

非均匀散射层矢量辐射传输(VRT)方程 高阶散射解的迭代法*

梁子长 金亚秋†

(复旦大学波散射和遥感中心,信息科学与工程学院,上海 200433)

(2002 年 1 月 26 日收到,2002 年 5 月 22 日收到修改稿)

将散射介质层在 z 轴方向划分成薄层,用薄层的一阶散射强度、Fourier 变换和迭代方法求解散射介质整层的矢量辐射传输(VRT)方程的高阶散射解.该方法将一阶散射与高阶散射迭代结合起来,计算公式简明,可计算高阶迭代解,计算时间少.计算结果与一层均匀散射介质的 VRT 方程一阶 Mueller 矩阵解、半空间均匀散射介质二阶 Mueller 矩阵解、以及离散坐标-特征值特征矢量法的 VRT 热辐射的数值解作了全面的比较.提出并讨论了非均匀散射层主动与被动 VRT 方程的高阶解.本计算程序可以通用于非球形粒子多层结构及非均匀介质的散射和热辐射计算.

关键词:VRT 方程,分层,迭代解

PACC:0270,4220,0380

1. 引言

描述 4 个 Stokes 参数多次散射、吸收与辐射能量传输的矢量辐射传输(VRT)方程在十分广泛的领域内均有重要的研究与应用.对各特定条件下 VRT 方程的求解已有很多方法,如迭代法、Mueller 矩阵法、离散坐标-特征值特征矢量法、不变嵌入法等^[1-4].其中一阶迭代法及其一阶 Mueller 矩阵法是解析的,但只能用于求解反照率较小、高阶散射可以忽略的情况.二阶以上的迭代解无论是解析形式,还是数值求解都是难以实现的.而离散坐标-特征值特征矢量法与不变嵌入法是计算机数值方法,需要求解较大的微分方程组.不变嵌入法现在仅用于计算热辐射^[5].离散坐标-特征值特征矢量法难于应用于非均匀散射层多个 VRT 耦合方程的求解.而且该方法求解主动 VRT^[2,6]时,其特解在入射角等于 Gauss 求积离散角时可能出现奇异^[7,8],这点尚未在 VRT 中得到讨论.

本文提出把散射介质层在 z 轴方向划分成薄层,用薄层的一阶散射强度、Fourier 变换和迭代方法求解整个散射介质层 VRT 方程的高阶散射解.该方

法将薄层的一阶散射解与整层高阶散射迭代结合起来,计算公式简明,使得计算高阶迭代解可行,而且时间少.计算程序可以通用于具有多层结构、非均匀分布的非球形粒子散射介质的高阶散射与热辐射计算.

2. 对角化 VRT 方程

一层非均匀散射介质的 VRT 方程写为

$$\begin{aligned} \cos\theta \frac{d}{dz} \bar{I}(\theta, \varphi, z) &= -\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi, z) \cdot \bar{I}(\theta, \varphi, z) \\ &+ \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \bar{P}(\theta, \varphi; \theta', \varphi', z) \\ &\cdot \bar{I}(\theta', \varphi', z), \end{aligned} \quad (1)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} \bar{I}(\pi - \theta, \varphi, z = 0) &= \bar{I}_0 \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \delta(\varphi), \\ \bar{I}(\theta, \varphi, z = -d) &= \bar{R}_{12}(\theta) \cdot \bar{I}(\pi - \theta, \varphi, z = -d), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \bar{I}_0 为入射 Stokes 矢量 ($\theta_0, \varphi_0 = 0$) 为入射角, $\bar{R}_{12}(\theta)$ 是下垫界面反射率矩阵, \bar{P} 为相矩阵, $\bar{\kappa}_e$ 为消光矩阵^[1,2],

* 国家重点基础研究规划项目(批准号 2001CB309401)国家自然科学基金(批准号 49831060,60171009)资助的课题.

† 通信联系人.

$$\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi, z) = \frac{2\pi}{k} n_0 \begin{bmatrix} 2\text{Im } f_{vv}^0 & 0 & \text{Im } f_{vh}^0 & -\text{Re } f_{vh}^0 \\ 0 & 2\text{Im } f_{hh}^0 & \text{Im } f_{hv}^0 & \text{Re } f_{hv}^0 \\ 2\text{Im } f_{hv}^0 & 2\text{Im } f_{vh}^0 & \text{Im } f_{vv}^0 + f_{hh}^0 & \text{Re } f_{vv}^0 - f_{hh}^0 \\ 2\text{Re } f_{vh}^0 & -2\text{Re } f_{vh}^0 & \text{Re } f_{hh}^0 - f_{vv}^0 & \text{Im } f_{vv}^0 + f_{hh}^0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中 f_{pq}^0 为散射元的前向散射振幅函数,用上标 0 表示前向 $f_{pq}(\theta, \varphi; \theta, \varphi)$ 角括号表示关于散射元空间取向分布的平均, n_0 是单位体积中散射粒子数.

一旦由 f_{pq}^0 和 f_{pqst}^* ($p, q, s, t = v, h$) 确定了 VRT 方程的各成分 $\bar{\kappa}$ 和 \bar{P} , 余下要处理求解的就是具有这样的 $\bar{\kappa}_e$ 和 \bar{P} 的连续随机散射介质的 VRT.

由于在以下均匀薄层运算中, $\bar{\kappa}_e$ 和 \bar{P} 是 z 处该薄层的消光矩阵及相矩阵, 自(3)式后的薄层散射中, $\bar{\kappa}_e$ 和 \bar{P} 中不再标注变量 z .

在非球形粒子非均匀空间取向的一般情况下, $\bar{\kappa}_e$ 是非对角矩阵, 但总能找到矩阵 $\bar{E}(\theta, \varphi)$ 及其逆矩阵 $\bar{E}^{-1}(\theta, \varphi)$, 将消光矩阵化成对角矩阵

$$\bar{\beta}(\theta, \varphi) = \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \cdot \bar{\kappa}_e(\theta, \varphi) \cdot \bar{E}(\theta, \varphi), \quad (4)$$

其中对角矩阵 $\bar{\beta}$ 的 ii 元素记为 β_i , $i = 1, 2, 3, 4$. 可知 β_i 为 $\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi)$ 的特征值, $\bar{E}(\theta, \varphi)$ 为由 $\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi)$ 的特征向量组成的矩阵^[1, 2], 其第 i 列为对应特征值 β_i 的特征向量, 其表达式可在文献[1, 2]中找到. 若

$f_{vh}^0 = f_{hv}^0 = 0$ 则 \bar{E} 和 \bar{E}^{-1} 变为常数矩阵

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -i/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & i/2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

现用 \bar{E}^{-1} 左乘(1)(2)式得

$$\begin{aligned} & \cos\theta \frac{d}{dz} \bar{I}^E(\theta, \varphi, z) \\ &= -\bar{\beta}(\theta, \varphi) \cdot \bar{I}^E(\theta, \varphi, z) \\ &+ \int_0^\pi d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \bar{P}^E(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \\ &\cdot \bar{I}^E(\theta', \varphi', z), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{I}^E(\pi - \theta, \varphi, z = 0) = \bar{I}_0^E(\cos\theta - \cos\theta_0)(\varphi),$$

$$\bar{I}^E(\theta, \varphi, z = -d) = \bar{R}_{12}^E(\theta) \cdot \bar{I}^E(\pi - \theta, \varphi, z = -d), \quad (7)$$

其中

$$\bar{I}^E(\theta, \varphi, z) = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{I}(\theta, \varphi, z), \quad (8)$$

$$\bar{P}^E(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{P}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \cdot \bar{E}, \quad (9a)$$

$$\bar{R}_{12}^E(\theta) = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{R}_{12}(\theta) \cdot \bar{E}. \quad (9b)$$

可知只要求解出(6)(7)式的 \bar{I}^E , 根据(8)式即可获得(1)式的 \bar{I} .

3. 无反射界面的介质薄层的一阶迭代解

当平面电磁波以 $(\pi - \theta_0, \rho)$ 入射到一层无反射界面厚为 Δd 的介质上, 其上下界面处的一阶散射强度为^[1]

$$\begin{aligned} & I_{si}^{E(1)}(\theta, \varphi, \rho) \\ &= \sum_{j=1}^4 P_{ij}^E(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \frac{\sec\theta}{\beta_j \sec\theta_0 + \beta_i \sec\theta} \\ &\times \{1 - \exp[-\Delta d(\beta_j \sec\theta_0 + \beta_i \sec\theta)]\} \cdot I_{0j}^E, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} & I_{si}^{E(1)}(\pi - \theta, \varphi, -\Delta d) \\ &= \sum_{j=1}^4 P_{ij}^E(\pi - \theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \frac{\sec\theta}{\beta_j \sec\theta_0 - \beta_i \sec\theta} \\ &\times [\exp(-\beta_i \Delta d \sec\theta) \\ &- \exp(-\beta_j \Delta d \sec\theta_0)] \cdot I_{0j}^E, \end{aligned} \quad (10b)$$

其中 $I_{si}^{E(1)}$ 的 $i = 1, 2, 3, 4$ 与 I_{0j}^E 的 $j = 1, 2, 3, 4$ 分别表示散射和入射的四个 Stokes 参数.

当光学厚度 $\Delta\tau_i = \beta_i \Delta d \ll 1$, 且 θ 不靠近 90° 角时, 忽略 $(\Delta\tau)^2$ 以上的高阶项, (10a, b) 式有如下近似:

$$\begin{aligned} & I_{si}^{E(1)}(\theta, \varphi, \rho) \\ &\approx \Delta d \sec\theta \sum_{j=1}^4 P_{ij}^E(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \cdot I_{0j}^E, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & I_{si}^{E(1)}(\pi - \theta, \varphi, -\Delta d) \\ &\approx \Delta d \sec\theta \sum_{j=1}^4 P_{ij}^E(\pi - \theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \cdot I_{0j}^E. \end{aligned} \quad (11b)$$

由此近似, 介质层上下两界面单位面积上截获的总散射功率为

$$\Delta P_{si} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} [\bar{I}_{si}^{E(1)}(\theta, \varphi, \rho)]$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{I}_{si}^{E(1)}(\pi - \theta, \varphi, -d)] \cos \theta \sin \theta d \theta \\
\approx & \Delta d \sum_{j=1}^4 I_{0j}^E \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} [P_{ij}^E(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \\
& + P_{ij}^E(\pi - \theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho)] \sin \theta d \theta, \quad (12)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\kappa_{ij}^E(\theta_0) = & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} [P_{ij}^E(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho)] \\
& + P_{ij}^E(\pi - \theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho)] \sin \theta d \theta
\end{aligned}$$

定义为散射系数. 方程(12)即为

$$M_{ij}^E(\theta, \varphi; \theta_0, \rho) = \frac{P_{ij}^E(\theta, \varphi; \pi - \theta_0, \rho) \sec \theta}{\beta_j \sec \theta_0 + \beta_i \sec \theta} \begin{cases} 1 - \exp[-\Delta d(\beta_j \sec \theta_0 + \beta_i \sec \theta)] \\ \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ, 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ \\ \exp(-\beta_j \Delta d \sec \theta_0) - \exp(\beta_i \Delta d \sec \theta) \\ \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ, 0^\circ < \theta_0 < 90^\circ \\ \exp(\beta_j \Delta d \sec \theta_0) - \exp(-\beta_i \Delta d \sec \theta) \\ \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ, 90^\circ < \theta_0 < 180^\circ \\ 1 - \exp[\Delta d(\beta_j \sec \theta_0 + \beta_i \sec \theta)] \\ \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ, 90^\circ < \theta_0 < 180^\circ, \end{cases} \quad (15)$$

其中 $0^\circ < \theta_0 < 90^\circ$ 表示从上界面入射, $90^\circ < \theta_0 < 180^\circ$ 表示从下界面入射. 介质 Δd 薄层出射的散射强度是(15)式 \bar{M}^E 与入射辐射强度 \bar{I}_0^E 的乘积, 即

$$\bar{I}_s^E = \bar{M}^E \cdot \bar{I}_0^E. \quad (16)$$

若考虑被动热辐射的 VRT 方程, 介质 Δd 薄层出射的零阶辐射亮度温度为

$$T_i^E(\theta) = \frac{1 - \exp(-\beta_i \Delta d |\sec \theta|)}{\beta_i} \sum_{j=1}^4 \kappa_{aj}^E \cdot T_{0j}^E, \quad (17)$$

其中 $\bar{\kappa}_a^E = \bar{E}^{-1} \cdot \bar{\kappa}_a \cdot \bar{E}$ 为变换后的吸收系数矩阵, $\bar{T}_0^E = \bar{E}^{-1} \cdot [T T 0 0]$, T 为介质 Δd 薄层物理温度. 同理当 $\Delta \tau \ll 1$ 时, 介质 Δd 薄层出射的总辐射亮度温度可由(17)式表示.

4. VRT 方程高阶散射解的迭代法

当散射元水平方位均匀取向均匀分布时, 消光矩阵 $\bar{\kappa}_e^E$ 与方位角 φ 无关. 先将 $\bar{I}^E(\theta, \varphi, z)$ 和相矩阵 $\bar{P}^E(\theta, \varphi; \theta', \varphi')$ 在水平方位上作 Fourier 展开

$$\begin{aligned}
\bar{I}^E(\theta, \varphi, z) = & \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{I}^{mE}(\theta, z) \cos(m\varphi) \\
& + \bar{I}^{msE}(\theta, z) \sin(m\varphi)], \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\Delta \bar{P}_s \approx \Delta d \bar{\kappa}_s^E(\theta_0) \cdot \bar{I}_0^E. \quad (13)$$

而入射波被路径 $\Delta d \sec \theta_0$ 的散射层散射的总功率应写为

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{P}'_s = & \int \bar{\kappa}_s^E(\theta_0) \Delta d \sec \theta_0 \cdot \bar{I}_0^E \chi \cos \theta \\
& - \cos \theta_0 \chi(\varphi) \cos \theta d \Omega = \Delta d \bar{\kappa}_s^E(\theta_0) \cdot \bar{I}_0^E. \quad (14)
\end{aligned}$$

比较(13)与(14)式, 显然当 $\Delta \tau \ll 1$ 时, 一阶散射强度与总散射强度是很接近的, 其误差正比于 $(\Delta \tau)^2$.

由(10a, b)式, 定义

$$\begin{aligned}
\bar{P}^E(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = & \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{P}^{mE}(\theta, \theta') \\
& \times \cos m(\varphi - \varphi') \\
& + \bar{P}^{msE}(\theta, \theta') \sin m(\varphi - \varphi')], \quad (19)
\end{aligned}$$

其中上标 c, s 分别标志其 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 的分量.

再将 VRT 方程(6)进行 Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}
& \cos \theta \frac{d}{dz} \bar{I}^{mE}(\theta, z) \\
= & -\bar{\beta}(\theta) \cdot \bar{I}^{mE}(\theta, z) + (1 + \delta_m) \pi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \\
& \times [\bar{P}^{mE}(\theta, \theta') \cdot \bar{I}^{mE}(\theta', z) \\
& - \bar{P}^{msE}(\theta, \theta') \cdot \bar{I}^{msE}(\theta', z)], \quad (20a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos \theta \frac{d}{dz} \bar{I}^{msE}(\theta, z) \\
= & -\bar{\beta}(\theta) \cdot \bar{I}^{msE}(\theta, z) + (1 + \delta_m) \pi \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \\
& \times [\bar{P}^{msE}(\theta, \theta') \cdot \bar{I}^{mE}(\theta', z) \\
& + \bar{P}^{mE}(\theta, \theta') \cdot \bar{I}^{msE}(\theta', z)]. \quad (20b)
\end{aligned}$$

如图 1 所示, 在 z 方向将介质层均分成 H 个薄层 Δd , 同时将 θ 角等分成 N 份 (N 为偶数), 即有 θ_k

$$= \frac{\pi}{N} (k - 0.5), k = 1, 2, \dots, N, \text{ 则由方程(20)得到}$$

$$\bar{I}_{h,l}^{(n)mcE} = \bar{I}_{h,l}^{(n)msE} + \bar{I}_{h+1,l}^{(n)mcE} \cdot \bar{U}_{\beta l}$$

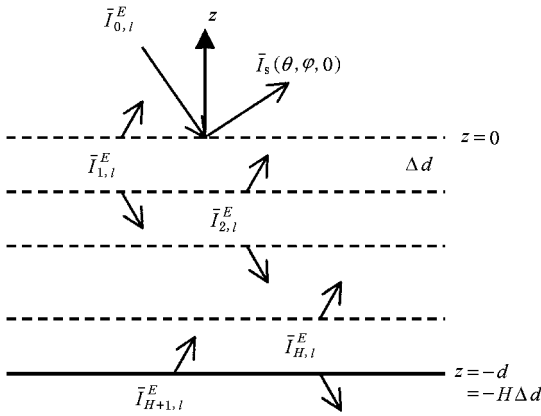


图 1 问题的几何结构

$$l = 1, 2, \dots, N/2, \quad (21a)$$

$$\bar{I}_{h,l}^{(n)mcE} = \bar{I}_{h,l}^{(n)mcE} + \bar{I}_{h,l}^{(n)mcE} \cdot \bar{U}_{\beta l}$$

$$l = N/2 + 1, \dots, N, \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{h,k}^{(n+1)mcE} = & \left[\sum_{l=N/2+1}^N \bar{M}_{kl}^{mcE} \cdot \bar{I}_{h-1,l}^{(n)mcE} \sin\theta_l \right. \\ & + \sum_{l=1}^{N/2} \bar{M}_{kl}^{mcE} \cdot \bar{I}_{h+1,l}^{(n)mcE} \sin\theta_l \\ & - \sum_{l=N/2+1}^N \bar{M}_{kl}^{msE} \cdot \bar{I}_{h-1,l}^{(n)msE} \sin\theta_l \\ & \left. - \sum_{l=1}^{N/2} \bar{M}_{kl}^{msE} \cdot \bar{I}_{h+1,l}^{(n)msE} \sin\theta_l \right] \frac{\pi}{N}, \quad (22a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_{h,k}^{(n+1)msE} = & \left[\sum_{l=N/2+1}^N \bar{M}_{kl}^{msE} \cdot \bar{I}_{h-1,l}^{(n)mcE} \sin\theta_l \right. \\ & + \sum_{l=1}^{N/2} \bar{M}_{kl}^{msE} \cdot \bar{I}_{h+1,l}^{(n)mcE} \sin\theta_l \\ & + \sum_{l=N/2+1}^N \bar{M}_{kl}^{mcE} \cdot \bar{I}_{h-1,l}^{(n)msE} \sin\theta_l \\ & \left. + \sum_{l=1}^{N/2} \bar{M}_{kl}^{mcE} \cdot \bar{I}_{h+1,l}^{(n)msE} \sin\theta_l \right] \frac{\pi}{N}, \quad (22b) \end{aligned}$$

其中上标 n 为迭代次数, $\alpha = c$ 或 s , $\bar{U}_{\beta l}$ 为对角阵:

$$\bar{I}_{h,k}^{mcE} = \begin{cases} \bar{I}^{mcE}(\theta_k, -(h-1)\Delta d) & 0^\circ < \theta_k < 90^\circ, \\ \bar{I}^{mcE}(\theta_k, -h\Delta d) & 90^\circ < \theta_k < 180^\circ, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\beta l} = & [\exp(-\Delta d\beta_1 \sec\theta_l), \exp(-\Delta d\beta_2 \sec\theta_l), \\ & \exp(-\Delta d\beta_3 \sec\theta_l), \exp(-\Delta d\beta_4 \sec\theta_l)], \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{kl}^{mcE} = & (1 + \delta_m)\pi \cdot \bar{M}^{mcE}(\theta_k, \theta_l) \\ k = & 1, 2, \dots, N, l = 1, 2, \dots, N, \quad (25) \end{aligned}$$

其中 $\bar{M}^{mcE}(\theta_k, \theta_l)$ 为(14)式相应的 Fourier 展开系数.

边界条件(7)离散为

$$\begin{aligned} \bar{I}_{0,l}^{(0)mcE} = & \frac{1}{(1 + \delta_m)\pi} \bar{I}_0^E \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ l = & N/2 + 1, \dots, N, \quad (26) \\ \bar{I}_{H+1,l}^{(n)mcE} = & \bar{R}_{12l}^E \cdot \bar{I}_{H,N+1-l}^{(n)mcE} \\ l = & 1, 2, \dots, N/2, \end{aligned}$$

其中

$$\bar{R}_{12l}^E = \bar{R}_{12l}^E(\theta_l) \quad l = 1, 2, \dots, N/2. \quad (27)$$

这样方程(21)–(25)给出 VRT 的解:

1) 由(24)、(25)和(27)式计算 $\bar{U}_{\beta l}$, \bar{M}_{kl}^{mcE} 和 \bar{R}_{12l}^E .

2) 根据(21)和(26)式,由入射 \bar{I}_0^E 按 $h = 1, 2, \dots, H$ 从上到下再从下到上的顺序逐步计算 $\bar{I}_{h,k}^{(0)mcE}$.

3) 根据(22)式,计算 $\bar{I}_{h,k}^{(1)mcE}$.再由步骤 2) 计算获得 $z = 0$ 处出射的变换后的散射强度 $\bar{I}_{h,k}^{(1)mcE}$.然后根据(18)和(8)式可得 $z = 0$ 处出射的一阶散射强度

$$\begin{aligned} \bar{I}_s^{(1)}(\theta_k, \varphi, \rho) = & \bar{E} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} [\bar{I}_{1,k}^{(1)mcE} \cos(m\varphi) \\ & + \bar{I}_{1,k}^{(1)msE} \sin(m\varphi)]. \quad (28) \end{aligned}$$

4) 重复第 3) 步,计算上界面处出射的二阶散射强度 $\bar{I}_s^{(2)}(\theta_k, \varphi, 0)$ 及更高阶的散射强度 $\bar{I}_s^{(n)}(\theta_k, \varphi, 0)$.

用本文薄层一阶散射解计算 VRT 方程整层高阶散射迭代解时,计算第 n 阶的散射强度所需的时间只为一次迭代时间的 n 倍.而若用关于角度 θ' 和 φ' 的多重积分公式^[9,10]计算高阶迭代解,计算时间将成幂次增加.而且考虑 $z = -d$ 的边界后的高阶迭代解计算公式将十分繁杂,尚未见报道.

若考虑热辐射的 VRT 方程计算,只需将(17)式相应的热辐射作为零阶的散射强度加到(21)式右边即可.

应当指出,本方法在每一薄层中只考虑了一阶散射解,因此薄层的 Δd 应取得足够小($\kappa_e \Delta d \ll 1$),才能保证解的精确.增加迭代次数并不能弥补薄层二阶以上散射解被忽略产生的误差.正如前面所述,一旦由散射粒子确定了 $\kappa_e, \kappa_a, \kappa_s$ 和 \bar{P} 之后,作为这样的连续随机介质 VRT 往下的求解不须再与散射粒子有关了,整个散射层只用 $\kappa_e, \kappa_a, \kappa_s$ 和 \bar{P} 来表征, Δd 也可取得相当的薄.

5. 数值结果与讨论

5.1. 均匀散射介质

现选用频率 $f = 5.0\text{GHz}$ 的单位强度垂直极化

波,以 $(\pi - \theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = 0^\circ)$ 入射到一层厚为 $d = 200\text{cm}$ 的散射介质上.下垫面介电常数为 $15.0 + 2.0i$.散射元为椭球粒子,其随机空间取向 Euler 角在 $\beta \in (0^\circ, 60^\circ), \gamma \in (0^\circ, 360^\circ)$ 范围内均匀分布,其介电常数为 $\epsilon_s = 22.5 + 7.5i$,粒子半轴长 $a = b = 0.1\text{cm}, c = 2.5\text{cm}$, 占空比为 0.0055.

正如上一节所述 Δd 应取得足够小,以保证薄层一阶散射近似的正确.取薄层厚度 $\Delta d = 1\text{cm}$,角度 θ 为 6° 一等分,共 30 份,Fourier 级数展开至 $m = 2$.图 2 给出本文分层迭代法结果与由一阶 Mueller 矩阵解析公式^[1,2]计算得到的双站散射强度 $(\theta, \varphi = 180^\circ)$ 的比较.

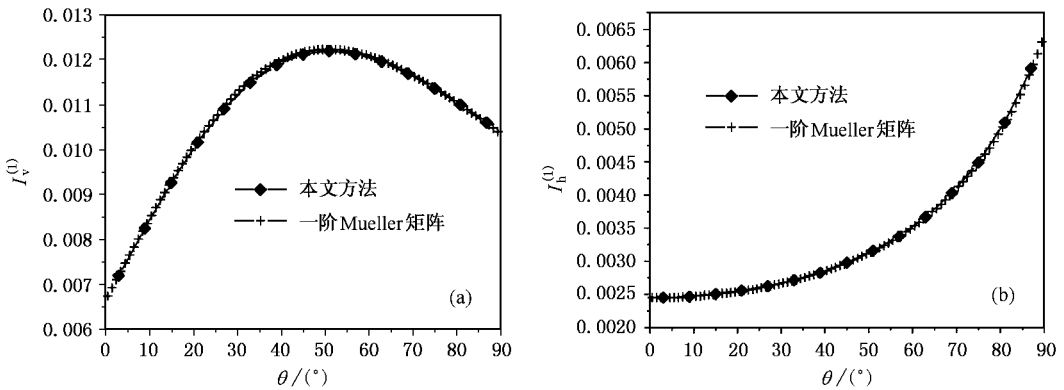


图 2 归一化的一阶散射强度随散射角的变化 (a)同极化 I_v (b)交叉极化 I_h

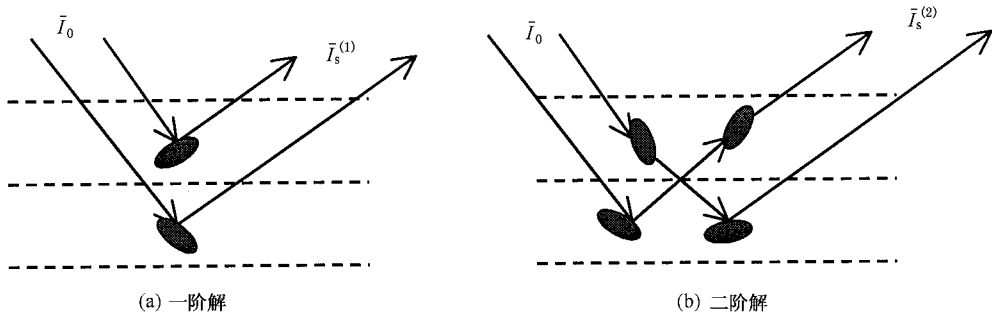


图 3 分层迭代解的示意图

如图 4 所示,与半空间的二阶散射强度积分公式值比较,分层迭代结果仅小了约 1%.其原因同样可从图 3 解释,因为本文分层迭代计算忽略了同一薄层中的二阶散射,分层迭代结果会比实际值小一点.由薄层近似条件,被忽略的二阶散射强度与薄层光学厚度的平方成正比,在薄层光学厚度很小时,该误差是可以不考虑的.一般情况下,薄层的光学厚度满足 $\Delta\tau \leq 0.01$ 时,即能完全满足误差要求.这里若

可以看出两者是完全一致的,这从图 3 可以解释.因整个介质层一阶散射强度是各薄层的一阶散射强度的累加和(考虑了衰减),而薄层的一阶散射强度(10)式与无反射面的一阶 Mueller 矩阵公式是一致的,所以分层计算得到的一阶散射强度值与 Mueller 矩阵公式值完全相同.也就是分层的多少和薄层厚度不影响整个介质层一阶散射强度的结果.

为验证分层迭代解的正确性,与半无穷空间二阶 Mueller 矩阵公式($d \rightarrow \infty$)计算的二阶散射强度^[9,10]比较.本文分层计算时取 $\Delta d = 0.1\text{cm}$,分层的总数取为 4000,以此来模拟半空间.两者计算结果比较如图 4.

取 $\Delta d = 1\text{cm}$,二阶散射强度的误差达 5%,但因一阶散射强度约为二阶的 7 倍,所以其在总散射强度中引起的误差将小于 1%.

按图 2 采用的各参数,图 5 给出双站散射强度一至三阶的迭代解.一阶解与二、三阶解有较大的差别.本例中单次反照率仅约为 0.1,但高阶散射仍明显大于一阶散射的 10%.一般而言,单次反照率越大,应计入的高阶散射阶数也越高.计算表明,足够

高阶后的散射解为递减的等比数列. 其具体阶数 n 与单次反照率有关, 可根据计算中相邻三阶散射解 $f^{(n-1)}f^{(n+1)}/f^{(n)2}$ 趋近于 1 的程度确定. 因此在单次

反照率较大时, 可用等比求和公式计算足够高阶后的散射解之和.

再讨论热辐射传输的密集球形粒子层的 VRT

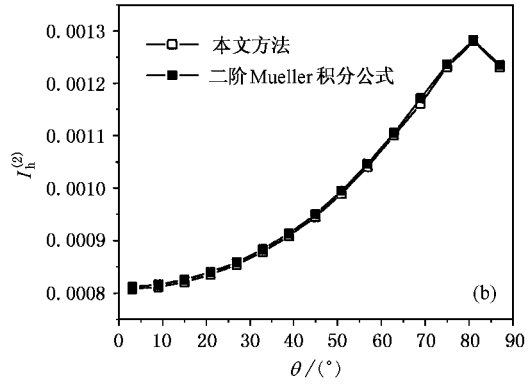
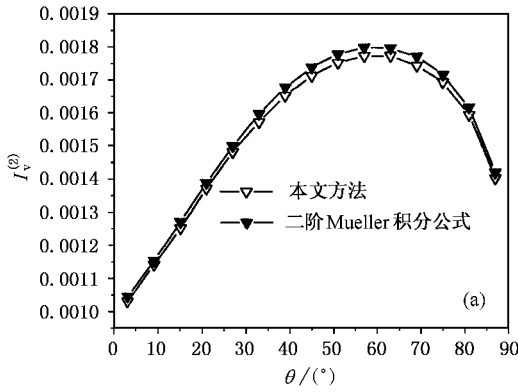


图 4 半空间归一化的二阶散射强度随散射角的变化 (a) 同极化 I_v (b) 交叉极化 I_h

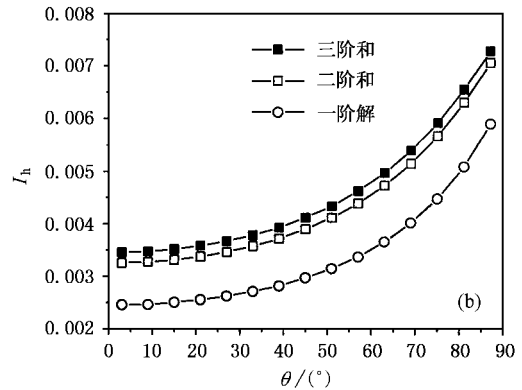
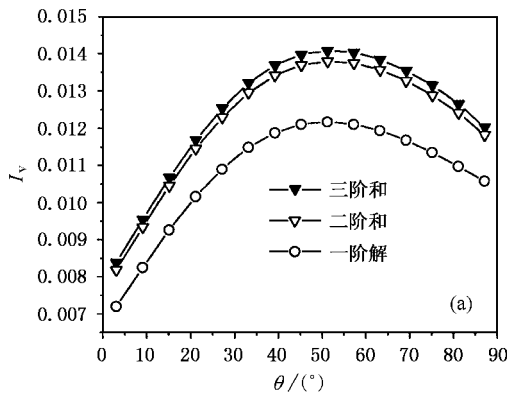


图 5 归一化的各阶散射强度随散射角的变化 (a) 同极化 I_v (b) 交叉极化 I_h

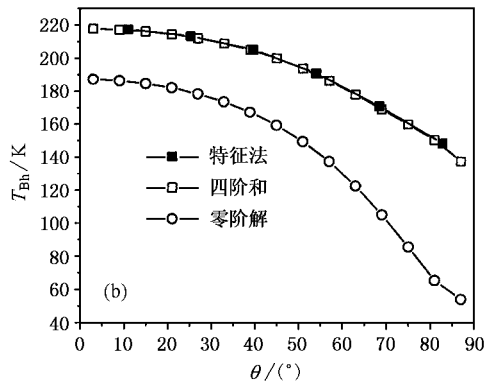
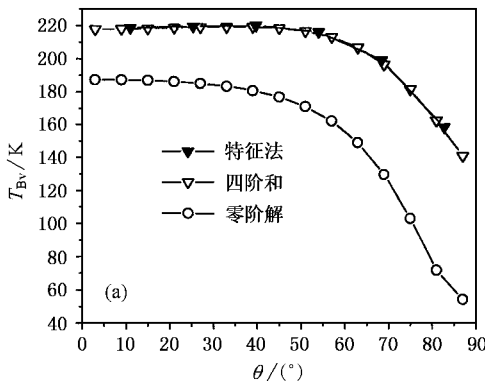


图 6 密集球形粒子层辐射亮度温度随角度的变化

方程^[1,2]. 球形粒子半径为 $a = 0.06\text{cm}$, 占空比为 0.3, 介电常数为 $\epsilon = 3.2 + 0.0032i$; 粒子层厚 $d = 20\text{cm}$, 下垫介质介电常数 $\epsilon_2 = 3.2 + 0.1i$, 粒子层和下垫空间的物理温度都取为 263K, 频率 $f = 37\text{GHz}$.

图 6 给出 4 次迭代解之和, 并与离散坐标-特征值特征矢量法的结果^[1]比较.

可以看出, 计算至第 4 阶的迭代解与特征值特征矢量法结果相差已很小, 只是在散射角较大时有

些偏差,这是因为薄层近似用了 $\exp(-\Delta\tau\sec\theta)\approx 1-\Delta\tau\sec\theta$.在 θ 靠近 90° 时,该近似是不成立的,该误差也可以通过增加分层数来减小.

5.2. 非均匀散射介质的散射与辐射

先计算一层非均匀散射层的归一化双站散射强度.入射波频率 $f = 5.0\text{GHz}$,入射角 $(\pi - \theta_0 = 30^\circ, \varphi_0 = 0^\circ)$.

散射元为针状椭球粒子,其短半轴 $a = b = 0.1\text{cm}$,假定其长半轴 c 由 1.5cm 随层的深度线性增加到 2.5cm ,即层顶部的粒子最短,层底部的粒子最长.粒子介电常数 $\epsilon_s = 20.5 + 9.0i$,散射粒子的占空比为 0.002 ,其他参数与 5.1 节相同.计算时薄层厚度 $\Delta d = 1\text{cm}$,总的分层数为 200 ,并迭代至第三阶散射解,结果如图 7 所示.

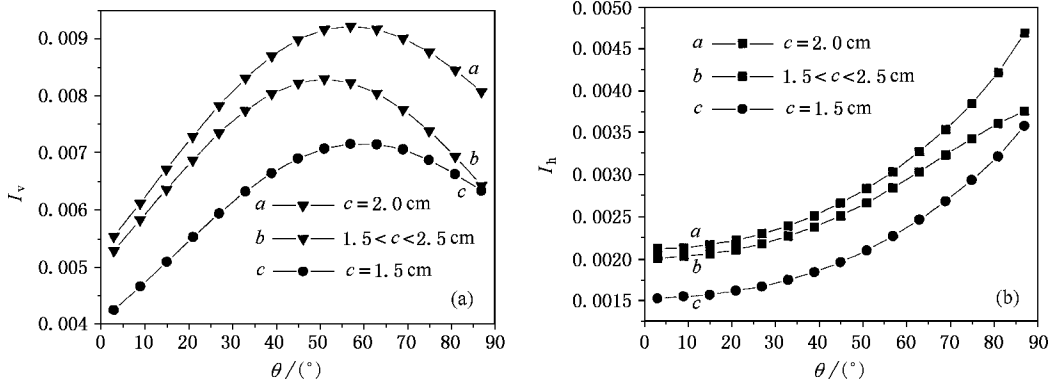


图 7 非均匀散射层归一化散射强度与均匀散射层的比较 (a)同极化 I_v (b)交叉极化 I_h

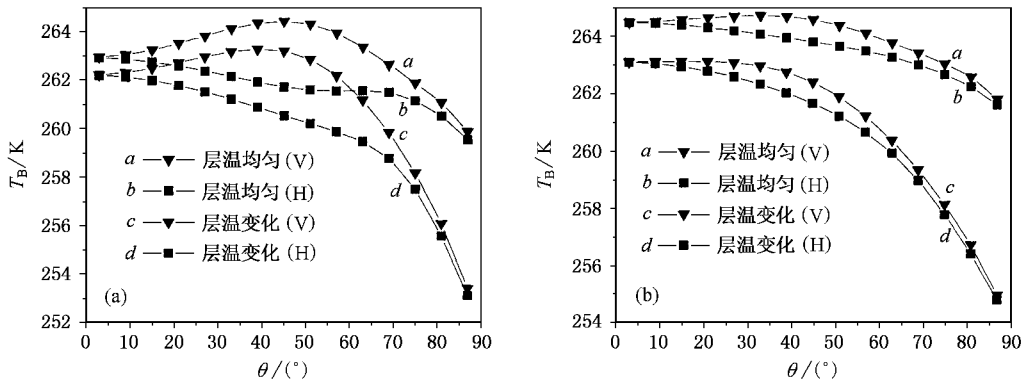


图 8 均匀层温与线性变化层温的辐射亮温的比较 (a)粒子介电常数 $\epsilon_s = 3.2 + 0.032i$ (b)粒子介电常数 $\epsilon_s = 3.2 + 0.05i$

可以看出,粒子大小非均匀的散射层的散射强度处于两均匀散射层的中间,在小解射角处与 $c = 2.0\text{cm}$ 的均匀粒子层的相近,而大散射角处则向 $c = 1.5\text{cm}$ 的均匀粒子层的靠近.这是因为在大散射角处非均匀散射层的散射强度取决于顶层,而在小散射角处则散射层底部的影响加强.

再计算一层有温度廓线的密集球形粒子层的热辐射,其中粒子半径为 $a = 0.06\text{cm}$,占空比为 0.3 ,粒子层厚 $d = 50\text{cm}$.下垫介质的温度取为 273K ,介电常数为 $\epsilon_2 = 3.2 + 0.1i$,频率 $f = 19\text{GHz}$.而假定粒子层的温度从表面的 258K 线性增加到底面的 273K ,

并与相同情况但具平均温度 265.5K 均温粒子层的结果比较.

图 8 (a)与图 8 (b)用了两种粒子的介电常数,给出辐射亮度温度随观测角度的变化.可以看出,具温度廓线分布的粒子层辐射亮温比具平均层温的辐射亮温要小,这是因为非均匀层顶部物理温度较低,而底层的辐射还不足以升高观测到的整层辐射亮温.同时可看出,非均温与均温两者的差别随角度增加而增大,而且对于粒子介电常数虚部大的图 8 (b)这种差别更明显.由于该非均温层底部温度较高,其热辐射的贡献经过上层的衰减,而较大的观察角或大

介电常数虚部所相应的光学衰减路径较长,所以非均匀温层的辐射亮温与均匀层的差别会更大一些.比如,经融化再冻结的多层非均匀积雪,含大介电常数虚部的湿雪都会表现出这些特征.

6. 结 论

本文将散射介质层在 z 方向划分成薄层,用各薄层的一阶散射强度、Fourier 展开及迭代方法,推导了求解整层 VRT 方程高阶散射解的有效方法,使得非均匀散射层 VRT 高阶解求解成为可行.比较了非

球形粒子的一、二阶散射迭代解与一、二阶 Mueller 矩阵的差别,数值上是一致的.四阶散射解还与密集球形粒子热辐射 VRT 方程的离散坐标-特征值特征矢量法结果进行了比较,两者相差也很小.可见该方法是正确的.本文迭代解由于公式简明、计算高阶散射迭代解可行,且所花时间少,收敛性好,可适用于计算多层结构与非均匀分布的非球形粒子散射介质 VRT 方程的高阶散射解.本文给出了粒子大小非均匀分布的非球形粒子的三阶数值解,也讨论了非均匀温度分布密集球形粒子辐射亮度温度的四阶解.

-
- [1] Jin Y Q 1994 *Electromagnetic Scattering Modelling for Quantitative Remote Sensing* (Singapore World Scientific)
- [2] Tsang L *et al* 1990 *Polarimetric Remote Sensing* (New York :Elsevier)
- [3] Chang M and Jin Y Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 74 [in Chinese] 常梅、金亚秋 2002 物理学报 **51** 74]
- [4] Dong Shun-Le Wang Yan 2001 *Chin. Phys.* **10** 958
- [5] Chandrasekhar S 1960 *Radiative Transfer* (New York :Dover)
- [6] Ishimaru A , Woo R , Armstrong J W and Blackman D C 1982 *Radio Science* **17** 1425
- [7] Siewert C E 2000 *JQSRT* **64** 109
- [8] Barichello L B , Garcia R D M and Siewert C E 2000 *JQSRT* **64** 219
- [9] Tsang L , Kong J A and Shin R 1984 *Radio Science* **19** 629
- [10] Tsang L and Ding K H 1991 *IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens.* **29** 242

Iterative approach of high-order scattering solution for vector radiative transfer of inhomogeneous media layer^{*}

Liang Zi-Chang Jin Ya-Qiu[†]

(Center for Wave Scattering and Remote Sensing ,and School of Information Science and Engineering ,Fudan University ,Shanghai 200433 ,China)

(Received 26 January 2002 ; revised manuscript received 22 May 2002)

Abstract

By stratifying a random scattering media into thin multi-layers in z direction ,the first-order scattering solution of each thin layer with Fourier transform is employed to derive high-order scattering solution of the whole random media . An iterative approach to solve high-order scattering solution of a vector radiative transfer(VRT) equation is newly developed . Numerical results are well compared with the Mueller matrix solutions of the first-order for a layer medium ,second-order for a half-space ,and also the results of the discrete ordinates and eigen-analysis method . It demonstrates that our approach is as feasible ,effective and especially applicable to high-order solutions of VRT for both bistatic scattering and thermal emission of inhomogeneous non-spherical scattering media .

Keywords : VRT equation , stratify , iterative solution

PACC : 0270 , 4220 , 0380

^{*} Project supported by the China National Key Basic Research Program(Grant No. 2001CB309401) ,and by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 49831060 ,60171009) .

[†] Corresponding author .