第 52 卷 第 12 期 2003 年 12 月
1000-3290/2003/52(12)/2989-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.52,No.12,December,2003

耦合映射混沌同步系统在加性噪声中的筛形域性态*

谭 宁 徐健学 康艳梅 陈永红

(西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室,西安 710049)

(2002 年 10 月 14 日收到;2003 年 3 月 5 日收到修改稿)

由于实际系统中噪声不可避免,噪声使得同步混沌吸引子 A 变成具有一定生存时间 $<\tau>$ 的准稳态吸引子 A'.以加性噪声作用下的二维耦合映射混沌同步系统为例,给定系统实验时间长度 T,解析发现:仅当 $<\tau> > 2T$ 时准稳态同步混沌吸引子的筛形吸引域才可被定性观察到;而当 $<\tau> < 2T$ 时则不复存在,此时,根据原无噪声时的筛形吸引域特征的不同,筛形域不仅可以转变成时变筛形结构,还可以转变成分形结构.同时利用数值模拟作了进一步验证.该结果对于二维耦合映射混沌同步系统具有普遍意义.

关键词:混沌同步,筛形吸引域,瞬态混沌,耦合映射,加性噪声

PACC:0545

1. 引 言

混沌同步在物理学、化学、生物学及电路系统中有着重要作用[1—8].筛形域(riddled basins)具有正勒贝格测度并包含有非开集[9],在混沌同步系统中得到了广泛研究[10—15],值得注意的是,筛形域在物理实验中也被观察到[11,12].

噪声在实际物理系统中是不可避免的,研究噪声对筛形域的影响很有意义.Lai[16]等研究了噪声对混沌吸引子筛形域的影响,指出混沌吸引子的筛形域在噪声作用下可转变成系统其他稳态吸引子的时变筛形域(temporal riddled basins).

由于噪声使得混沌吸引子 A 成为具有一定生存时间 $<\tau>$ 的瞬态混沌,而生存时间足够长的瞬态混沌在实际系统中与混沌吸引子无法区分,文献[14]称之为实践意义下的吸引子,记为 A'.本文以加性噪声中的二维耦合映射混沌同步系统为例,给定系统实验时间长度 T,经解析分析得到了 A' 的筛形吸引域可被定性观察的时间限制条件.同时发现,原筛形域在不同条件下可以转变成时变筛形域或分形域,而不仅仅是文献[16]指出的时变筛形域的一种情况.

2. 准稳态混沌吸引子的平均生存时间

考虑基础映射为 $x_{j+1}=f(x_j)$,并加上均值为零,强度为 $D_0(0<D_0\ll 1)$ 的高斯白噪声 ξ_1,ξ_2 的耦合混沌同步系统

$$F_\varepsilon(x,y):\begin{cases} x_{j+1} = f(x_j) + \varepsilon(y_j - x_j) + D_0\xi_{1j}, \\ y_{j+1} = f(y_j) + \varepsilon(x_j - y_j) + D_0\xi_{2j}. \end{cases} \tag{1}$$

令

$$\delta = y - x,$$
$$\xi = \xi_2 - \xi_1,$$

得到

$$\delta_{j+1} = [f(y_j) - f(x_j)] - 2\varepsilon\delta_j + D_0\xi_j.$$

当 $D_0>0$,无噪声时的同步混沌吸引子 A 变成瞬态混沌 A'.考虑轨道在 A' 附近停留较长时间的情况,得到

$$\delta_{j+1} = [f'(x_j) - 2\varepsilon]\delta_j + D_0\xi_j.$$

参考文献[17],令 $z=\ln|\delta|$,同时把噪声的影响考虑进 FPK 方程的反射边界条件中,则得到

$$z_{j+1} = z_j + \ln|f'(x_j) - 2\varepsilon|.$$

关于 z 的漂移系数 υ 和扩散系数 D 为

* 国家自然科学基金(批准号:10172067,30030040)资助的课题.

$$\upsilon = < \ln | f'(x_j) - 2\varepsilon | >,$$
$$D = \frac{1}{2} < (\ln | f'(x_j) - 2\varepsilon | - < \ln | f'(x_j) - 2\varepsilon | >)^2 >. \quad (2)$$

联想同步混沌吸引子 A 的横截 Lyapunov 指数的表达式

$$\lambda_{\perp} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \ln | f'(x_j) - 2\varepsilon |,$$

可见 $\upsilon = \lambda_{\perp}$.

$\lambda_{\perp} > 0$ 时 A 将失去结构稳定性[9]，故只讨论 $\lambda_{\perp} < 0$ 即 $\upsilon < 0$ 时轨道在 A' 附近的演化时间.

假设随机变量 $\ln|f'(x_j) - 2\varepsilon| - < \ln|f'(x_j) - 2\varepsilon| >$ 服从高斯分布，可得到关于 z 的 FPK 方程，其中，$p(z,t|z_0,t_0)$ 表示转移概率密度

$$\frac{\partial p(z,t | z_0,0)}{\partial t} = -\upsilon \frac{\partial p(z,t | z_0,0)}{\partial z} + D\frac{\partial^2 p(z,t | z_0,0)}{\partial z^2}. \quad (3)$$

假定耦合系统(1)的稳态吸引子处于 $|\delta| = \infty$ 的方向上，定义 $|\delta_1| < |\delta_0| < |\delta_{\rm th}|$ 且 $|\delta_1| \ll |\delta_{\rm th}|$，则 $z_1 < z_0 < z_{\rm th}$，$z_1 \ll z_{\rm th}$. 此处，$|\delta_0|$ 表示初始值，$|\delta_{\rm th}|$ 表示阈值. 一旦 δ 的演化到达 $|\delta_{\rm th}|$，则轨道将离开 A' 而趋向稳态吸引子. 因此得到关于 FPK 方程的初始条件和边界条件：

初始条件

$$p(z,z_0,0) = \begin{cases} 1 & z = z_0, \\ 0 & z \neq z_0. \end{cases}$$

吸收边界条件

$$p(z_{\rm th},z_0,t) = 0.$$

反射边界条件

$$J(z_1,t) = -\upsilon p + D\frac{{\rm d}p}{{\rm d}z} = 0.$$

由物理意义得到

$$z_1 = \ln D_0 \quad (4)$$

由 FPK 方程理论[18]，得到轨道在 A' 附近的平均演化时间为

$$< \tau > = \frac{1}{D}\int_{z_0}^{z_{\rm th}} {\rm e}^{-\frac{\upsilon}{D}(u - z_1)}{\rm d}u \int_{z_1}^{u} {\rm e}^{\frac{\upsilon}{D}(v - z_1)}{\rm d}v.$$

由 $\upsilon < 0$，$|\delta_1| \ll |\delta_{\rm th}|$，$|\delta_0| < |\delta_{\rm th}|$，$< \tau >$ 可近似地表示为

$$< \tau > \approx -\frac{1}{\upsilon}\left|\frac{\delta_1}{\delta_{\rm th}}\right|^{\frac{\upsilon}{D}} \ln\left|\frac{\delta_{\rm th}}{\delta_0}\right|. \quad (5)$$

可见，$< \tau >$ 是 $|\delta_0|$ 的减函数，故

$$< \tau >_{\max} = \left|\frac{D_0}{\delta_{\rm th}}\right|^{\frac{\upsilon}{D}} \ln\left|\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|^{-\frac{1}{\upsilon}}.$$

3. 准稳态同步混沌吸引子的筛形域在噪声影响下的可观察性

若 A' 的生存时间 $< \tau >_{\max}$ 足够长，称为实践意义下的吸引子[14]. 假定实际应用中对系统要求的演化时间长度为 T(T 为大正数)，对 A' 而言将有两种可能：$< \tau >_{\max} > T$ 时被认为是实践意义下的吸引子，而 $< \tau >_{\max} < T$ 时则没有价值.

当 $< \tau >_{\max} > T$ 时，考虑从 A' 的邻域 $S_{\rm E}(A')$ ($D_0 < E \ll |\delta_{\rm th}|$) 出发的轨道 $Q(\delta_0)$ ($D_0 < |\delta_0| < E$)，Q 在 A' 附近的演化时间记为 $< \tau >_{\delta_0}$. 如果对于任意的 $\delta_0 \in S_{\rm E}(A')$ 都有 $< \tau >_{\delta_0} > T$，则 A' 的筛形吸引域与原无噪声时的同步混沌吸引子 A 的筛形吸引域定性性质相同. 而如果在 $S_{\rm E}(A')$ 中找到一个正测度子集 $\Theta = \{\delta_0 \in S_{\rm E}(A'), < \tau >_{\delta_0} < T\}$，则 A' 的筛形吸引域不复存在.

由 $< \tau >_{\max} > T$ 得到

$$-\frac{1}{\upsilon}\left|\frac{D_0}{\delta_{\rm th}}\right|^{\frac{\upsilon}{D}} > T\ln^{-1}\left|\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|.$$

此时，假设任意的 $< \tau >_{\delta_0}$ 都大于 T，然后寻找使得该假设成立的条件.

因为

$$\begin{aligned} < \tau >_{\delta_0} &= -\frac{1}{\upsilon}\left|\frac{D_0}{\delta_{\rm th}}\right|^{\frac{\upsilon}{D}} \ln\left|\frac{\delta_{\rm th}}{\delta_0}\right| \\ &= < \tau >_{\max} + \ln\left|\frac{D_0}{\delta_0}\right|\left(-\frac{1}{\upsilon}\left|\frac{D_0}{\delta_{\rm th}}\right|^{\frac{\upsilon}{D}}\right) \\ &< < \tau >_{\max} + T\ln\left|\frac{D_0}{\delta_0}\right| \ln^{-1}\left|\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|, \end{aligned}$$

既然假设 $< \tau >_{\delta_0} > T$，应有

$$T < < \tau >_{\max} + T\ln\left|\frac{D_0}{\delta_0}\right| \ln^{-1}\left\{\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|,$$

因此得到

$$|\delta_0| < D_0\left|\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|^{\frac{< \tau >_{\max}}{T} - 1}.$$

根据 $D_0 < |\delta_0| < E$，$E \ll |\delta_{\rm th}|$ 的前提，如果

$$D_0\left|\frac{\delta_{\rm th}}{D_0}\right|^{\frac{< \tau >_{\max}}{T} - 1} > |\delta_{\rm th}|,$$

即 $< \tau >_{\max} > 2T$，从 $S_{\rm E}(A')$ 中任一点出发的轨道在

A'附近的演化时间都大于 T,表明筛形吸引域的局域性质在 $S_E(A')$中得到保留.而如果

$$D_0\left|\frac{\delta_{th}}{D_0}\right|^{\frac{<\tau>_{max}}{T}-1} < E < |\delta_{th}|,$$

即 $T < <\tau>_{max} < 2T$,则可找到一个正测度子集 Θ,从该子集出发的轨道在 A'附近的演化时间小于 T.这意味着筛形吸引域的局域性质将丧失,A'的筛形吸引域不再存在.

4.逃离 A'的轨道被系统稳态吸引子俘获的概率

既然当 $<\tau>_{max} < 2T$ 时 A'的筛形吸引域不再存在,如果该系统具有多个稳态吸引子,离开 A'的轨道将以怎样的方式被这多个稳态吸引子俘获呢?

不妨假设耦合系统(1)在同步不变子空间 $x = y$ 两侧各存在一个稳态吸引子(上侧的吸引子记为 B,下侧的吸引子则记为 C).对于从 δ_0 出发的逃逸轨道 Q 而言,z_1,z_{th}都将是吸收壁.根据文献[18]得到 Q 从端口 z_1 离开的概率为(Q 在(z_1,z_{th})中演化时间最长为 T)

$$P_{z_1}(z_0,t) = \int_t^T\left\{-\upsilon p_{z_1} + D\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1}\right\}\mathrm{d}t' = D\int_t^T\left.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right|_{z_1}\mathrm{d}t'.$$

当时 $t\to T$ 时,

$$P_{D_0}(\delta_0,T) = \frac{\int_{z_0}^{z_{th}} e^{\frac{\upsilon}{D}(u-z_1)}\mathrm{d}u}{\int_{z_1}^{z_{th}} e^{\frac{\upsilon}{D}(u-z_1)}\mathrm{d}u} = \frac{e^{\frac{\upsilon}{D}(z_{th}-z_1)} - e^{\frac{\upsilon}{D}(z_0-z_1)}}{e^{\frac{\upsilon}{D}(z_{th}-z_1)} - 1} = 1 - \frac{1-|\delta_0|^{\frac{\upsilon}{D}}|\delta_1|^{-\frac{\upsilon}{D}}}{1-|\delta_{th}|^{\frac{\upsilon}{D}}|\delta_1|^{-\frac{\upsilon}{D}}}. \quad (6)$$

从 z_{th}离开的概率则为

$$P_{|\delta_{th}|}(\delta_0,T) = \frac{1-|\delta_0|^{\frac{\upsilon}{D}}|\delta_1|^{-\frac{\upsilon}{D}}}{1-|\delta_{th}|^{\frac{\upsilon}{D}}|\delta_1|^{-\frac{\upsilon}{D}}}.$$

因此,逃离 A'的轨道将以一定的概率被系统的稳态吸引子俘获.

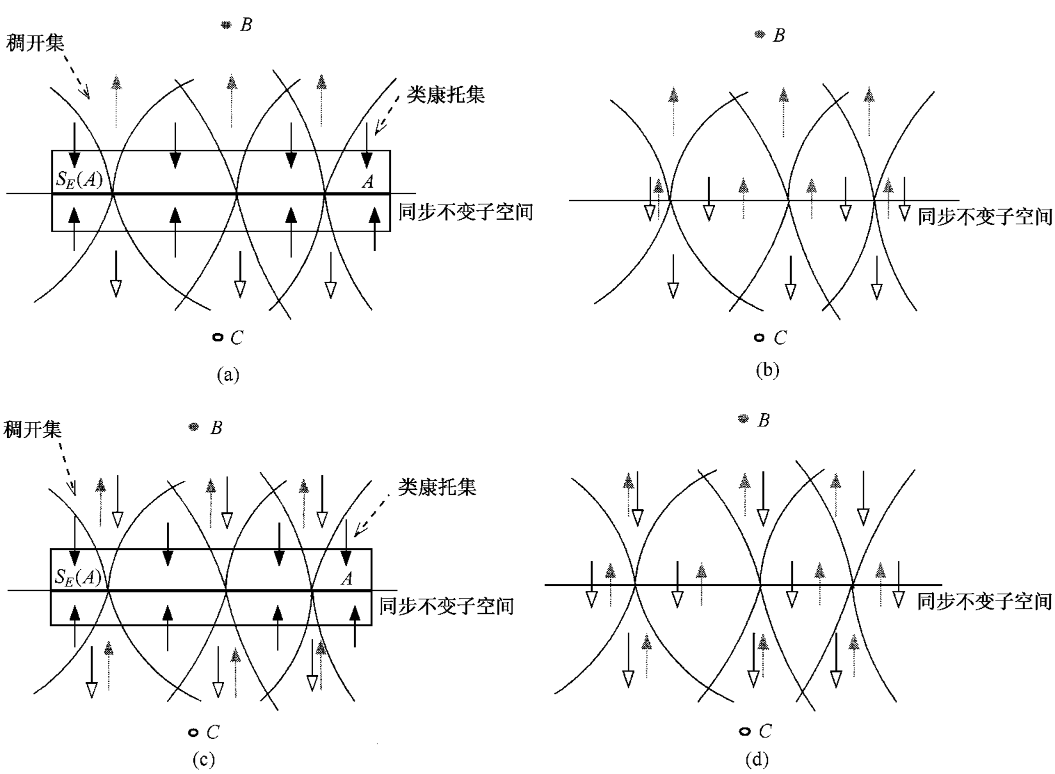

图 1　根据原无噪声时稠开集与吸引子 B 和 C 的关系将有两种情况出现,噪声对这两种情况的影响并不相同:位于同步不变子空间上侧的稠开集属于 B 的吸引域而位于同步不变子空间下侧的稠开集属于 C 的吸引域(a),稠开集是 B 和 C 的分形吸引域(c) 在噪声影响下原无噪声时的筛形域所在区域成为 B 和 C 的时变筛形域(b)或 B 和 C 的吸引域的分形边界(d)　灰色圆圈和空心圆圈分别表示吸引子 B 和 C,灰色箭头表示在该集合中存在被吸引到 B 的点,空心箭头表示在集合中存在被吸引到 C 的点

5.原无噪声时的筛形域在 $<\tau>_{max}<2T$ 时的改变

如果有一个正测度的闭类康托集(Cantor-like closed set),从该集合出发的轨道都被吸引到位于同步不变子空间中的混沌吸引子 A,则该集合是 A 的筛形吸引域,而且闭类康托集的余集是正测度的稠开集(open dense set)[16].根据原无噪声时稠开集与吸引子 B 和 C 的关系,将有两种情况(图 1):(1)位于同步不变子空间上侧的稠开集属于 B 的吸引域,而位于同步不变子空间下侧的稠开集属于 C 的吸引域.(2)稠开集是 B 和 C 的分形吸引域,在稠开集的任一点的邻域中,既能找到被吸引到 B 的点,又可以找到被吸引到 C 的点.给系统加上噪声,对于第一种情况,Lai[16] 等已有详细论述,认为噪声将使

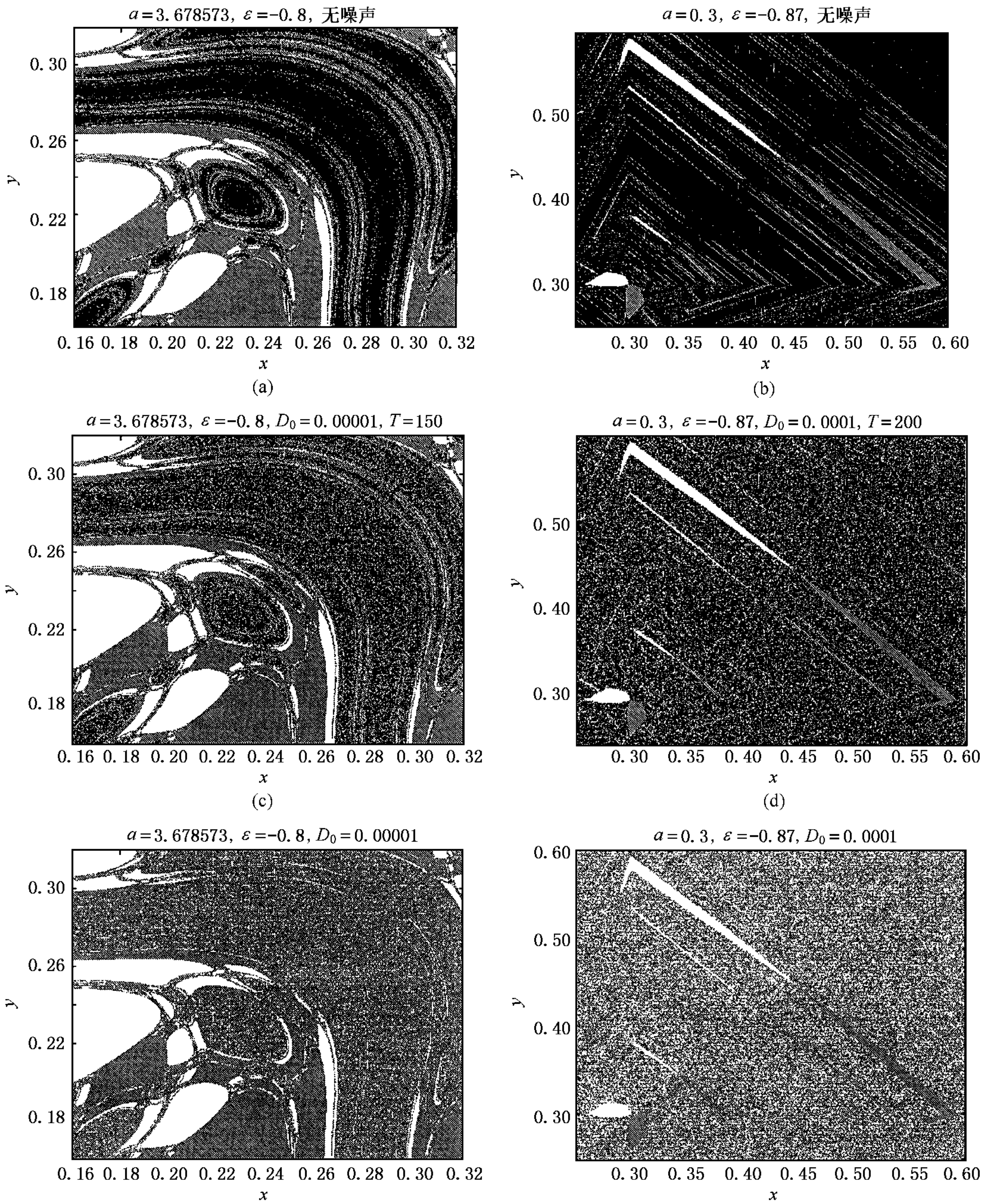

图 2 耦合逻辑映射混沌同步系统中的筛形域(a)和耦合斜帐篷映射混沌同步系统的筛形域(b)以及在加性噪声作用下筛形域在取不同的计算步数 T 时的改变(c)—(f) 黑色点表示被吸引到同步混沌吸引子的点,灰色点表示被吸引到(+∞,−∞)的点,白色点表示被吸引到(−∞,+∞)的点

得闭类康托集成为 B 和 C 的时变筛形域，我们将在下面讨论第二种情况．

对于第二种情况，当同步混沌吸引子 A 消失的时候，从位于不变子空间上侧的闭类康托集出发的轨道不仅会趋向于 B，由于噪声的作用，还有可能越过同步不变子空间而趋向于 C．而从位于不变子空间下侧的闭类康托集出发的轨道不仅会趋向于 C，同样也有可能趋向于 B．上面关于逃逸轨道被 B 和 C 俘获概率的推导也说明了这一点．此时，把闭类康托集和它的余集分开考虑将变得没有意义．考虑闭类康托集和它的余集的并集，在这个并集中的任一点的邻域中，既可以找到被吸引到 B 的点，也可以找到被吸引到 C 的点，这样，在原无噪声时的筛形域所在区域中出现了系统稳态吸引子 B 和 C 的吸引域的分形边界．

显然，在时变筛形域中不存在开集（图 1（b））而在分形边界中则处处存在开集（图 1（d））．

6．数值验证

考虑基础映射是逻辑映射 $x_{j+1}=ax_j(1-x_j^2)$ 的耦合混沌同步系统，取 $a=3.678573$，$\varepsilon=-0.8$，文献[19]证明该系统的同步混沌吸引子的吸引域是筛形域．取 $D_0=1.0\times10^{-5}$，$|\delta_{\rm th}|=1$ 得到 $\frac{\upsilon}{D}=-0.47$，$<\tau>_{\max}\approx3200$．基础映射是斜帐篷映射

$$x_{j+1}=\begin{cases}x_j/a & 0\leqslant x_j\leqslant a,\\(1-x_j)/(1-a) & a<x_j\leqslant1,\end{cases}$$

（其中 $0<a<1$）的耦合混沌同步系统，取 $a=0.3$，$\varepsilon=-0.87$，此时，该系统的同步混沌吸引子的吸引域是筛形域[13,15]．取 $D_0=1.0\times10^{-4}$，$|\delta_{\rm th}|=1$ 时得到 $\frac{\upsilon}{D}=-0.4$，$<\tau>_{\max}\approx1100$．通过图形看到，无噪声时的耦合逻辑映射混沌同步吸引子的筛形域属于第二种情况，而无噪声时的耦合斜帐篷映射混沌同步吸引子的筛形域属于第一种情况．当计算步数 T 较小时（满足 $<\tau>_{\max}>2T$），筛形域得到定性保留，而在 T 较大（$T=10000$）时，筛形域消失，取而代之的是系统稳态吸引子（$-\infty$，$+\infty$）和（$+\infty$，$-\infty$）的分形边界（图 2（e））和时变筛形域（图 2（f））．虽然图 2（e）和图 2（f）看起来很相似，但从第 5 节的分析得知，在图 2（e）中处处存在着开集而在图 2（f）中则不存在开集，故二者并不相同．

7．结　　论

由于噪声在实际物理系统中不可避免，我们的结果指出了在实际系统中观察筛形域必需满足的时间限制条件，对于实验研究具有重要价值．筛形域在噪声影响下不仅可以转化成时变筛形域，还可以转化成分形域．虽然二者看起来很相似，但理论分析表明它们并不相同．该结果对于筛形域理论的进一步研究很有意义．

[1] Pecora L M，Carroll T M 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **64** 8

[2] Zhu S Q，Lu X，Chen X F *et al* 2000 *Chin*. *Phys*. **9** 337

[3] Liu F，Ren Y，Shan X M *et al* 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 606

[4] Huang X G，Xu J X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 1113

[5] Chen S H，Xie J，Lu J A *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 749 (in Chinese)［陈士华、谢　进、陆君安等 2002 物理学报 **51** 749］

[6] Yang T，Shao H H 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 742 (in Chinese)［杨　涛、邵惠鹤 2002 物理学报 **51** 742］

[7] Chen Y H，Zhou T，He D H *et al* 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 731 (in Chinese)［陈永红、周　桐、何岱海等 2002 物理学报 **51** 731］

[8] Kuang J Y，Deng K，Huang R H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1856 (in Chinese)［匡锦瑜、邓　昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856］

[9] Alexander J C，Yorker J A，Zhiping Y *et al* 1992 *Int*. *J*. *Bif*. *Chaos* **2** 795

[10] Kapitaniak T，Maistrenko Y，Stefanski A *et al* 1998 *Phys*. *Rev*. E **57** 6253

[11] Pegna G，Marracu R，Tonelli R 2000 *Int*. *J*. *Bif*. *Chaos* **10** 959

[12] Heagy J F，Carroll T L，Pecora L M 1994 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **73** 3528

[13] Tan N，Chen Y H，Xu J X *et al* 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1215 (in Chinese)［谭　宁、陈永红、徐健学等 2000 物理学报 **49** 1215］

[14] Kapitaniak T，Brindly J 1998 *Chaos*，*Solitons and Fractals* **9** 43

[15] Tan N，Xu J X，Chen Y H 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 670

[16] Lai Y C 1997 *Phys*. *Rev*. E **56** 3897

[17] Cenys A，Ulbikas J 1999 *Int*. *J*. *Bif*. *Chaos* **9** 355

[18] Gardiner C W 1985 *Handbook of Stochastic Methods for Physics*，*Chemistry and the Natural Sciences* 2nd ed (Berlin：Springer-Verlag) p135

[19] Maistrenko Y L，Maistrenko V L，Popovich A 1998 *Phys*. *Rev*. E **57** 2713

The characters of riddled basins in coupled chaotic synchronized maps with additive noises*

Tan Ning Xu Jian-Xue Kang Yan-Mei Chen Yong-Hong

(*State Key Laboratory of Mechanical Structural Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049, *China*)

(Received 14 October 2002; revised manuscript received 5 March 2003)

Abstract

In real systems, because of the inevitable noise, a chaotic synchronized attractor A will turn into a metastable attractor A' with an average lifetime $<\tau>$. We analyze a two-dimensional coupled map with additive noises and find analytically that the riddled basin of A' will disappear when $<\tau> < 2T$ and can only be observed qualitatively when $<\tau> > 2T$, where T is the duration of an experiment. According to the characters of the riddled basin without noises, it is found that the riddled basin will turn into not only a temporal riddled basin but also a regular fractal basin. This result is universal in two-dimensional coupled chaotic synchronized maps, and the further numerical calculations can also confirm this point.

Keywords: chaotic synchronization, riddled basin, transient chaos, coupled maps, additive noise

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 30030040 and 10172067).