1/4}K(q_b,t_b;q_a,t_a), \qquad (9)$$

式中因子$(M_bM_a)^{1/4}$的出现完全是因为微分尺度变换的要求[3],且有

$$M_a=M(t_a),$$
$$M_b=M(t_b).$$

而(8)式又可表示为

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)$$
$$=\int\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}L(q,\dot q,t)\mathrm{d}t\right]D[q(t)]$$
$$=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}\left(\frac{\dot M_b}{M_b}q_b^2-\frac{\dot M_a}{M_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times\int\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int L_0(q,\dot q,t)\mathrm{d}t\right]D[q(t)], \qquad (10)$$

式中

$$q_a=q(t_a),$$
$$q_b=q(t_b).$$

(10)式的导出是由于(5)式 Lagrangian 函数中的全微分项在传播子的计算中与路径的选择无关,而只与两固定端点处的值有关.(10)式可重新写为

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}\left(\frac{\dot M_b}{M_b}q_b^2-\frac{\dot M_a}{M_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times K_0(q_b,t_b;q_a,t_a), \qquad (11)$$

而

$$K_0(q_b,t_b;q_a,t_a)$$
$$=\int\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}L_0(q,\dot q,t)\mathrm{d}t\right]D[q(t)]. \qquad (12)$$

(12)式的解已根据 Feynman 的折线逼近方法通过直接的路径积分得到[2],代入(10)式得

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}\left(\frac{\dot M_b}{M_b}q_b^2-\frac{\dot M_a}{M_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times\left[\frac{1}{\mathrm{i}\hbar\rho_b\rho_a\,\sin\phi(t_b,t_a)}\right](q_bq_a)^{1/2}$$
$$\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho_b}{\rho_b}q_b^2-\frac{\dot\rho_a}{\rho_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{q_b^2}{\rho_b^2}+\frac{q_a^2}{\rho_a^2}\right)\cot\phi(t_b,t_a)\right]$$
$$\times I_\upsilon\left[\frac{q_bq_a}{\mathrm{i}\hbar\rho_b\rho_a}-\csc\phi(t_b,t_a)\right]. \qquad (13)$$

其中

$$\phi(t_b,t_a)=\gamma(t_b)-\gamma(t_a),$$
$$\dot\gamma=\frac{1}{\rho^2}$$

与

$$\upsilon=\frac{1}{2}\left(1+\frac{8g}{\hbar^2}\right)^{1/2},$$

$\rho(t_a)$与$\rho(t_b)$满足一辅助方程

$$\ddot\rho+\Omega^2(t)\rho=\frac{1}{\rho^3}. \qquad (14)$$

改写(13)式,

$$K(q_b,t_b;q_a,t_a)=\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}\left(\frac{\dot M_b}{M_b}q_b^2-\frac{\dot M_a}{M_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times\frac{2(q_bq_a)^{\frac{1}{2}}}{\hbar\rho_b\rho_a}\times\frac{\exp(-\mathrm{i}\phi)}{1-\exp(-2\mathrm{i}\phi)}$$
$$\times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho_b}{\rho_b}q_b^2-\frac{\dot\rho_a}{\rho_a}q_a^2\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}\left(\frac{q_b^2}{\rho_b^2}+\frac{q_a^2}{\rho_a^2}\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\left(\frac{q_b^2}{\rho_b^2}+\frac{q_a^2}{\rho_a^2}\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{\exp(-2\mathrm{i}\phi)}{1-\exp(-2\mathrm{i}\phi)}\right]$$
$$\times I_\upsilon\left[\frac{2q_bq_a}{\hbar\rho_b\rho_a}\times\frac{\exp(-\mathrm{i}\phi)}{1-\exp(-2\mathrm{i}\phi)}\right]. \qquad (15)$$

将(15)式代入(9)式并使用 Hille-Hardy 公式

$$\frac{1}{1-z}\exp\left[-\frac{(x+y)z}{1-z}\right]I_\upsilon\left(\frac{2\sqrt{xyz}}{1-z}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\upsilon+1)}z^n(xyz)^{\frac{\upsilon}{2}}\mathrm{L}_n^\upsilon(x)\mathrm{L}_n^\upsilon(y)$$
$$(|z|<1), \qquad (16)$$

式中设

$$z=\exp(-2\mathrm{i}\phi),$$
$$x=\frac{q_b^2}{\rho_b^2\hbar},$$
$$y=\frac{q_a^2}{\rho_a^2\hbar}.$$

此时可看出(15)式有与(16)式的等号左端相类似的形式.将其按(16)式等号右端展开再通过对比 Feynman-Kac公式

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(x_a,t_a)\psi_n(x_b,t_b)\qquad(t_b>t_a) \qquad (17)$$

的等号两端,可以得到系统的精确波函数如下:

$$\psi_n(x,t) = M^{1/4}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{4\hbar}\frac{\dot M}{M}q^2\right] \times\left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\upsilon+1)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{\rho^2\hbar}\right)^{\frac12(\upsilon+1)}q^{\upsilon+\frac12} \times\exp[-\mathrm{i}(2n+\upsilon+1)\gamma] \times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{\dot\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{i}}{\rho^2}\right)q^2\right]\mathrm{L}_n^{\upsilon}\left(\frac{q^2}{\rho^2\hbar}\right). \quad (18)$$

这里 $M=M(t)$,$\gamma=\gamma(t)$,L_n^{υ} 是广义拉盖尔多项式.在(18)式的等号右端代入(4)式(即 $q=\sqrt{M(t)}x$),我们得到

$$\psi_n(x,t) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\upsilon+1)}\right]^{\frac12}\left(\frac{M}{\rho^2\hbar}\right)^{\frac12(\upsilon+1)} \times x^{\upsilon+\frac12}\exp[-\mathrm{i}(2n+\upsilon+1)\gamma] \times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{M\dot\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{i}M}{\rho^2}-\frac{\dot M}{2}\right)x^2\right]\mathrm{L}_n^{\upsilon}\left(\frac{Mx^2}{\rho^2\hbar}\right), \quad (19)$$

式中辅助变量 ρ 满足方程(14).可见势(1)式所描述的系统的精确波函数为一多项式,系统更多的性质如几何相等都可由它求得.当 $M(t)=m$,为一常数时,(19)式与文献[2]中的结果一致.

如令 $\rho=s\sqrt{M(t)}$,(19)式所表示的波函数可改写为

$$\psi_n(x,t) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\upsilon+1)}\right]^{\frac12}\left(\frac{1}{s^2\hbar}\right)^{\frac12(\upsilon+1)} \times x^{\upsilon+\frac12}\exp[-\mathrm{i}(2n+\upsilon+1)\gamma] \times\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{M\dot s}{s}+\frac{\mathrm{i}}{s^2}\right)x^2\right]\mathrm{L}_n^{\upsilon}\left(\frac{x^2}{s^2\hbar}\right). \quad (20)$$

此时 s 满足辅助方程

$$\ddot s+\omega^2 s+M^{-1}\dot M\dot s-M^{-2}s^{-3}=0. \quad (21)$$

这与文献[10,13]中用幺正变换和不变量方法所得结果一致.

3. 包含更多附加势的谐振子

对于包含更多附加势的含时谐振子,如果它能变形为在已知传播子部分附加上一项或几项全微分部分之和,则其精确波函数也可同样用此方法求出.

例如,若系统由如下 Lagrangian 函数描述:

$$L(x,\dot x,t) = \frac12 M(t)\dot x^2-\frac12 M(t)\omega^2(t)x^2 -\frac{g}{M(t)x^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[c(t)x^2]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)x], \quad (22)$$

式中等号右端最后两项为全微分项.根据前面的计算,两个全微分项在传播子的求解中与路径无关.按照第 2 节中同样的计算步骤,我们可以求出系统的波函数为

$$\psi_n(x,t) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\upsilon+1)}\right]^{\frac12}\left(\frac{1}{s^2\hbar}\right)^{\frac12(\upsilon+1)} \times x^{\upsilon+\frac12}\exp[-\mathrm{i}(2n+\upsilon+1)\gamma]\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2\hbar}\left(\frac{M\dot s}{s}+\frac{\mathrm{i}}{s^2}+2c\right)x^2+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}fx\right]\mathrm{L}_n^{\upsilon}\left(\frac{x^2}{s^2\hbar}\right). \quad (23)$$

式中 $c=c(t)$,$f=f(t)$.这是一个比(1)式更普遍的势的波函数的精确解.若令 $f=0$,则(23)式与文献[10]中得到的结果相同.另外,我们必须指出,这些附加的全微分项对其所对应的经典运动方程并没有影响,但在量子力学的波函数描述中它以相位的形式出现,所以它仍具有重要的物理意义.对此我们将在以后的工作中继续讨论.

[1] Feynman R P, Hibbs A R 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York:McGraw-Hill)

[2] Khandekar D C, Lawande S V 1975 *J. Math. Phys.* **16** 384

[3] Dhara A K, Lawande S V 1984 *Phys. Rev.* A **30** 560

[4] Lewis Jr H R, Riesenfeld W B 1969 *J. Math. Phys.* **10** 1458

[5] Dantas C M A, Pedrosa I A, Baseia B 1992 *Phys. Rev.* A **45** 1320

[6] Um C I, Shin S M 1998 *Phys. Rev.* A **58** 1574

[7] Li L X, Guo G C 1998 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **7** 727

[8] Liu D Y 1999 *Chin. Phys.* **8** 1

[9] Maamache M 2000 *Phys. Rev.* A **61** 26102

[10] Song D Y 2000 *Phys. Rev.* A **62** 14103

[11] Ling R L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1421 (in Chinese) [凌瑞良 2001 物理学报 **50** 1421]

[12] Li B Z, Li L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1654 (in Chinese) [李伯臧、李　玲 2001 物理学报 **50** 1654]

[13] Pedrosa I A, Serra G P, Guedes I *et al* 1997 *Phys. Rev.* A **56** 4300

[14] Huang B W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 271 (in Chinese) [黄博文 2003 物理学报 **52** 271]

Exact solution for a harmonic oscillator with a time-dependent inverse square potential by path-integral

Wang Ping Yang Xin-E Song Xiao-Hui
(*Department of Applied Physics*, *School of Science*, *Tianjin University*, *Tianjin* 300072, *China*)
(Received 24 January 2003; revised manuscript received 18 March 2003)

Abstract

Using coordinate-transformation we transformed a harmonic oscillator with time-dependent mass and a time-dependent inverse potential into a harmonic oscillator with time-independent mass and a time-independent inverse potential accordingly. In terms of the relation between these two different harmonic oscillators' propagators we derived the exact wavefunction of the former by Feynman path-integral. We also discussed the harmonic oscillator with more additional potentials.

Keywords: harmonic oscillator, coordinate-transformation, path-integral, propagator
PACC: 0365