

平顶高斯光束在单轴晶体中的传输*

罗时荣¹⁾ 吕百达¹⁾²⁾

¹⁾ 四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)

²⁾ 华中科技大学激光技术国家重点实验室, 武汉 430074)

(2003 年 1 月 21 日收到, 2003 年 5 月 22 日收到修改稿)

基于光束在各向异性单轴介质中的近轴矢量传输理论, 对平顶高斯光束在单轴晶体中的传输作了研究, 得到了解析的传输公式. 利用该传输公式可用一种简单的方法研究平顶高斯光束在单轴晶体中的传输. 研究结果表明, 由于晶体的各向异性特性使平顶高斯光束初始的圆对称性在传输过程中不能保持, 并且其偏振状态也随传输而变化. 用数值计算例对晶体内源于入射平顶高斯光束的寻常光和非常光的场分布以及 x 和 y 方向的偏振分量在空间中的演化都作了详细说明.

关键词: 平顶高斯光束, 单轴晶体, 各向异性, 近轴矢量理论, 传输公式

PACC: 4255, 4200

1. 引 言

在材料物理、线性和非线性光学领域, 例如线偏振光的产生、参量振荡和放大、二次谐波和高次谐波产生等方面, 各向异性介质都起着重要的作用. 研究光在各向异性介质中的传输特性有重要的意义. 平顶高斯光束是描述具有平顶均匀分布光束的重要物理模型, 文献中对平顶高斯光束的特性和在各向同性介质中的传输已作了大量的研究^[1-5], 但对平顶高斯光束在各向异性介质中的传输还未见报道. 虽然原则上可以从直接求解各向异性介质中的麦克斯韦方程组得到各向异性介质中光传输的知识^[6], 但因使用这种方法的复杂性而未广泛应用. 在实际光学系统中经常使用的各向异性介质是单轴晶体. 近年来, Ciattoni 等^[7]基于角谱分析, 建立了用电场矢量描述光在单轴晶体中传输的方程, 从而可解决光在单轴晶体中的边值问题. 这一方法的基本物理思想是: 光在单轴晶体中的场分布可表示为寻常光(o 光)和非常光(e 光)的场分布的叠加, 而 o 光和 e 光在单轴晶体中的传输类似于光在折射率分别为 n_o (o 光的折射率)和 n_e^2/n_o (n_e 为 e 光的折射率)的各向同性介质中的独立传输. 利用这一方法, 已对

高斯光束、厄米-高斯光束、拉盖尔-高斯光束和贝塞尔-高斯光束在单轴晶体中的传输作了研究^[8-10]. 本文首次研究平顶高斯光束在单轴晶体中的传输问题, 得到了解析的传输公式, 给出了典型的数值计算例, 并作了详细的分析和讨论.

2. 线偏振光在单轴晶体中的传输

不失一般性, 假定在单轴晶体 $z=0$ 的入射面上线偏振圆对称光束的偏振方向沿 x 轴, 传输方向沿 z 轴. 在 $z=0$ 面上, 电场矢量表示为

$$E(r, \phi, 0) = E(r, 0)\hat{e}_x. \quad (1)$$

在晶体内任意 $z > 0$ 处的横向场分布为^[7,9]

$$E(r, \phi, z) = \exp(ik_0 n_o z) [A_o(r, \phi, z) + A_e(r, \phi, z)] \quad (2)$$

式中 $k_0 = 2\pi/\lambda$ 和 λ 分别是光束在真空中的波数和波长. 在本文中未考虑电矢量的纵向分量, 因为在近轴近似下, 纵向分量远小于横向分量, 可以忽略^[7]. (2)式中

$$A_o(r, \phi, z) = [A_o^{(0)}(r, z) + \cos(2\phi)A_o^{(2)}(r, z)]\hat{e}_x + \sin(2\phi)A_o^{(2)}(r, z)\hat{e}_y, \quad (3)$$

$$A_e(r, \phi, z) = [A_e^{(0)}(r, z) - \cos(2\phi)A_e^{(2)}(r, z)]\hat{e}_x - \sin(2\phi)A_e^{(2)}(r, z)\hat{e}_y. \quad (4)$$

* 激光技术国家重点实验室基金(批准号 2001-0009)资助的课题.

分别是晶体内 o 光和 e 光的慢变振幅,而

$$A_j^{(m)}(r, z) = \pi \int_0^\infty dk k \exp\left(-\frac{izk^2}{2k_0 \eta_j}\right) J_m(kr) \tilde{E}(k) \quad (5)$$

($m = 0, 2, j = o, e$, 下同),

式中 $\eta_o = n_o, \eta_e = n_e^2/n_o$. J_m 是第一类 m 阶贝塞尔函数, \tilde{E} 是入射面上场分布的零阶汉克尔变换,即

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr' r' J_0(kr') E(r', 0). \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式,当 $m=0$ 时,利用积分公式^[11]

$$\int_0^\infty \sin(ax^2) J_\nu(bx) J_\nu(xy) x dx = \frac{1}{2a} \cos\left(\frac{y^2 + b^2}{4a} - \frac{\pi\nu}{2}\right) J_\nu\left(\frac{by}{2a}\right), \quad (7)$$

$$\int_0^\infty \cos(ax^2) J_\nu(bx) J_\nu(xy) x dx = \frac{1}{2a} \sin\left(\frac{y^2 + b^2}{4a} - \frac{\pi\nu}{2}\right) J_\nu\left(\frac{by}{2a}\right) \quad (8)$$

计算得场分布 $A^{(0)}$ 的表达式为

$$A_j^{(0)}(r, z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-ik_0 \eta_j}{z} \int_0^\infty dr' r' E(r', 0) \times \exp\left[ik_0 \eta_j \frac{r^2 + r'^2}{2z}\right] J_0\left(\frac{k_0 \eta_j r r'}{z}\right) \right\}. \quad (9)$$

(9) 式表明 $A^{(0)}$ 在单轴晶体中的传输公式与圆对称光在折射率为 η_j 的均匀介质中的近轴传输公式^[12] 只相差一系数 $1/2$. 值得指出的是,文献 10 在推导过程中,使用所引公式(8)式时,忽视了该公式所要求的条件 $\text{Re } \alpha > 0$ ^[11], 得出结果(原文(10)式)有误,正确形式应是本文的(9)式.

当 $m=2$ 时,由(5)式,得到场分布 $A^{(2)}$ ^[10]

$$A_j^{(2)}(r, z) = \frac{2}{r^2} \int_0^r d\xi \xi A_j^{(0)}(\xi, z) - A_j^{(0)}(r, z). \quad (10)$$

3. 平顶高斯光束在单轴晶体中的传输公式

设在入射面上($z=0$)平顶高斯光束的场分布为^[11]

$$E(r, 0) = \exp\left[-\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right] \times \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left[\frac{(N+1)r^2}{w_0^2}\right]^n \hat{e}_x, \quad (11)$$

式中的 N 和 w_0 分别是平顶高斯光束的阶数和束腰宽度. 从文献 3 中的(2)式出发,得出场分布 $A^{(0)}$

的表达式

$$A_j^{(0)}(r, z) = \frac{-iF_j}{2(1-iF_j)} \exp(r_j'^2) \times \sum_{n=0}^N (1-iF_j)^{-n} L_n(-iF_j r_j'^2) \quad (12)$$

式中的 $F_j = k_0 \eta_j v_0^2 / 2z, v_0 = \frac{w_0}{\sqrt{N+1}}, r_j'^2 = \left(\frac{iF_j}{1-iF_j}\right) \left(\frac{r}{v_0}\right)^2$, L_n 为 n 阶拉盖尔多项式. 将(12)式代入(10)式,分部积分之,得

$$A_j^{(2)}(r, z) = \frac{1}{2r_j'^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-iF_j)^{m+1}}{(1-iF_j)^{n+1}} \times \left[\exp(r_j'^2) \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} r_j'^{2l} - 1 \right] - A_j^{(0)}(r, z). \quad (13)$$

将(12)和(13)式代入(3)式得到单轴晶体中源于平顶高斯光束的 o 光慢变振幅为

$$A_o(r, \phi, z) = A_{ox}(r, \phi, z) \hat{e}_x + A_{oy}(r, \phi, z) \hat{e}_y, \quad (14)$$

式中

$$A_{ox}(r, \phi, z) = -\frac{iF_o \sin^2(\phi)}{1-iF_o} \exp(r_o'^2) \times \sum_{n=0}^N (1-iF_o)^{-n} L_n(-iF_o r_o'^2) + \frac{\cos(2\phi)}{2r_o'^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-iF_o)^{m+1}}{(1-iF_o)^{n+1}} \times \left[\exp(r_o'^2) \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} r_o'^{2l} - 1 \right], \quad (15)$$

$$A_{oy}(r, \phi, z) = \frac{\sin(2\phi)}{2} \left\{ \frac{iF_o}{1-iF_o} \exp(r_o'^2) \times \sum_{n=0}^N (1-iF_o)^{-n} L_n(-iF_o r_o'^2) + \frac{1}{r_o'^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-iF_o)^{m+1}}{(1-iF_o)^{n+1}} \times \left[\exp(r_o'^2) \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} r_o'^{2l} - 1 \right] \right\} \quad (16)$$

分别是 o 光沿 x 方向和 y 方向偏振的场分布的慢变振幅. 将(12)和(13)式代入(4)式得到单轴晶体中源于平顶高斯光束的 e 光慢变振幅

$$A_e(r, \phi, z) = A_{ex}(r, \phi, z) \hat{e}_x + A_{ey}(r, \phi, z) \hat{e}_y, \quad (17)$$

式中

$$A_{ex}(r, \phi, z) = -\frac{iF_e \cos^2(\phi)}{1 - iF_e} \exp(r_e'^2) \times \sum_{n=0}^N (1 - iF_e)^{-n} L_n(-iF_e r_e'^2) - \frac{\cos(2\phi)}{2r_e'^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-iF_e)^{m+1}}{(1 - iF_e)^{n+1}} \times \left[\exp(r_e'^2) \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} r_e'^{2l} - 1 \right], \tag{18}$$

$$A_{ey}(r, \phi, z) = -\frac{\sin(2\phi)}{2} \left\{ \frac{iF_e}{1 - iF_e} \exp(r_e'^2) \times \sum_{n=0}^N (1 - iF_e)^{-n} L_n(-iF_e r_e'^2) + \frac{1}{r_e'^2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{(-iF_e)^{m+1}}{(1 - iF_e)^{n+1}} \times \left[\exp(r_e'^2) \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!} r_e'^{2l} - 1 \right] \right\} \tag{19}$$

分别是 e 光沿 x 方向和 y 方向偏振的场分布的慢变

振幅. 将(14)和(17)式代入(2)式, 得到平顶高斯光束在单轴晶体中的传输公式

$$E(r, \phi, z) = E_x(r, \phi, z)\hat{e}_x + E_y(r, \phi, z)\hat{e}_y, \tag{20}$$

式中

$$E_x(r, \phi, z) = \exp(ik_0 n_0 z) \times [A_{ox}(r, \phi, z) + A_{ex}(r, \phi, z)] \tag{21}$$

$$E_y(r, \phi, z) = \exp(ik_0 n_0 z) \times [A_{oy}(r, \phi, z) + A_{ey}(r, \phi, z)] \tag{22}$$

是沿 x 方向和 y 方向偏振的场分布. (14)–(22)式是本文的主要解析结果. 利用这些公式可以计算出平顶高斯光束在单轴晶体中任意位置处的场分布. 在式中令 $N=0$, 便得基模高斯光束在单轴晶体中的传输公式, 这与文献[8]中的(18)式一致, 为节省篇幅, 此处从略.

4. 数值计算和分析

利用本文得到的(14)–(22)式可对平顶高斯光

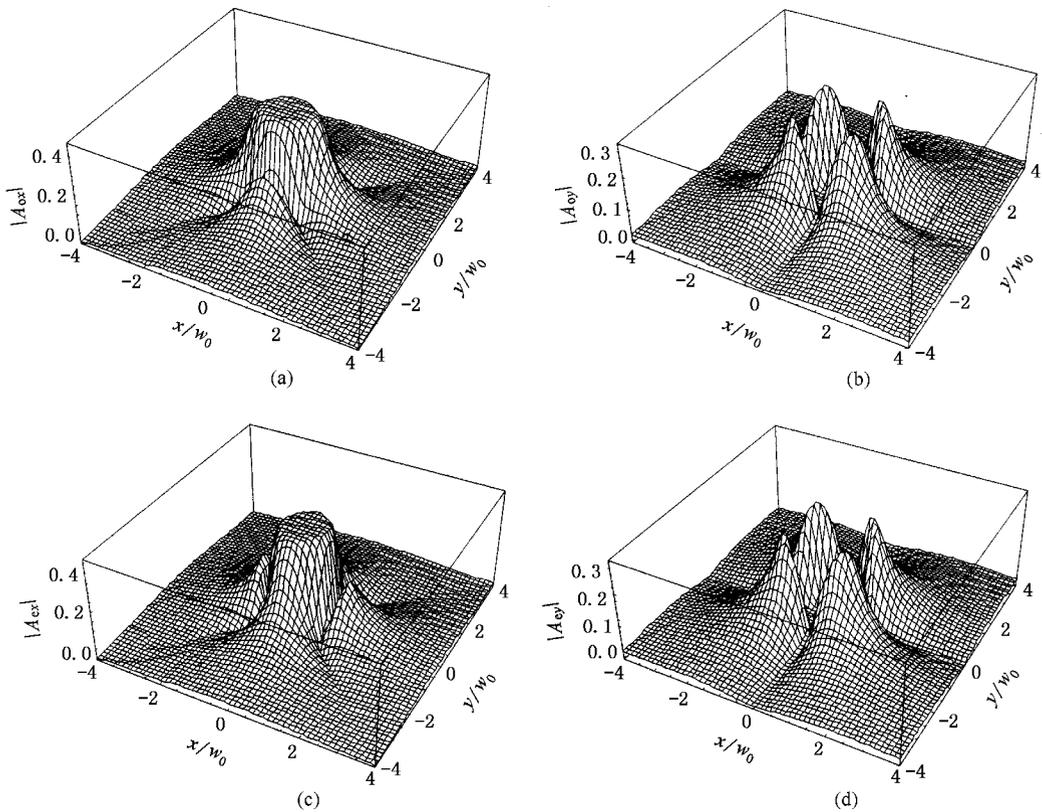


图1 在金红石晶体中 $z=0$ 面上源于 10 阶平顶高斯光束 o 光和 e 光慢变振幅的模 (a) 和 (b) 分别是 o 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模 (c) 和 (d) 分别是 e 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模

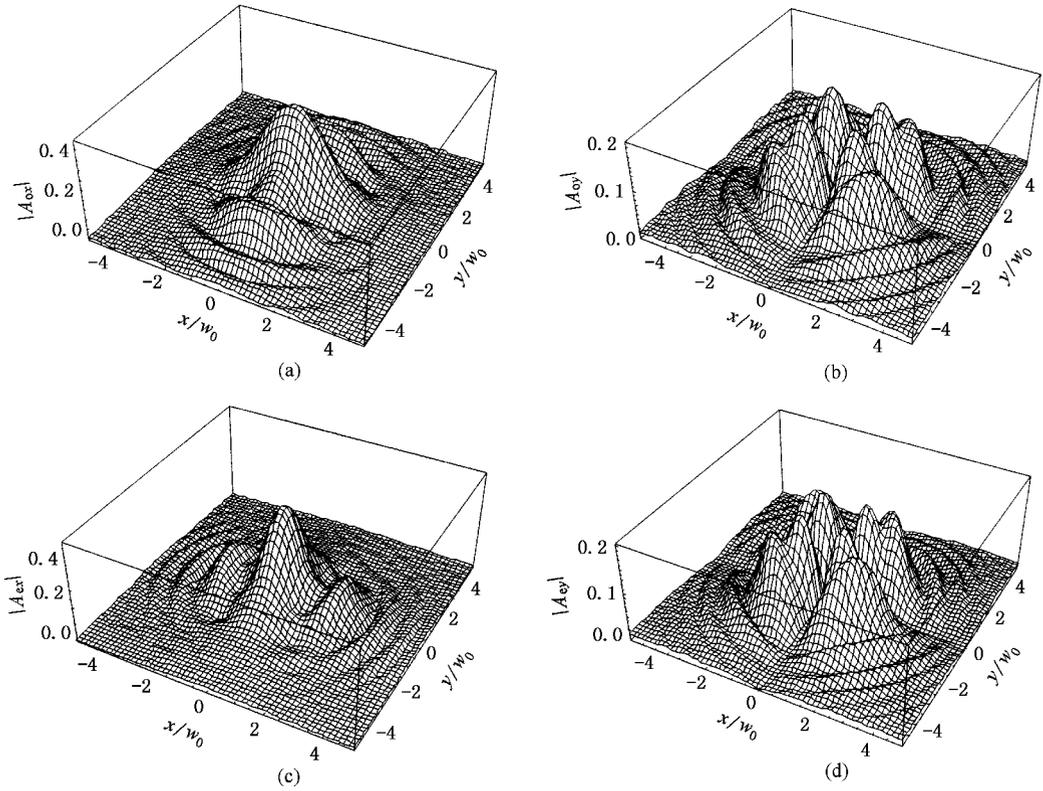


图2 在金红石晶体中 $z = 0.5 \text{ cm}$ 面上源于10阶平顶高斯光束 o 光和 e 光慢变振幅的模 (a)和(b)分别是 o 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模 (c)和(d)分别是 e 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模

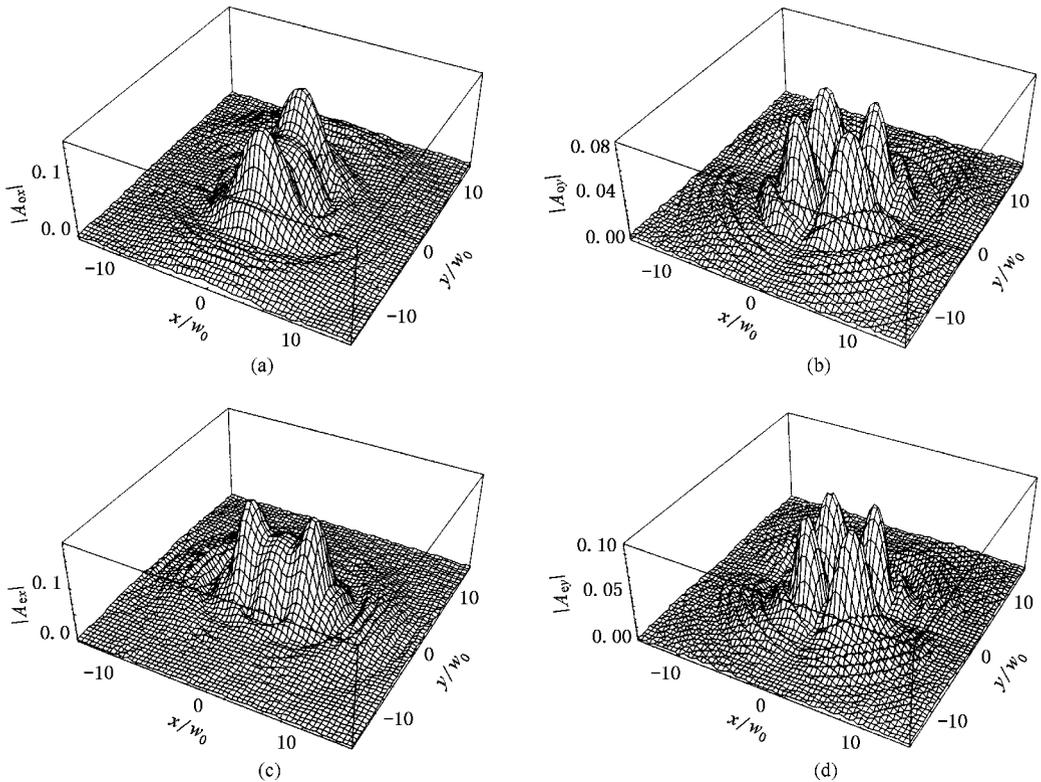


图3 在金红石晶体中 $z = 2.5 \text{ cm}$ 面上源于10阶平顶高斯光束 o 光和 e 光慢变振幅的模 (a)和(b)分别是 o 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模 (c)和(d)分别是 e 光沿 x 方向和 y 方向偏振场分布慢变振幅的模

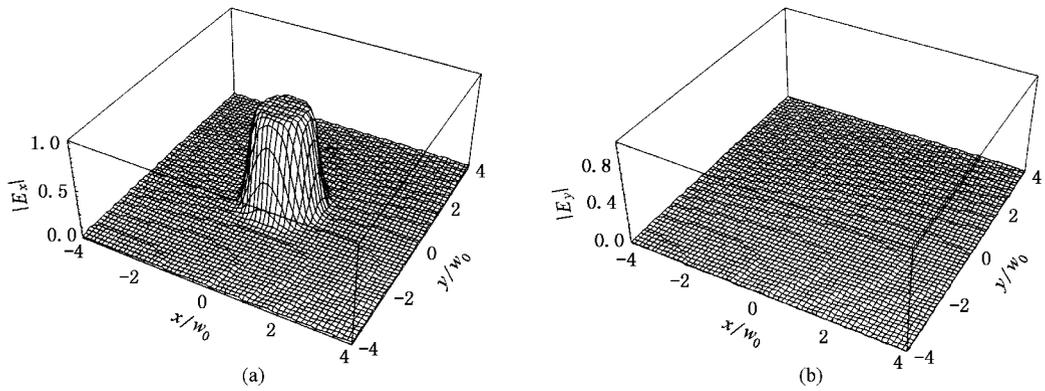


图4 10阶平顶高斯光束在金红石晶体中 $z=0$ 面上的场分布的模 (a)和(b)分别是沿 x 方向和 y 方向偏振场分布的模

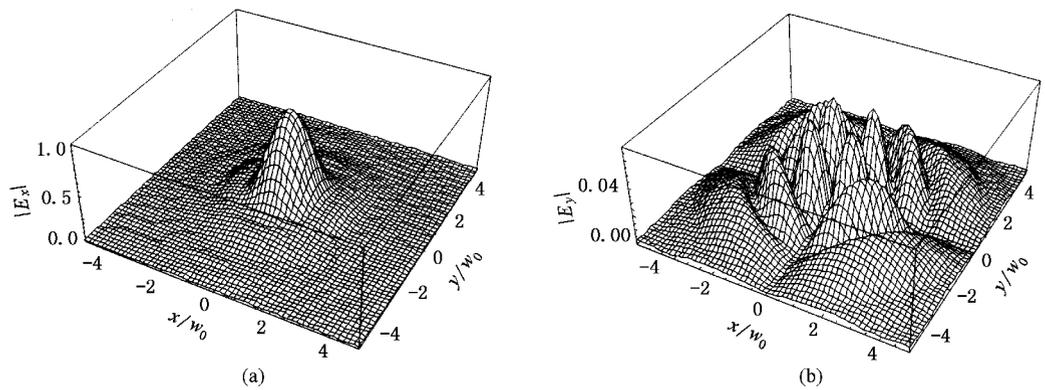


图5 10阶平顶高斯光束在金红石晶体中 $z=0.5$ cm 面上的场分布的模 (a)和(b)分别是沿 x 方向和 y 方向偏振场分布的模

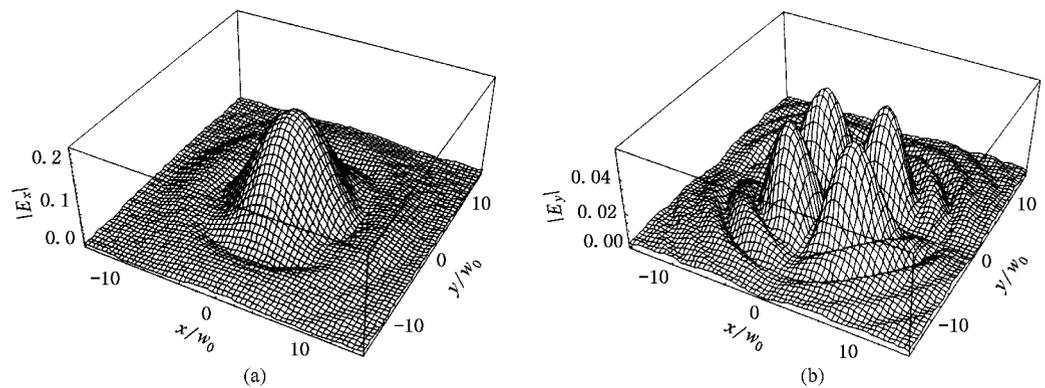


图6 10阶平顶高斯光束在金红石晶体中 $z=2.5$ cm 面上的场分布的模 (a)和(b)分别是沿 x 方向和 y 方向偏振场分布的模

束在单轴晶体中的传输作数值计算. 图1—图3给出了金红石晶体(o 光和 e 光的折射率分别为 $n_o = 2.616$, $n_e = 2.903$)中源于10阶平顶高斯光束的 o 光

和 e 光慢变振幅的模. 图4—图6给出了10阶平顶高斯光束在金红石晶体中的场分布的模. 计算中 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $w_0 = 20 \mu\text{m}$.

图 1—图 3 表明,在单轴晶体中任意面上源于圆对称平顶高斯光束的 o 光和 e 光都不是圆对称的. 在入射面上,将 o 光沿 x 方向偏振的场分布(图 1(a))绕 z 轴旋转 90° ,可得到 e 光沿 x 方向偏振的场分布(图 1(c));o 光(图 1(b))和 e 光(图 1(d))沿 y 方向偏振的场分布完全相同. 而在晶体内的其他面上(图 2、图 3)的 o 光和 e 光的场分布不具有这种特点. 这是因为 o 光和 e 光在单轴晶体中的传输可分别类似于光在折射率为 n_o 和 n_e^2/n_o 的各向同性介质中的独立传输,从入射面到晶体内的同一面上, o 光和 e 光走的光程($L_j = \eta_j z$)不同,所以衍射效应对 o 光和 e 光的作用大小不同. 从图 1—图 3 还可看出:在单轴晶体中源于平顶高斯光束的 o 光和 e 光沿 x 方向偏振的场分布由中心主峰和与主峰紧密相连的次峰组成. 随着传输距离的增加,中心主峰形状发生变化,并且在边缘出现一些衍射旁瓣;o 光和 e 光沿 y 方向偏振的场分布集中在 I、II、III、IV 象限中的 4 个峰上,沿 x, y, z 轴场分布为零. 当然在不同面上,这 4 个峰还有一些变化. 在入射面上是 4 个光滑的峰(图 1(b)(d));在其他位置(图 2(b)(d)和图 3(b)(d)),每个主峰分裂成一些相连的次峰,并出现衍射花样. 图 4—图 6 表明:圆对称平顶高斯光束在单轴晶体中传输时,沿 x 方向偏振的场分布不能保持圆对称性,晶体内(图 5(a)和图 6(a))的场分布出现衍射旁瓣,且随着传输距离的增加,衍射旁

瓣增大;沿 y 方向偏振的场分布在入射面上为零(图 4(b)),在其他面上(图 5(b)和图 6(b))出现衍射峰,但沿 x, y, z 轴始终为零,因此平顶高斯光束在传输过程中,不仅场分布的对称性发生了变化,而且线偏振性也发生了变化. 图 4—图 6 展现出的平顶高斯光束沿 x 和 y 方向偏振分量在单轴晶体中的空间演化行为由晶体的各向异性特性引起,结合图 1—图 3 所示 o 光和 e 光的传输行为可以得到解释.

5. 结 论

本文对平顶高斯光束在单轴晶体中的传输作了研究,得到了解析的传输公式,并作了数值计算. 结果表明,在单轴晶体中源于平顶高斯光束的 o 光和 e 光都不是圆对称的;入射面上 o 光和 e 光有如下特点:o 光沿 x 方向偏振的场分布绕 z 轴旋转 90° 后与 e 光沿 x 方向偏振的场分布相同;o 光和 e 光沿 y 方向偏振的场分布相同. 由于晶体的各向异性使晶体内其他面上的 o 光和 e 光的场分布不具有这种特点,从而导致入射的平顶高斯光束的圆对称性和线偏振性在晶体中不再保持,表现为晶体中不仅有沿 x 方向的偏振分量(o 光和 e 光沿该方向的偏振分量之和),而且有沿 y 方向的偏振分量(o 光和 e 光沿该方向的偏振分量之和),且这两个分量都不是圆对称的.

- [1] Gori F 1994 *Opt. Commun.* **107** 335
- [2] Bagini V, Borghi R, Gori F *et al* 1996 *J. Opt. Soc. Am. A* **13** 1385
- [3] Lü B D, Luo S R, Ji X L 2001 *J. Mod. Opt.* **48** 371
- [4] Luo S R, Lü B D, Zhang B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1446 [in Chinese] 罗时荣、吕百达、张 彬 1999 物理学报 **48** 1446]
- [5] Lü B D, Luo S R 2000 *J. Opt. Soc. Am. A* **17** 2001
- [6] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* (Cambridge : Cambridge University Press) p793
- [7] Ciattoni A, Crosignani B, Di Porto P 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 1656
- [8] Cincotti G, Ciattoni A, Palma C 2001 *IEEE J. Quant. Electron.* **37** 1517
- [9] Ciattoni A, Cincotti G, Palma C 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 792
- [10] Cincotti G, Ciattoni A, Palma C 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1680
- [11] Erdelyi A 1954 *Tables of Integral Transforms* (Vol. 2) (New York : McGraw-Hill) p51
- [12] Collins S A 1970 *J. Opt. Soc. Am.* **60** 1168

Propagation of flattened-Gaussian beams in uniaxial crystals^{*}

Luo Shi-Rong¹⁾ Lü Bai-Da^{1 2)}

¹⁾*Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China*

²⁾*State Key Laboratory of Laser Technology, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*

(Received 21 January 2003 ; revised manuscript received 22 May 2003)

Abstract

The propagation of flattened-Gaussian beams (FGBs) in uniaxial crystals is studied based on the paraxial vector theory of the propagation of beams in uniaxially anisotropic media. Analytical propagation equations are derived, which permit us to study the propagation properties of FGBs in uniaxial crystals in a simple way. It is shown that the initial circular symmetry of FGBs cannot be kept up, and the state of polarization of FGBs varies during propagation due to the anisotropy of crystals. The spatial evolutions of ordinary and extraordinary components, as well as these in x and y directions in the crystals originating from input FGBs are illustrated with detailed numerical examples.

Keywords : flattened-Gaussian beam, uniaxial crystal, anisotropy, paraxial vector theory, propagation equation

PACC : 4255, 4200

^{*} Project supported by the Foundation of State Key Laboratory of Laser Technology (Grant No. 2001-0009).